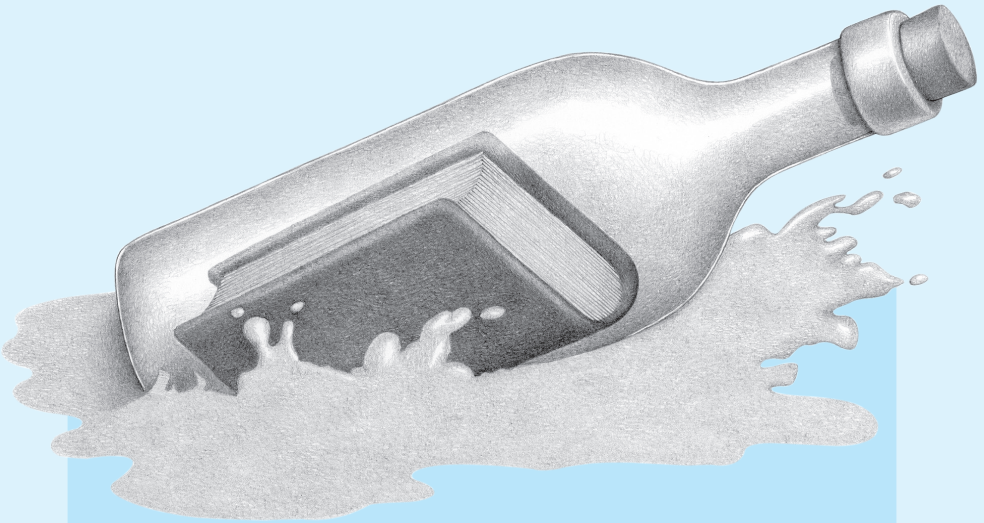
سرشناسه: منصف‌شکری، علی
عنوان: هندسه (۲)
مؤلفان: علی منصف‌شکری ـ آرش عمید
مشخصات نشر: تهران: انتشارات بین‌المللی گاج؛ ۱۳۹۵.
مشخصات ظاهری: ۷۲ ص. مصور (رنگی)، نمودار (رنگی).
فروست: این کتاب از مجموعه کتاب‌های خط ویژه گاج می‌باشد.
نوبت چاپ: ششم
شابک: ۷-۱۴۱-۳۵۹-۶۰۰-۹۷۸ بها: ۶۵۰۰ تومان
وضعیت فهرست‌نویسی: فیپای مختصر.
یادداشت: این مدرک در آدرس http://opac.nla.ir قابل دسترسی است.
شناسه افزوده: عمید، آرش
شماره‌ی کتابشناسی ملی: ۳۷۱۰۱۳۳

www.gaj.ir
sms: 1000425
Tel:021-6420
ناشر کتاب‌های آموزشی با طرحی متفاوت

[ناشر: انتشارات بین‌المللی گاج]
[مدیر مسئول: مهندس ابوالفضل جوکار]
[واحد پژوهش و برنامه‌ریزی کتاب‌های: خط ویژه]
[مدیران تألیف: محمد جوکار ـ علیرضا مزرعتی ـ علیرضا شعبانی نصر]
[عنوان کتاب: هندسه (۲)]
[مؤلفان: مهندس علی منصف‌شکری ـ مهندس آرش عمید]
[بازبینی علمی: لیلا سمیعی عارف ـ محمدحسن دین‌دارلو]
[هماهنگی و امور اجرایی: حکیم رجبی]
[سرپرست واحد فنی: صغری قربانی]
[صفحه‌آرا: مریم نایبی]
[حروف‌نگاران: لیلا فرجی امین ـ الناز دارائی]
[طراح شکل: سمیه اعظمی]
[طراح جلد: منصور سمواتی]
[آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع: گاج] + [لیتوگرافی: امین]
[چاپخانه و صحافی: صبح فردا] + [ناظر چاپ: علی مزرعتی]
[نوبت چاپ: ششم (۱۳۹۵)] + [شمارگان: ۵۰۰۰ نسخه]
[دفتر مرکزی: تهران، خیابان انقلاب، بین چهار راه ولیعصر(عج) و خیابان فلسطین، شماره ۹۱۹]
[تلفن: ۶۴۲۰ - ۰۲۱]
[سرویس پیام کوتاه (SMS): ۱۰۰۰۴۲۵] + [صندوق پستی: ۳۷۷ ـ ۱۳۱۴۵]
[پایگاه اینترنتی: www.gaj.ir]
[قیمت: ۶۵۰۰ تومان]

+++ دوست عزیز جهت آگاهی از آخرین اخبار و اطلاعات کتاب‌های منتشر شده
لطفاً پایه و رشته‌ی تحصیلی خود را به شماره‌ی ۱۰۰۰۴۲۵، SMS نمایید.

سخن ناشر



داد نزن / دود هوا نکن / از تکه چوب‌های اطرافت قایق نساز
کتاب / تنها نجات دهندهٔ تو / از جزیرهٔ تنهایی‌ست.

تقدیم به پدر، مادر و همسر عزیزم

آرش عمید

تقدیم به پدر، مادر و همسر عزیزم

علی منصف شکری

مقدمه مؤلفین

در این کتاب ما هر آن‌چه در توان داشتیم و محصول سال‌ها تجربه‌مان در تدریس این درس بود در معرض دید شما قرار دادیم. هر آن‌چه باید می‌گفتیم، گفتیم و هر آن‌چه دانستن آن شما را از خط کنکور دور می‌کرد، نگفتیم و مثل بندبازی روی لبه‌ی استاندارد حرکت کردیم. کار دشواری بود، امّا دشوارترین قسمت کار، «نگفتن‌ها» بود، نه «گفتن‌ها». قسمتی که آن را در این کتاب هرگز نخواهید دید و برای همیشه دور از دیدگان شما خواهد ماند **تا مسیر شما را در رسیدن به هدف، از خود پل زده باشیم**. **پس، از ما عبور کن ...**

و سپاس از همه‌ی کسانی که دست ما را فشردند و پابه‌پای ما دویدند.

۱. مدیریت محترم انتشارات بین‌المللی گاج، جناب آقای مهندس ابوالفضل جوکار

۲. مدیران واحد تألیف، جناب آقایان محمد جوکار، علیرضا مزرعتی، علیرضا شعبانی‌نصر

۳. سرپرست واحد فنی انتشارات، سرکار خانم صغری قربانی.

۴. خانم لیلا سمیعی عارف، آقای محمدحسن دین‌دارلو که در ویراستاری و بازبینی این کتاب ما را یاری فراوان کردند.

۵. مشاوران محترم آقایان مهندس امید نقوی، مهندس علی ثبات، مهندس حمیدرضا مهدویانی، مهندس علی یگانه، سید محسن جلال‌زاده و خانم‌ها زهره یکتا، مریم احمدی، مهندس لیلا ثابت که ما را یاری کردند.

۶. آقایان مهندس بابک نهرینی و مهندس محمد عسکری و مهندس نوید اورازانی شجاعی که در نظارت علمی این کتاب گام به گام با ما همراه بودند..

مهندس علی منصف‌شکری - مهندس آرش عمید

مخاطبان این کتاب چه کسانی هستند

این کتاب نه سیاه است، نه سفید و نه خاکستری و مخاطبان آن نه ممتازند، نه ضعیف و نه متوسط. این کتاب، رنگی است و طیفی از رنگ‌ها را در خود دارد و ویژه‌ی همه‌ی دانش‌آموزان طراحی شده است و برای هر دسته از آن‌ها ناگفته‌هایی دارد.

دسته‌ی اول

برای دانش‌آموزانی که همه‌چیز را خوانده‌اند و کاملاً مسلط هستند:

۱. راه‌حل‌هایی جدید، کوتاه و ابتکاری و بدون استفاده از فرمول در حل تست‌ها

۲. واکاوی و موشکافی تمرین‌ها و مثال‌های کتاب درسی و بیان آن‌ها در قالب آزمون‌های جمع‌بندی فصل به فصل در انتهای کتاب

۳. آزمون‌های جامع مشابه‌سازی شده با کنکور سراسری با نگاه دقیق به تمرین‌های کتاب درسی

۴. جمع‌بندی کل هندسه (۲) در کم‌ترین تست‌های ممکن

دسته‌ی دوم

برای دانش‌آموزانی که خوانده‌اند، ولی ترس دارند و احساس می‌کنند مطالب یادشان رفته یا اصلاً نمی‌دانند چه‌طور باید این درس را در چند روز جمع و جور کرد:

۱. ارائه درسنامه‌های جمع و جور و مهندسی شده برای جمع‌بندی مطالب

۲. دور کردن ذهنیت این گروه از دانش‌آموزان از مطالب حاشیه‌ای و متمرکز کردن آن‌ها در خط اصلی کنکور

۳. آزمون‌های شبیه‌ساز برای افزایش تسلط بر خوانده‌ها و تثبیت آن‌ها

دسته‌ی سوم

دانش‌آموزانی که اصلاً نخوانده‌اند، یا بسیار کم خوانده و می‌خواهند این درس را کنار بگذارند:

کافی است به تیترهای پرتکرار که در آغاز هر فصل به آن‌ها به ترتیب اهمیت اشاره شده، نگاهی بیندازند و با کمی وقت گذاشتن روی این تیترها و خواندن درسنامه‌های کوتاه مربوط به آن‌ها در کم‌ترین زمان ممکن لااقل ۱ یا ۲ تست از هندسه (۲) را در کنکور حل کنند. با توجه به اطلاعات آماری اعلام شده توسط سازمان سنجش کشور فقط ٪۲/۵ پذیرفته شدگان در کنکور ۹۵ درس ریاضی را بالای ٪۵۰ زده‌اند بنابراین حل کردن حتی ۱ یا ۲ تست از هندسه (۲) شما را در جایگاه ویژه‌ای نسبت به رقیبان قرار می‌دهد.

ویژگی‌های خط ویژه

این کتاب برای دانش‌آموزان رشته‌های ریاضی نوشته شده است. هدف اصلی این کتاب، دور کردن ذهنیت دانش‌آموزان از مطالب حاشیه‌ای و متمرکز کردن آن‌ها در خط اصلی کنکور است تا به این باور برسند که تست‌های هندسه (۲) در کنکور واقعاً بر اساس تمرینات کتاب درسی طراحی می‌شوند و قالبی بسیار تکرارپذیر دارند.

و امّا برخی از ویژگی‌های کتاب هندسه (۲) خط ویژه

۱. کادر نکات کاربردی و پرتکرار

در این کتاب ما برای شما درسنامه‌های کوتاه، جمع و جور، مهندسی‌شده، کم‌فرمول و کار راه‌انداز طراحی کردیم که در عین کوتاهی تمام مطالب کتاب درسی را پوشش می‌دهد و فقط به درد کنکور سراسری می‌خورد و از حاشیه‌سازی‌های کنکورهای آزمایشی غیر استاندارد بسیار فاصله دارد و شما را از پرداختن به روابط غیرضروری در کتاب‌ها و جزوه‌های گردن‌کلفت واقعاً بی‌نیاز می‌کند.

۲. پاسخ‌های تشریحی

پاسخ‌های تست‌ها در این کتاب به شیوه‌ی منحصر به فرد گام به گام، ارایه شده است که جواب را مانند یک پازل رفته رفته کامل می‌کند تا دانش‌آموزان ضعیف و متوسط نیز بتوانند به راحتی مسیر حل مسأله را پی‌گیری کنند.

۳. بررسی و تحلیل تمام سؤالات سراسری داخل و خارج کشور

تمامی تست‌های سراسری داخل و خارج از سال ۸۰ به بعد را با ترتیبی منطقی که کار یادگیری و تسلط را در یک روال خطی، آسان می‌کند، مرتب کردیم و مورد تحلیل و بررسی قرار دادیم و در ضمن از کنکورهای قبل از سال ۸۰ هم غافل نشدیم، چون بعضی از آن‌ها هنوز می‌توانند تکرار شوند. این تست‌های هرچند قدیمی ولی امروزی را نیز به کتاب خودمان دعوت کردیم.

۴. شگردها و پلی‌تیک‌های پاسخ‌گویی به تست‌ها

در حل تست‌های هر فصل سعی ما استفاده از کوتاه‌ترین راه‌های ممکن، مبتنی بر کتاب درسی بود؛ یعنی همان «روش‌های تست‌زنی» که در «کلاس کنکورها» گفته می‌شود. ما همان راه‌ها و روش‌ها را به زبانی ساده و قابل فهم در این کتاب گنجاندیم، که آن را تحت عنوان پلی‌تیک ارایه کرده‌ایم.

۵. موشکافی تمرین‌ها و مثال‌های متن کتاب درسی

تمامی تمرین‌های کتاب درسی، مثال‌های حل شده در لابه‌لای متن کتاب، مخصوصاً تمرین‌ها و مثال‌هایی که هنوز در کنکور مطرح نشده را مثل مو از ماست بیرون کشیدیم؛ همان سؤال‌هایی که خیلی‌ها را سر کنکور شوکه می‌کند و حسرت به دل می‌گذارد که ای کاش تمرین‌های کتاب را دقیق‌تر بررسی می‌کردیم!!!

۶. آزمون‌های شبیه‌سازی شده

در پایان کتاب ۵ آزمون جامع براساس تست‌های سراسری داخل و خارج چند سال اخیر شبیه‌سازی شده است که بعضی از تست‌های طرح‌شده در آن‌ها ترکیبی و مفهومی بوده و زوایای پنهان کنکور و پتانسیل تمرین‌ها و قضیه‌های کتاب را آشکارتر می‌کند و یک آزمون جامع ترکیبی از مباحث هندسه ۱ و هندسه ۲ نیز مطرح شده است.

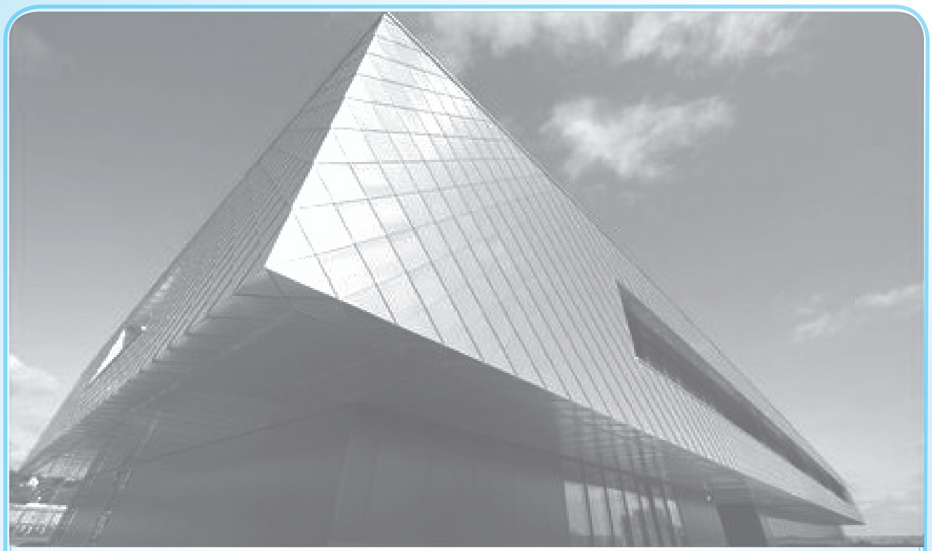
فهرست

دعای قبل از مطالعه

بِسمِ اللهِ الرَّحمنِ الرَّحیمِ
اللّهُمَّ اَخرِجنی مِن ظُلُماتِ الوَهمِ
وَ اَکرِمنی بِنورِالفَهمِ
اَللّهمَّ افتَح عَلَینا اَبوابَ رَحمَتِکَ
وَ انشُرعَلَینا خَزائِنَ عُلومِکَ
بِرَحمَتِکَ یا اَرحَمَ الرّاحِمینَ

به نام خداوند بخشاینده‌ی مهربان
پروردگارا، خارج کن مرا
از تاریکی‌های حدس و گمان
و گرامی بدار مرا به نور فهم
پروردگارا، بگشای بر ما درهای رحمتت را
و بگستران بر ما گنج‌های دانشت را
به امید رحمت تو ای مهربان‌ترین مهربانان

استدلال در هندسه

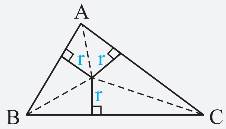


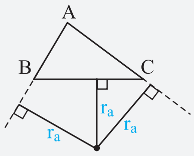
REASONING IN GEOMETRY

فصل اول

فصل اول هندسه ۲ با عنوان استدلال در هندسه به بررسی روابط طولی و نامساوی‌ها در مثلث و چهارضلعی‌ها می‌پردازد. بیشتر تمرکز طراحان در چند سال اخیر بر روی قضیه‌ی نیمساز در مثلث و اشکال حاصل از برخورد نیمسازهای چهارضلعی‌ها متمرکز است. البته هر چند سال یک بار هم به سراغ نامساوی‌ها یا رسم مثلث می‌روند. از این فصل همواره ۱ یا ۲ سوال در کنکور مطرح می‌شود.

۱ تقاطع نیمسازها





① هر نقطه روی نیمساز داخلی یک از زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

نتیجه: در هر مثلث، محل تلاقی نیمسازهای داخلی از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

② هر نقطه روی نیمساز خارجی از امتداد اضلاع به یک فاصله است.

نتیجه: در هر مثلث، محل تلاقی نیمسازهای خارجی از امتداد دو ضلع و ضلع سوم به یک فاصله است.

۱ در صفحه‌ی یک مثلث چند نقطه می‌توان یافت که از سه ضلع آن مثلث یا امتداد آن‌ها به یک فاصله باشد؟

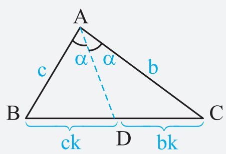
داخل تجربی ۸۰ | پاسخ: ۴

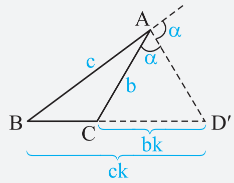
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

یک نقطه درون مثلث (محل تلاقی نیمسازهای داخلی) و سه نقطه در خارج مثلث (محل تلاقی نیمسازهای خارجی) از امتداد اضلاع به یک فاصله‌اند. یعنی ۴ نقطه وجود دارد.

۲ پلی‌تیک مسائل نیمساز

در هر مثلث، نیمسازهای داخلی و خارجی ضلع مقابل را به نسبت اضلاع کناری تقسیم می‌کنند.





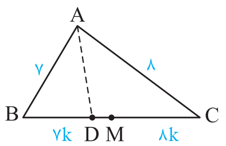
توجه: تمام مسائل مربوط به نیمساز در کنکور با همین پلی‌تیک ساده حل می‌شوند و نیازی به نوشتن تناسب نیست.

۲ در مثلثی به اضلاع ۱۲، ۸ و ۷، نیمساز داخلی زاویه‌ی بزرگ‌تر، ضلع مقابل را در D قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی D از وسط ضلع بزرگ‌تر چه‌قدر است؟

خارج ریاضی ۸۶ | پاسخ: ۲

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۶

گام ۱: زاویه‌ی بزرگ‌تر رو به ضلع بزرگ‌تر است، بنابراین:



گام ۲: با توجه به این که $BC = ۱۲$ است، داریم:

$$۷k + ۸k = ۱۲ \Rightarrow k = \frac{۴}{۵}$$

گام ۳: اندازه‌ی DM را محاسبه می‌کنیم:

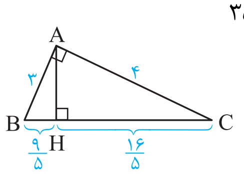
$$DM = \frac{BC}{۲} - BD = ۶ - ۷k = ۶ - \frac{۲۸}{۵} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$

۳ در مثلث ABC $(\widehat{A} = ۹۰^\circ ، AB = ۳ ، AC = ۴)$ ارتفاع AH و نیمساز داخلی AD رسم شده است. اندازه‌ی DH کدام است؟

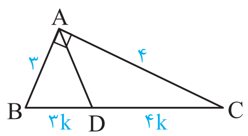
داخل ریاضی ۹۰ | پاسخ: ۴

۱) $\frac{۱۵}{۲۸}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱۲}{۳۵}$

گام ۱: همان‌طور که در هندسه (۱) دیدید، قطعات ایجاد شده توسط ارتفاع به‌صورت مقابل به‌دست می‌آیند:

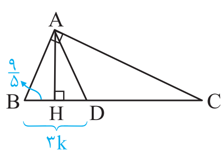


گام ۲: با توجه به خاصیت نیمساز داریم:



$$۳k + ۴k = ۵ \Rightarrow k = \frac{۵}{۷}$$

گام ۳: طول پاره‌خط DH را محاسبه می‌کنیم:



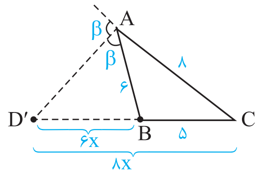
$$DH = ۳k - \frac{۹}{۵} = \frac{۱۵}{۷} - \frac{۹}{۵} = \frac{۱۲}{۳۵}$$

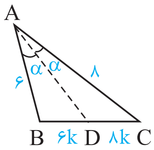
۴ در مثلثی به اضلاع ۸، ۶ و ۵ واحد، نیمسازهای کوچک‌ترین زاویه‌ی آن، ضلع مقابل و امتداد آن را در D و D' قطع می‌کنند. اندازه‌ی DD' چه‌قدر است؟

خارج ریاضی ۹۰ | پاسخ: ۳

۱) $\frac{۱۹۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱۰۲}{۷}$ ۳) $\frac{۱۲۰}{۷}$ ۴) $\frac{۱۲۴}{۷}$

گام ۱: کوچک‌ترین زاویه رو به کوچک‌ترین ضلع است و در ضمن، نیمسازها ضلع مقابل را به نسبت اضلاع کناری تقسیم می‌کنند:

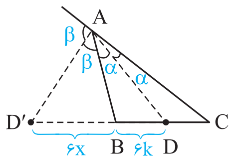




$$۸x - ۶x = ۵ \Rightarrow x = \frac{۵}{۲}$$

$$۶k + ۸k = ۵ \Rightarrow k = \frac{۵}{۱۴}$$

گام ۲: اندازه‌ی DD' برابر است با:

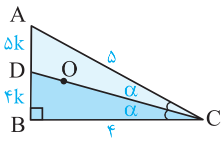


$$DD' = ۶x + ۶k = ۶(\frac{۵}{۱۴} + \frac{۵}{۲}) = \frac{۱۲۰}{۷}$$

۵ در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازه‌ی اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد می‌باشد. فاصله‌ی دورترین رأس این مثلث از نقطه‌ی تلاقی نیمسازهای داخلی آن کدام است؟

خارج ریاضی ۸۷ | پاسخ: ۳

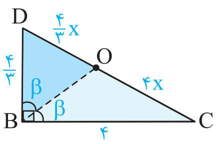
۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۱۰}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$



گام ۱: بزرگ‌ترین نیمساز، نیمساز وارد بر ضلع ۳ واحدی است و رأس C دورترین رأس از نقطه‌ی O محل تلاقی نیمسازها می‌باشد.

$$۵k + ۴k = ۳ \Rightarrow k = \frac{۱}{۳}$$

گام ۲: حال باید طول پاره‌خط OC را پیدا کنیم، بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه‌ی DBC داریم:



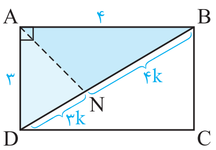
$$\frac{۴}{۳}x + ۴x = \sqrt{\frac{۱۶}{۹} + ۱۶} \Rightarrow \frac{۱۶}{۳}x = \frac{۴}{۳}\sqrt{۱۰}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{۱۰}}{۴} \Rightarrow OC = ۴x = \sqrt{۱۰}$$

۶ در مستطیلی به ابعاد ۴ و ۳ واحد، نیمسازهای داخلی دو زاویه‌ی متقابل، قطر دیگر مستطیل را در N و M قطع می‌کند. اندازه‌ی MN چه‌قدر است؟

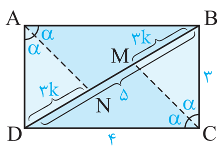
خارج ریاضی ۸۷ | پاسخ: ۲

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$



گام ۱: اگر AN نیمساز رأس A باشد، داریم:

$$۳k + ۴k = ۵ \Rightarrow k = \frac{۵}{۷}$$

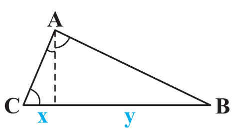


گام ۲: حال اگر هر دو نیمساز زوایای متقابل را رسم کنیم، خواهیم داشت:

$$MN = ۵ - ۲(۳k) = ۵ - ۶k = ۵ - \frac{۳۰}{۷} = \frac{۵}{۷}$$

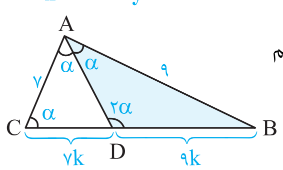
۷ در مثلث ABC داریم: $AB = ۹$ ، $AC = ۷$ و $\hat{A} = ۲\hat{C}$ ، اندازه‌ی BC کدام است؟

خارج ریاضی ۷۶ | پاسخ: ۱



۱) ۱۲ ۲) ۱۲/۵

۳) ۱۳ ۴) ۱۴



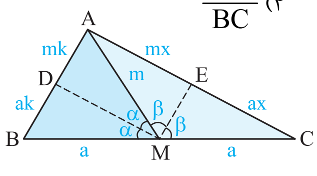
گام ۱: همان‌طور که در هندسه (۱) هم گفتیم، اگر در مثلثی، یکی از زاویه‌ها دو برابر دیگری بود، بهترین کار رسم نیمساز زاویه‌ی بزرگ است و استفاده از تشابه:

گام ۲: مثلث‌های ADB و ABC متشابه‌اند، بنابراین:

$$\frac{۹}{\underbrace{۱۶k}_{\text{روبه } ۲\alpha}} = \frac{۹k}{\underbrace{۹}_{\text{روبه } \alpha}} \Rightarrow ۱۶k^۲ = ۹ \Rightarrow k = \frac{۳}{۴} \Rightarrow BC = ۱۶k = ۱۶(\frac{۳}{۴}) = ۱۲$$

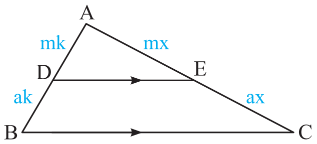
۸ در مثلث ABC، میانه‌ی AM و نیمسازهای دو زاویه‌ی AMB و AMC را رسم می‌کنیم تا دو ضلع AB و AC را به‌ترتیب در D و E قطع کنند. نسبت $\frac{DE}{BC}$ برابر کدام است؟ داخل ریاضی ۸۹ | پاسخ: ۱

۱) $\frac{AD}{AB}$ ۲) $\frac{ME}{MC}$ ۳) $\frac{ME}{CE}$ ۴) $\frac{AM}{BC}$



گام ۱: طول میانه را m و ضلع BC را به‌طور فرضی $2a$ در نظر می‌گیریم. با استفاده از نیمساز بودن MD و ME، شکل را کامل می‌کنیم:

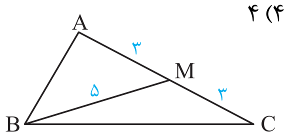
گام ۲: چون قطعات ایجاد شده روی اضلاع AB و AC متناسب هستند، یعنی $\frac{mk}{ak} = \frac{mx}{ax}$ بنابر عکس قضیه‌ی تالس $DE \parallel BC$ است.



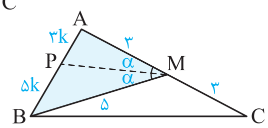
گام ۳: بنابر قضیه‌ی تالس داریم: $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

۹ در مثلث ABC، ضلع $AC = 6$ و میانه‌ی $BM = 5$، نیمسازهای دو زاویه‌ی AMB و CMB دو ضلع دیگر این مثلث را در P و Q قطع می‌کنند. اندازه‌ی PQ کدام است؟ داخل ریاضی ۹۳ | پاسخ: ۳

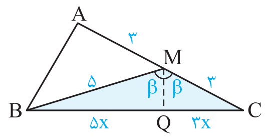
۱) ۳/۲۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۳/۷۵ ۴) ۴



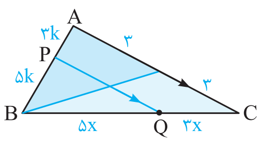
گام ۱: میانه‌ی BM ضلع مقابل را نصف می‌کند:



گام ۲: نیمساز زاویه‌ی AMB ضلع AB را به نسبت اضلاع کناری تقسیم می‌کند:



گام ۳: نیمساز زاویه‌ی CMB ضلع BC را به نسبت اضلاع کناری تقسیم می‌کند:



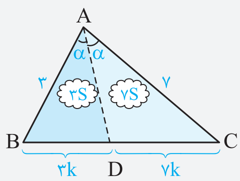
گام ۴: چون $\frac{5x}{3x} = \frac{5k}{3k}$، بنابر عکس قضیه‌ی تالس، PQ موازی AC خواهد بود.

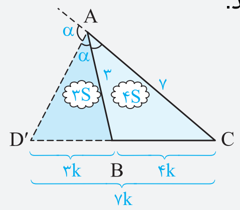
گام ۵: چون PQ موازی AC است، بنابر قضیه‌ی تالس داریم:

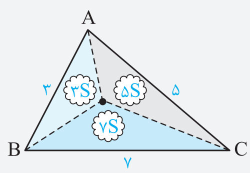
$$\frac{PQ}{6} = \frac{5k}{8k} \Rightarrow PQ = \frac{30}{8} = 3/75$$:جزء به کل

۳ کالبد شکافی تقسیم مساحت توسط نیمساز

چون در هر مثلث، نیمسازهای زوایای داخلی و خارجی اضلاع مقابل خود را به نسبت اضلاع کناری تقسیم می‌کنند، پس نیمسازها مساحت‌ها را نیز به نسبت اضلاع کناری تقسیم می‌کنند.





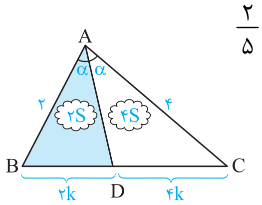


نتیجه: در هر مثلث، اگر از محل تلاقی نیمسازهای داخلی به سه رأس وصل کنیم، مساحت مثلث‌های ایجاد شده متناسب با اضلاع کناری است.

۱۰ اضلاع مثلثی با اعداد ۲، ۳ و ۴ متناسب است. نیمساز زاویه‌ی داخلی متوسط آن را رسم می‌کنیم. مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصل، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟ خارج ریاضی ۸۵ | پاسخ: ۳

۱) $\frac{2}{9}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{5}$

گام ۱: نیمساز زاویه‌ی داخلی متوسط بر ضلع متوسط وارد می‌شود:



$$\frac{2S}{6S} = \frac{1}{3}$$

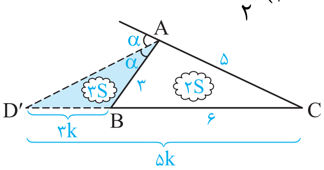
۱۱) در مثلثی به اضلاع ۶، ۵ و ۳ واحد، نیمساز کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی آن، بزرگ‌ترین ضلع مثلث را قطع می‌کند. مساحت مثلثی که در خارج مثلث اصلی تشکیل می‌شود، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟

داخل ریاضی ۹۱ | پاسخ: ۴

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

گام ۱: نیمساز کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی رو به بزرگ‌ترین ضلع مثلث است، بنابراین:

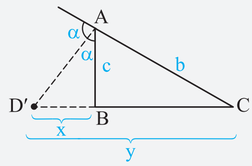
$$\frac{۳S}{۲S}=\frac{۳}{۲}$$



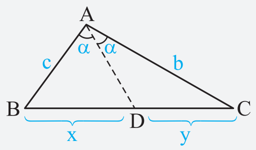
۴ اندازه‌ی نیمسازها

در هر مثلث، اندازه‌ی نیمسازهای داخلی و خارجی از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$AD'^{۲}=xy-bc$$



$$AD^{۲}=bc-xy$$



تذکر: در هر مثلث، نیمسازهای داخلی و خارجی هر زاویه بر هم عمودند و در نتیجه:

$$AD^{۲}+AD'^{۲}=DD'^{۲}$$

۱۲) اگر فرض شود در مثلثی مجذور طول نیمساز داخلی زاویه‌ی A با حاصل‌ضرب اضلاع آن زاویه برابر است، استنباط چگونه است؟

داخل ریاضی ۸۷ | پاسخ: ۴

۱) $\hat{A}<۹۰^\circ$ ۲) $\hat{A}=۹۰^\circ$ ۳) $\hat{A}>۹۰^\circ$ ۴) نادرستی فرض

گام ۱: می‌دانیم: $AD^{۲}=bc-xy$

گام ۲: در فرض مسأله گفته شده $AD^{۲}=bc$

گام ۳: باید $xy=۰$ باشد و چنین چیزی غیرممکن است، چون نیمساز نمی‌تواند روی ضلع مقابل قطعه‌ای ایجاد نکند!!!

۱۳) در مثلث ABC داریم $AB=۳AC$ و $BC=۱۲$ و نقاط D و D′ پای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌ی A است. مقدار $AD^{۲}+AD'^{۲}$ کدام است؟

خارج ریاضی ۹۳ | پاسخ: ۳

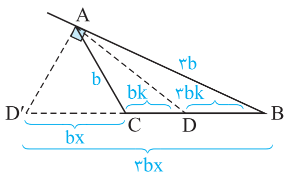
۱) ۶۴ ۲) ۷۲ ۳) ۸۱ ۴) ۱۰۰

گام ۱: اگر ضلع $AC=b$ فرض شود، آن‌گاه $AB=۳b$ و حال براساس خواص نیمسازهای زوایای داخلی و خارجی داریم:

① $۳bx-bx=۱۲\Rightarrow bx=۶$

$\Rightarrow DD'=bx+bk=۶+۳=۹$

② $۳bk+bk=۱۲\Rightarrow bk=۳$



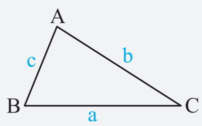
گام ۲: در هر مثلث، نیمسازهای داخلی و خارجی هر زاویه (نیمسازهای دو زاویه‌ی مجانب) بر هم عمودند، بنابراین:

$$AD^{۲}+AD'^{۲}=DD'^{۲}=۹^{۲}=۸۱$$

۵ نامساوی‌ها در مثلث

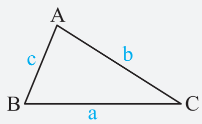
① **نامساوی مثلثی:** در هر مثلث مجموع هر دو ضلع دلخواه از ضلع سوم بزرگ‌تر است.

$$b+c>a$$



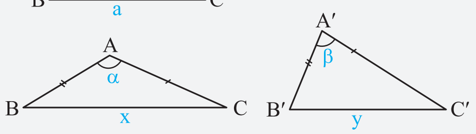
② **قضیه‌ی زاویه و ضلع برتر:** ضلع رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از ضلع رو به زاویه‌ی کوچک‌تر است و برعکس.

$$\hat{B}>\hat{C}\Leftrightarrow b>c$$



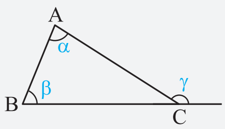
③ **قضیه‌ی لولا:** اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر، نظیر به نظیر برابر و زاویه‌ی بین آن‌ها نابرابر باشد، آن‌گاه ضلع رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از ضلع رو به زاویه‌ی کوچک‌تر است.

$$\alpha>\beta\Rightarrow x>y$$



④ **عکس قضیه‌ی لولا:** عکس قضیه‌ی لولا نیز برقرار است، یعنی اگر $x>y$ باشد، آن‌گاه $\alpha>\beta$ است.

تذکر: در هر مثلث هر زاویه‌ی خارجی از زاویه‌های داخلی غیرمجاور خود بزرگ‌تر است.



$$\Rightarrow\begin{cases}\gamma>\alpha\\ \gamma>\beta\end{cases}$$

۱۴ سه پاره‌خط به طول‌های $۴x-۴$ ، $x+۷$ و $۶x$ اضلاع مثلثی هستند، مقادیر x به کدام صورت است؟ داخل ریاضی ۸۲ | پاسخ: ۱

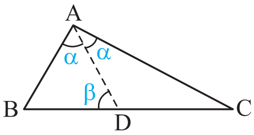
۱) $\frac{۱۱}{۹}<x<۳$ ۲) $\frac{۵}{۳}<x<۳$ ۳) $۲<x<۳$ ۴) $\frac{۱۱}{۹}<x<۴$

گام ۱: مجموع طول هر دو ضلع دلخواه، باید بزرگ‌تر از طول ضلع سوم باشد:

$$\left.\begin{array}{l}(۴x-۴)+(x+۷)>۶x\Rightarrow x<۳\\(۴x-۴)+(۶x)>x+۷\Rightarrow x>\frac{۱۱}{۹}\\(x+۷)+(۶x)>۴x-۴\Rightarrow x>\frac{-۱۱}{۳}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{۱۱}{۹}<x<۳$$

۱۵ در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویه‌ی A ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. کدام نامساوی همواره صحیح است؟ داخل ریاضی ۸۰ | پاسخ: ۱

۱) $AB>BD$ ۲) $AD>BD$ ۳) $AB>AD$ ۴) $BD>AD$



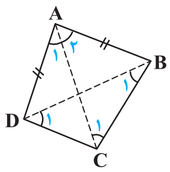
گام ۱: با توجه به شکل $\beta>\alpha$ می‌باشد، چون در مثلث ADC ، زاویه‌ی β، زاویه‌ی خارجی محسوب می‌شود.

گام ۲: چون در مثلث ABD ، $\beta>\alpha$ است، بنابراین $AB>BD$.

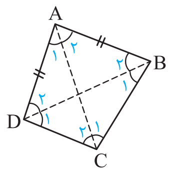
نتیجه: در هر مثلث قطعات ایجاد شده توسط نیمسازهای داخلی از ضلع مجاور خود کوچک‌ترند (در نیمساز خارجی برعکس است.).

۱۶ در چهارضلعی $ABCD$ داریم: $AB=AD$ و $BC>CD$. در مورد زاویه‌ها کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟ داخل ریاضی ۸۵ | پاسخ: ۱

۱) $\hat{C}_۱>\hat{A}_۱$ ۲) $\hat{A}_۲>\hat{A}_۱$ ۳) $\hat{D}_۱>\hat{B}_۱$ ۴) $\hat{D}>\hat{B}$



گام ۱: چون در مثلث BCD ، $BC>CD$ است، بنابراین: $\hat{D}_۱>\hat{B}_۱$.



گام ۲: مثلث ADB متساوی‌الساقین است، بنابراین: $\hat{D}_۲=\hat{B}_۲$.

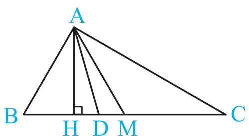
گام ۳: اگر طرفین گام ۲ را به گام ۱ اضافه کنیم، خواهیم داشت: $\hat{D}>\hat{B}$.

گام ٤: در مثلث‌های ADC و ABC طبق عکس قضیه‌ی لولا داریم:

$$\left\{\begin{array}{l}AC=AC\\AD=AB\\BC>CD\end{array}\right.\Rightarrow \hat{A}_۲>\hat{A}_۱$$

۱۷ در مثلث ABC ، میانه‌ی AM و نیمساز داخلی AD رسم شده است. کدام نامساوی همواره درست است؟ داخل ریاضی ۹۴ | پاسخ: ۴

۱) $AM<BC$ ۲) $AM<AB$ ۳) $AD<AB$ ۴) $AD<AM$



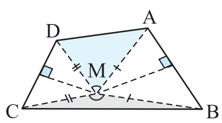
می‌دانیم در هر مثلث ABC همواره:

$$AH\le AD\le AM$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) با اندکی اغماض همواره درست است. چون باید نامساوی به‌صورت $AD\le AM$ باشد.

۱۸ در چهارضلعی $ABCD$ عمودمنصف‌های دو ضلع AB و CD در نقطه‌ی M متقاطع‌اند. اگر $AD>BC$ باشد، کدام نابرابری همواره صحیح است؟ داخل ریاضی ۹۲ | پاسخ: ۳

۱) $A\hat{M}B>B\hat{M}C$ ۲) $C\hat{A}B>C\hat{A}D$ ۳) $B\hat{M}C>A\hat{M}D$ ۴) $C\hat{M}D>A\hat{M}B$

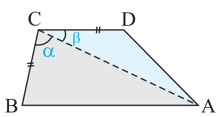


گام ۱: شکل را رسم می‌کنیم، می‌دانیم هر نقطه روی عمود منصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است:

گام ۲: مثلث‌های MAD و MBC دو ضلع برابر دارند و ضلع سوم نابرابر است، بنابر عکس قضیه‌ی لولا داریم: $B\hat{M}C>A\hat{M}D$

۱۹ در چهارضلعی $ABCD$ ، اگر $CD=CB$ و $A\hat{C}B>A\hat{C}D$ ، آن‌گاه کدام نامساوی همواره برقرار است؟ خارج ریاضی ۹۲ | پاسخ: ۲

۱) $AB>AC$ ۲) $AB>AD$ ۳) $AC>AB$ ۴) $AC>AD$



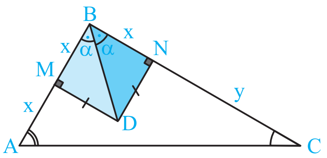
گام ۱: شکل را رسم می‌کنیم:

گام ۲: در مثلث‌های سایه خورده دو ضلع برابر وجود دارد و $\alpha>\beta$ می‌باشد، بنابر قضیه‌ی لولا داریم: $AB>AD$.

۲۰ داخل ریاضی ۹۵ | پاسخ: ۱

در مثلث ABC، زاویه‌ی $\hat{A} > \hat{C}$، نیمساز زاویه‌ی B و عمودمنصف ضلع AB در نقطه‌ی D متقاطع‌اند. M و N پای عمودهایی است که از نقطه‌ی D به‌ترتیب بر BA و BC رسم شده‌اند. کدام نابرابری درست است؟

۱) NC > NB ۲) NC < NB ۳) DA > DC ۴) AM < BN



گام ۱: می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است، بنابراین DM = DN.

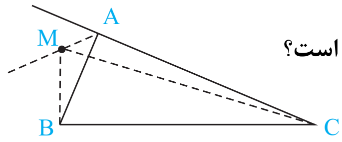
گام ۲: دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی BDN و BDM همنهشت هستند، درنتیجه BM = BN = x.

گام ۳: چون MD عمودمنصف است، نقطه‌ی M وسط ضلع AB است، پس MA = x.

گام ۴: با فرض NC = y داریم: $\hat{A} > \hat{C} \Rightarrow BC > AB \Rightarrow x+y > x+x \Rightarrow y > x \Rightarrow NC > NB$

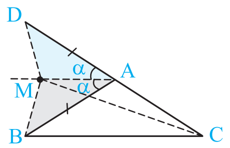
۲۱ خارج ریاضی ۹۴ | پاسخ: ۱

در شکل روبه‌رو، نقطه‌ی M روی نیمساز خارجی زاویه‌ی A است. نسبت $\dfrac{MB+MC}{AB+AC}$ چگونه است؟



۱) بزرگ‌تر از ۱ ۲) کم‌تر از ۱

۳) برابر با ۱ ۴) غیرمشخص



گام ۱: روی ادامه‌ی پاره‌خط AC پاره‌خط AD را به اندازه‌ی AB جدا می‌کنیم.

گام ۲: مثلث‌های رنگ شده به حالت ض‌زض همنهشت هستند، بنابراین MB = MD

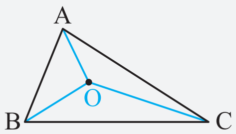
گام ۳: در مثلث MDC با توجه به نامساوی مثلث داریم: MD + MC > DC

گام ۴: چون MB = MD و هم‌چنین AD = AB است داریم: MB + MC > AB + AC بنابراین صورت کسر از مخرج کسر بزرگ‌تر است یعنی نسبت بزرگ‌تر از «۱» است.

۶ نامساوی‌های درگیر با محیط

① در مثلث ABC، اگر نقطه‌ی O درون مثلث باشد، آن‌گاه مجموع فواصل نقطه‌ی O از سه رأس مثلث، بین نصف محیط و محیط قرار دارد:

$$\frac{۱}{۲}(\text{محیط}) < OA + OB + OC < \text{محیط}$$



② در هر مثلث، مجموع اندازه‌های سه میانه از $\frac{۳}{۴}$ محیط بزرگ‌تر و از محیط کوچک‌تر است:

$$\frac{۳}{۴}(\text{محیط}) < m_a + m_b + m_c < \text{محیط}$$

۲۲ خارج ریاضی ۸۷ | پاسخ: ۳

در مثلثی به طول اضلاع ۳، $۳-\sqrt{۲}$ و $۲+\sqrt{۲}$ واحد، نقطه‌ی M داخل مثلث تغییر مکان می‌دهد. کدام عدد برای مجموع فواصل نقطه‌ی M از سه رأس مثلث، مورد قبول است؟

۱) $۵-\sqrt{۲}$ ۲) ۴ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) ۸

گام ۱: ابتدا محیط را حساب می‌کنیم: $۲P = (۲+\sqrt{۲}) + (۳-\sqrt{۲}) + ۳ = ۸$

گام ۲: می‌دانیم مجموع فواصل نقطه‌ی M از سه رأس، بین $\frac{۱}{۲}$ محیط و محیط است:

$$\frac{۸}{۲} < \underbrace{MA + MB + MC}_{x} < ۸ \Rightarrow ۴ < x < ۸$$

۲۳ خارج ریاضی ۸۹ | پاسخ: ۳

در مثلثی به اندازه‌ی اضلاع $a \geq ۸$، ۷ و ۵ کدام عدد برای مجموع اندازه‌های سه میانه، مورد قبول است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۹ ۴) ۲۴

گام ۱: با توجه به نامساوی مثلث داریم: $۷-۵ < a < ۷+۵$

گام ۲: با توجه به فرض که $a \geq ۸$ است، بنابراین: $۸ \leq a < ۱۲$

گام ۳: حداقل و حداکثر محیط به‌صورت مقابل است: $\underbrace{۵+۷+۸}_{۲۰} \leq \text{محیط} < \underbrace{۵+۷+۱۲}_{۲۴}$

گام ۴: چون مجموع سه میانه در بازه‌ی «$\text{محیط} > m_a + m_b + m_c > (\text{محیط})\frac{۳}{۴}$» می‌باشد، داریم:

① $\text{محیط} = ۲۰ \Rightarrow ۱۵ < m_a + m_b + m_c < ۲۰$

② $\text{محیط} = ۲۴ \Rightarrow ۱۸ < m_a + m_b + m_c < ۲۴$

$\Rightarrow ۱۸ < m_a + m_b + m_c < ۲۰$

۷ رسم مثلث

۱) با معلوماتی که دو مثلث با هم همنهشت می‌شوند (ض‌ض‌ض، زض‌ز، ض‌زض) تنها یک مثلث قابل رسم است (در حالت ض‌ض‌ض باید اضلاع در نامساوی مثلث صادق باشند.).

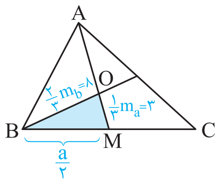
۲) اگر در مثلثی دو ضلع و یک میانه یا یک ضلع و دو میانه داده شده بود، برای رسم، ابتدا یک شکل فرضی در نظر می‌گیریم، سپس یک مثلث درون مثلث اصلی به‌دست می‌آوریم که سه ضلع آن معلوم باشد و نامساوی مثلث را برای آن کنترل می‌کنیم.

تذکر: در حالتی که دو ضلع و میانه‌ی وارد بر ضلع سوم داده شده بود، باید میانه را به اندازه‌ی خودش امتداد دهیم و به یکی از رأس‌ها وصل کنیم.

۲۴ **مثلثی با معلوم بودن دو میانه‌ی $m_a = 9$، $m_b = 12$ و ضلع a قابل رسم است. اندازه‌ی ضلع a کدام عدد می‌تواند باشد؟**

داخل ریاضی ۸۴ | پاسخ: ۳

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۶ ۴) ۲۲



گام ۱: شکل فرضی رسم کرده و مثلثی درون آن با سه ضلع معلوم پیدا می‌کنیم:

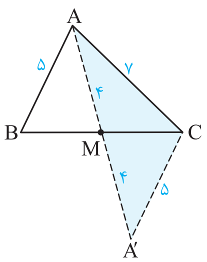
گام ۲: مثلث ABC در صورتی قابل رسم است که OMB قابل رسم باشد، یعنی:

$$8 - 3 < \frac{a}{2} < 8 + 3 \Rightarrow 10 < a < 22$$

۲۵ **در رسم مثلث ABC با معلوم بودن دو ضلع $b = 7$، $c = 5$ و میانه‌ی $m_a = 4$ با خط‌کش و پرگار کدام نتیجه حاصل می‌شود؟**

داخل ریاضی ۸۳ | پاسخ: ۲

۱) غیرقابل رسم ۲) جواب منحصر به فرد ۳) دو جواب متمایز ۴) فاقد جواب



گام ۱: چون دو ضلع و میانه‌ی وارد بر ضلع سوم داده شده است، میانه را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم و به رأس C وصل می‌کنیم:

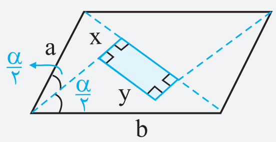
گام ۲: مثلث ABC در صورتی قابل رسم است که مثلث $AA'C$ قابل رسم باشد، چون $5 + 7 > 8$ می‌باشد، مثلث $AA'C$ قابل رسم است و چون معلومات داده شده ض‌ض‌ض است، تنها یک مثلث قابل رسم می‌باشد.

۸ نیمسازهای متوازی‌الاضلاع و مستطیل

۱) از برخورد نیمسازهای داخلی هر متوازی‌الاضلاع به اضلاع a و b و زاویه‌ی α یک مستطیل به وجود می‌آید که اندازه‌ی اضلاع آن برابر است با:

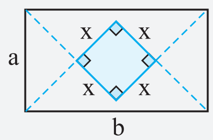
$$x = |a - b| \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$y = |a - b| \cos\frac{\alpha}{2}$$



۲) از برخورد نیمسازهای داخلی هر مستطیل یک مربع به وجود می‌آید که طول اضلاع آن برابر است با:

$$x = \frac{|a - b|}{\sqrt{2}}$$



تذکر: اگر نیمسازها خارجی باشد، به جای $a - b$ باید $a + b$ را در رابطه‌ها قرار دهیم.

۲۶ **در یک متوازی‌الاضلاع با زاویه‌ی ۶۰ درجه و اندازه‌ی اضلاع a و ۲a، محل تلاقی نیمسازهای داخلی، رأس‌های یک چهارضلعی است. مساحت چهارضلعی حاصل چند برابر $a^2\sqrt{3}$ است؟**

داخل ریاضی ۹۰ | پاسخ: ۳

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

گام ۱: می‌دانیم چهارضلعی حاصل مستطیل است، بنابراین ابتدا طول و عرض آن را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x = (2a - a)\sin 30^\circ = \frac{a}{2} \\ y = (2a - a)\cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

گام ۲: مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = xy = \frac{a}{2} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

۲۷ در یک متوازی‌الاضلاع، طول اضلاع ۵ و ۹ واحد و یک زاویه‌ی آن ۶۰ درجه می‌باشد. مساحت چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

خارج ریاضی ۸۷ | پاسخ: ۲

۱) $۳\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $۶\sqrt{۲}$

گام ۱: ابتدا طول اضلاع مستطیل را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x = (۹-۵)\sin ۳۰^\circ = ۲ \\ y = (۹-۵)\cos ۳۰^\circ = ۲\sqrt{۳} \end{cases}$$

گام ۲: مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = xy = (۲)(۲\sqrt{۳}) = ۴\sqrt{۳}$$

۲۸ در مستطیلی به اندازه‌ی اضلاع ۴ و ۹ واحد، محل تلاقی نیمسازهای داخلی، رأس‌های یک چهارضلعی هستند. مساحت این چهارضلعی کدام است؟

خارج ریاضی ۹۰ | پاسخ: ۱

۱) ۱۲/۵ ۲) ۱۳/۵ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

گام ۱: می‌دانیم چهارضلعی حاصل، مربع است، بنابراین طول ضلع مربع را به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{۹-۴}{\sqrt{۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۲}}$$

گام ۲: مساحت مربع برابر است با:

$$S = x^۲ = \frac{۲۵}{۲} = ۱۲/۵$$

۲۹ در مستطیلی به ابعاد ۱۵ و ۸ واحد، از تقاطع نیمسازهای داخلی آن یک چهارضلعی حاصل می‌شود. مساحت این چهارضلعی چند واحد مربع است؟

داخل ریاضی ۸۷ | پاسخ: ۲

۱) ۱۶ ۲) ۲۴/۵ ۳) ۲۸ ۴) ۳۲/۵

گام ۱: ابتدا طول ضلع مربع را حساب می‌کنیم:

$$x = \frac{۱۵-۸}{\sqrt{۲}} = \frac{۷}{\sqrt{۲}}$$

گام ۲: مساحت مربع برابر است با:

$$S = x^۲ = \frac{۴۹}{۲} = ۲۴/۵$$

۳۰ در یک مستطیل اندازه‌ی اضلاع ۵ و ۱۱ واحد است. مساحت چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخی این مستطیل، کدام است؟

خارج ریاضی ۹۳ | پاسخ: ۴

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

گام ۱: طول ضلع مربع برابر است با:

$$x = \frac{۱۱-۵}{\sqrt{۲}} = \frac{۶}{\sqrt{۲}}$$

گام ۲: مساحت مربع برابر است با:

$$S = x^۲ = \frac{۳۶}{۲} = ۱۸$$

۳۱ طول یک مستطیل دو برابر عرض آن است، نیمساز زاویه‌های مستطیل را رسم کرده‌ایم، محیط مستطیل چند برابر محیط مربع ایجاد شده در درون آن است؟

خارج ریاضی ۸۴ | پاسخ: ۱

۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

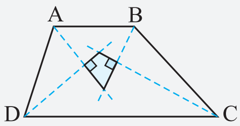
گام ۱: ابتدا طول ضلع مربع را حساب می‌کنیم:

$$x = \frac{۲a-a}{\sqrt{۲}} = \frac{a}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \text{محیط مربع} = ۴(\frac{a}{\sqrt{۲}}) = ۲\sqrt{۲}a$$

گام ۲: محیط مستطیل هم برابر است با $۲(۲a+a) = ۶a$. بنابراین نسبت محیط‌ها برابر است با:

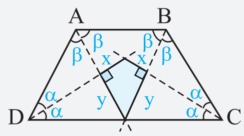
$$\frac{۶a}{۲\sqrt{۲}a} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

۹ نیمسازهای ذوزنقه



۱ از برخورد نیمسازهای داخلی هر ذوزنقه (و به‌طور کلی هر چهارضلعی محدب)، یک چهارضلعی محاطی به‌وجود می‌آید.

یادداشت: چهارضلعی محاطی، چهارضلعی است که از رأس‌های آن، یک دایره می‌گذرد. در این چهارضلعی‌ها، مجموع زوایای مقابل ۱۸۰° است.



۲ از برخورد نیمسازهای داخلی هر ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، یک چهارضلعی **محاطی** و **محیطی** (کایت) به‌وجود می‌آید.

یادداشت: چهارضلعی محیطی، چهارضلعی است که همه‌ی اضلاع آن بر یک دایره مماس است، در این چهارضلعی مجموع دو ضلع مقابل، با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر است.

۳۲ در یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، از برخورد نیمساز زاویه‌های داخلی، کدام چهارضلعی حاصل می‌شود؟

داخل ریاضی ۸۸ | پاسخ: ۴

۱) مستطیل ۲) لوزی ۳) متوازی‌الاضلاع ۴) محاطی

از برخورد نیمساز زاویه‌های داخلی ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، یک چهارضلعی محاطی و محیطی به وجود می‌آید که فقط در گزینه‌ها به محاطی اشاره شده است.

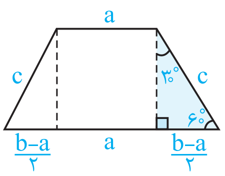
۳۳ در یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، یکی از زاویه‌ها 60° و اندازه‌ی قاعده‌ها ۶ و ۱۰ واحد است. مساحت چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی این ذوزنقه چند برابر $\frac{\sqrt{3}}{3}$ است؟

داخل ریاضی ۹۳ | پاسخ: ۴

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

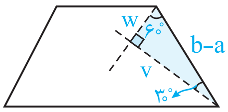
گام ۱: اگر اندازه‌ی قاعده‌ی کوچک را a و اندازه‌ی قاعده‌ی بزرگ را b فرض کنیم، آن‌گاه طول ساق در مثلث سایه‌خورده برابر است با:

$$\xRightarrow{\text{ضلع رو به زاویه‌ی } 30^\circ} c = 2\left(\frac{b-a}{2}\right) = b-a$$

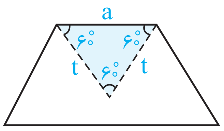


گام ۲: می‌دانیم نیمساز ذوزنقه‌ها با زاویه‌ی قائمه همدیگر را قطع می‌کنند، بنابراین:

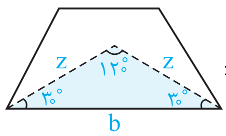
$$\Rightarrow \begin{cases} w = \dfrac{b-a}{2} \\ v = \dfrac{b-a}{2}\sqrt{3} \end{cases}$$



گام ۳: نیمساز رأس‌های بالا و پایین هرکدام یک مثلث متساوی‌الساقین می‌سازند که طول اضلاع آن‌ها برابر است با:

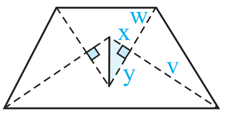


$$\Rightarrow t = a$$



$$\Rightarrow b = 2z\left(\sin\frac{120^\circ}{2}\right) = z\sqrt{3} \Rightarrow z = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

گام ۴: از برخورد نیمسازهای داخلی ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین یک کایت حاصل می‌شود که از دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی به هم چسبیده تشکیل شده است و اضلاع آن برابر است با:



$$\Rightarrow \begin{cases} x = z - v = \dfrac{b}{\sqrt{3}} - \dfrac{b-a}{2}\sqrt{3} = \dfrac{3a-b}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ y = t - w = a - \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{3a-b}{2} \end{cases}$$

گام ۵: مساحت چهارضلعی (کایت) حاصل، دو برابر مساحت هرکدام از مثلث‌های قائم‌الزاویه است:

$$\begin{cases} x = \dfrac{18-10}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ y = \dfrac{18-10}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow S_{\text{کایت}} = 16\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

حرف آخر: همان‌طور که دیدیم اگر یکی از زاویه‌ها 60° باشد، طول اضلاع چهارضلعی حاصل $\frac{3a-b}{2}$ و $\frac{3a-b}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$ به‌دست آمد که البته می‌توان آن‌ها را به‌صورت زیر هم فرض کرد:

$$\begin{cases} x = (\text{میانگین طول ساق‌ها} - \text{میانگین طول قاعده‌ها}) \times \dfrac{1}{2\sin 60^\circ} \\ y = (\text{میانگین طول ساق‌ها} - \text{میانگین طول قاعده‌ها}) \end{cases}$$

در حالت کلی‌تر اگر به جای زاویه‌ی 60° زاویه را α فرض کنیم، مساحت کایت از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$S = (\text{میانگین طول ساق‌ها} - \text{میانگین طول قاعده‌ها})^2 \times \frac{1}{2\sin\alpha}$$

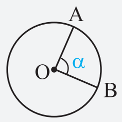
دایـــــره

CIRCLE

فـصل دوم

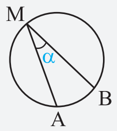
فصل دوم هندسه ۲ مربوط به دایره است که معمولاً ۱ یا ۲ سؤال در کنکور از این فصل مطرح می‌شود، که اکثراً مربوط به روابط طولی یا زاویه‌ها در دایره می‌باشد که در بعضی موارد با تشابه در هندسه ۱ نیز ترکیب می‌شود. از وضعیت دو دایره یا کمان درخور نیز هر چند سال یکبار سؤال مطرح می‌شود.

۱ زاویه‌های نام‌دار در دایره



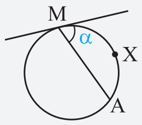
❶ *زاویه‌ی مرکزی:* رأس آن، مرکز دایره و اضلاع آن شعاع‌های دایره هستند. اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی برابر با اندازه‌ی کمان روبه‌روی آن است:

$$\alpha = \overset{\frown}{AB}$$



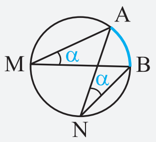
❷ *زاویه‌ی محاطی:* رأس آن روی محیط دایره و اضلاع آن وترهایی از دایره هستند. اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی نصف کمان روبه‌روی آن است:

$$\alpha = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}$$



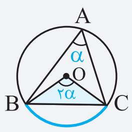
❸ *زاویه‌ی ظلی:* رأس زاویه‌ی ظلی روی محیط دایره قرار دارد و یک ضلع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر آن وتری از دایره است. اندازه‌ی زاویه‌ی ظلی نصف کمان روبه‌روی آن است:

$$\alpha = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{MXA}$$



دو نکته‌ی کاربردی

① اگر دو زاویه‌ی محاطی رو به یک کمان باشند، با هم برابرند.

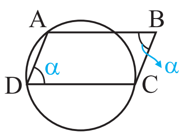


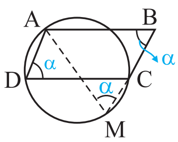
② اگر زاویه‌ی مرکزی و محاطی رو به یک کمان باشند، اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی دو برابر اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی است.

۱ در متوازی‌الاضلاع ABCD ، دایره‌ی محیطی مثلث ACD امتداد ضلع BC را در نقطه‌ی M قطع کرده است، مثلث ABM کدام نوع است؟

داخل ریاضی ۸۴ | پاسخ: ۲

۱) متشابه ACD ۲) متساوی‌الساقین ۳) متساوی‌الاضلاع ۴) قائم‌الزاویه



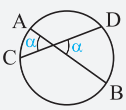


گام۱: متوازی‌الاضلاع را طوری رسم می‌کنیم که دایره از رأس‌های A، C و D عبور کند:

گام۲: ضلع BC را امتداد می‌دهیم و از محل تقاطع آن با دایره به رأس A وصل می‌کنیم. زاویه‌های M و D محاطی و رو به کمان $\overset{\frown}{AC}$ هستند، بنابراین با هم برابرند.

گام۳: بنابراین مثلث ABM با دو زاویه‌ی برابر، متساوی‌الساقین است.

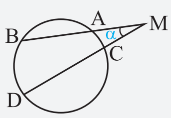
۲ زاویه‌ی بین دو وتر و امتداد دو وتر



❶ *زاویه‌ی بین دو وتر:* اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو وتر برابر با نصف مجموع کمان‌های مقابل است:

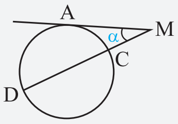
$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{۲}$$

❷ *زاویه‌ی بین امتداد دو وتر:* اندازه‌ی زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره پدید می‌آید، برابر قدرمطلق نصف تفاضل اندازه‌ی کمان‌های مقابل به زاویه است:



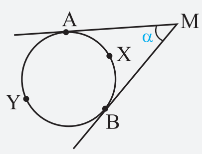
$$\alpha = \frac{|\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}|}{۲}$$

دو حالت خاص:



① اگر یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کنیم، باز هم زاویه از رابطه‌ی فوق به‌دست می‌آید:

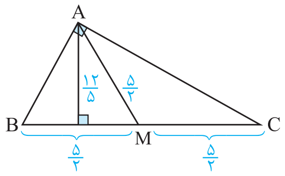
$$\alpha = \frac{|\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{AC}|}{۲}$$



② اگر دو مماس بر دایره رسم کنیم، باز هم زاویه از همان رابطه به‌دست می‌آید:

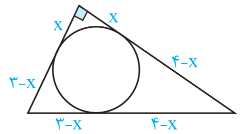
$$\alpha = \frac{|\overset{\frown}{AYB} - \overset{\frown}{AXB}|}{۲}$$

۵ ۱ کوتاه‌ترین میانه و ارتفاع همان میانه و ارتفاع وارد بر وتر هستند و به وسیله‌ی آن‌ها می‌توان هر سه ضلع مثلث را محاسبه کرد. اعداد داده شده را به صورت کسری در می‌آوریم و محاسبات را انجام می‌دهیم:



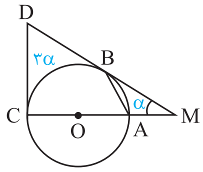
$$\begin{cases} b^۲+c^۲=۲۵ \\ bc=\frac{۱۲}{۵}\times ۵=۱۲ \end{cases} \Rightarrow b=۳ \text{ ، } c=۴$$

حال داریم:



$$(۳-x)+(۴-x)=۵ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow \frac{x}{۴-x}=\frac{۱}{۳}$$

۶ ۴ چون نقاط A و C نزدیک‌ترین و دورترین نقاط دایره تا نقطه‌ی M هستند، بنابراین AC باید قطر دایره باشد، حال با فرض $\widehat{M}=\alpha$ داریم:



$$\alpha=\frac{۳\alpha-\widehat{AB}}{۲} \Rightarrow \widehat{AB}=\alpha \Rightarrow \alpha+۳\alpha=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha=۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{D}=\frac{۵\alpha-۳\alpha}{۲}=\alpha=۴۵^\circ$$

۷ ۱

$$T(x،y)=(۱،-۴) \Rightarrow^{(-۲)\times} \begin{cases} ۲x+y=۱ \\ x+۲y=-۴ \end{cases} \Rightarrow -۳x=-۶ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow y=-۳ \Rightarrow A(۲،-۳)$$

$$R(x،y)=(-y،x) \Rightarrow R(۲،-۳)=(۳،۲)$$

۸ ۲

$$T(x،y)=(x+y،x-y)=(x'،y') \Rightarrow \begin{cases} x+y=x' \\ x-y=y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{x'+y'}{۲} \\ y=\frac{x'-y'}{۲} \end{cases} \Rightarrow ۲(\frac{x'+y'}{۲})+۳(\frac{x'-y'}{۲})=۶$$

$$\Rightarrow ۵x'-y'=۱۲ \xRightarrow{A(۱،a)} ۵-a=۱۲ \Rightarrow a=-۷$$

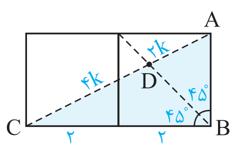
۹ ۱ تالس در فضا برقرار است (و عکس آن نع!!!) بنابراین:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'} \Rightarrow \frac{۲}{۷}=\frac{A'B'}{۱۴} \Rightarrow A'B'=۴ \Rightarrow A'C'=۴+۱۴=۱۸$$

۱۰ ۴ چون صفحه، شامل عمود مشترک دو خط است، پس با آن‌ها موازی هم هست و تصویر دو خط متنافر در صفحه‌ای موازی عمود مشترک، دو خط موازی است.

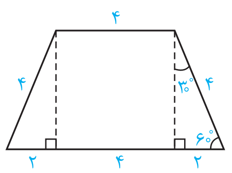
آزمون ۳ پاسخ آزمون جامع

۱ ۱ در مثلث ABC، پاره‌خط BD نیمساز است. پس داریم:



$$AC=\sqrt{۴+۱۶}=۲\sqrt{۵} \Rightarrow ۲k+۴k=۲\sqrt{۵} \Rightarrow k=\frac{\sqrt{۵}}{۳} \Rightarrow AD=\frac{۲\sqrt{۵}}{۳}$$

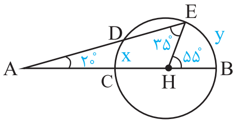
۲ ۳ اگر طول اضلاع کایت حاصل از برخورد نیمسازها را x و y فرض کنیم، آن‌گاه:



$$x=(\text{میانگین قاعده‌ها} - \text{میانگین ساق‌ها})=(۶-۴)=۲$$

$$y=(\text{میانگین قاعده‌ها} - \text{میانگین ساق‌ها})\times\frac{۱}{۲\sin ۶۰^\circ}=(۶-۴)\times\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

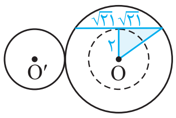
$$\begin{cases} S=xy=\frac{۴}{\sqrt{۳}} \\ P=۲(x+y)=۴(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۳}) \end{cases} \Rightarrow \frac{S}{P}=\frac{\frac{۴}{\sqrt{۳}}}{۴(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۳})}=\frac{(\sqrt{۳}-۱)}{۲}$$



۳ | **۱**

زاویه‌ی EHB، زاویه‌ی خارجی مثلث AEH است و $\widehat{A}$، زاویه‌ی بین امتداد دو وتر، بنابراین:

$$y = 55^\circ \Rightarrow 20^\circ = \frac{y-x}{2} \Rightarrow 40^\circ = 55^\circ - x \Rightarrow x = 15^\circ$$



۴ | **۴**

وترهای به طول $\sqrt{21}$ همگی بر دایره‌ای به شعاع ۲ و به مرکز O مماس‌اند. حال این دایره‌ی جدید و دایره‌ی به مرکز O′ چون متخارج‌اند، دارای ۴ مماس مشترک هستند.

۵ | **۴**

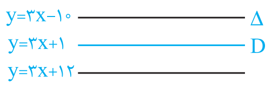
ابتدا مساحت مثلث ABC را به‌دست می‌آوریم:

$$S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|1(-1) - 2(4) + 1(7)\right| = 1 \Rightarrow S' = 2^2 \times 1 = 4$$

۶ | **۴**

ابتدا خط گذرا از نقاط A و B را می‌نویسیم:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-1}{3-2} = 3 \Rightarrow y-1 = 3(x-2) \Rightarrow y = 3x-5 \xrightarrow[y \to \frac{y}{2}]{x \to \frac{x}{2}} \frac{y}{2} = 3\left(\frac{x}{2}\right) - 5 \Rightarrow y = 3x - 10$$

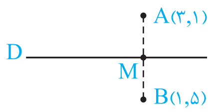


حال می خواهیم این خط را تحت بازتاب نسبت به خط $y = 3x + 1$ تصویر کنیم. اما اگر دقت کنیم می‌بینیم دو خط موازی هستند، بنابراین تصویر خط Δ تحت بازتاب نسبت به خط D، موازی آن خواهد بود، مثلاً به‌صورت $y = 3x + c$. حال داریم:

$$1 = \frac{-10 + c}{2} \Rightarrow c = 12 \Rightarrow y = 3x + 12 \Rightarrow$$ گزینه‌ی(۴)

۷ | **۱**

محور بازتاب عمود منصف پاره‌خط AB است. بنابراین



$$\begin{cases} M = \dfrac{A+B}{2} = (2,3) \\ M_{AB} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{5-1}{1-3} = -2 \Rightarrow m_D = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

حال این خط را تحت اثر تبدیل داده شده تصویر می‌کنیم:

$$T(x,y) = (y-2, x+1) = (x', y') \Rightarrow \begin{cases} y = x' + 2 \\ x = y' - 1 \end{cases} \Rightarrow x' + 2 = \frac{1}{2}(y'-1) + 1 \Rightarrow 2x' + 4 = y' - 1 + 2 \Rightarrow 2x' - y' + 3 = 0$$

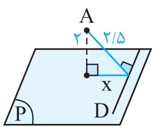
۸ | **۲**

اگر خط گذرا از A و B موازی خط Δ باشد، هر صفحه‌ای که بر خط Δ بگذرد، نقاط A و B از آن به یک فاصله‌اند.

۹ | **۴**

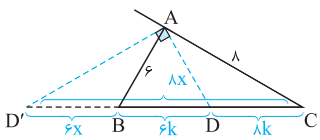
چون فقط یک صفحه شامل نقاط A و B و عمود بر صفحه‌ی P می‌گذرد، پس خط گذرا از A و B بر صفحه‌ی P عمود نیست ولی چون d بر صفحه‌ی P عمود است، بنابراین خط گذرا از A و B با d موازی نیست.

۱۰ | **۲**



$$x^2 + 2^2 = 2.5^2 \Rightarrow x^2 = 6.25 - 4 = 2.25 \Rightarrow x = 1.5$$

آزمون ۴ | پاسخ آزمون جامع

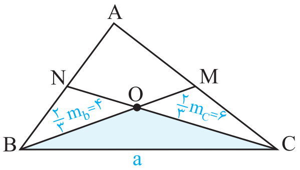


۱ | **۳**

می‌دانیم نیمسازهای داخلی و خارجی هر رأس بر هم عمودند، بنابراین مثلث ADD′ قائم‌الزاویه است، پس کوچک‌ترین میانه‌ی آن که میانه‌ی وارد بر وتر است، نصف وتر می‌باشد، یعنی نصف پاره‌خط DD′، بنابراین کافی است اندازه‌ی DD′ را پیدا کنیم:

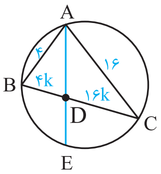
$$\begin{cases} 6k + 8k = 5 \Rightarrow k = \dfrac{5}{14} \\ 8x - 6x = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow DD' = 6k + 6x = \frac{15}{7} + 15 = \frac{120}{7} \Rightarrow \text{طول کوچک‌ترین میانه} = \frac{60}{7}$$

۲ ۲ ابتدا یک مثلث فرضی رسم می‌کنیم. می‌دانیم میانه‌ها همدیگر را به نسبت $\frac{۲}{۳}$ از رأس و $\frac{۱}{۳}$ از پای میانه قطع می‌کنند. حال در مثلث OBC داریم:



$$۶-۴<a<۶+۴ \Rightarrow ۲<a<۱۰ \Rightarrow \text{(۲) گزینه‌ی}$$

۳ ۱ نیمساز و عمودمنصف در نقطه‌ای واقع بر دایره‌ی محیطی همدیگر را قطع می‌کنند، بنابراین قطعه‌های ایجاد شده توسط نیمساز و همچنین طول نیمساز را پیدا می‌کنیم:



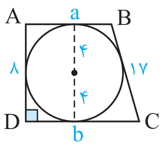
$$۴k+۱۶k=۱۶ \Rightarrow k=\frac{۴}{۵}$$

$$AD^۲=۴\times۱۶-۴k\times۱۶k=۶۴(۱-k^۲)=۶۴(۱-\frac{۱۶}{۲۵})=۶۴\times\frac{۹}{۲۵} \Rightarrow AD=\frac{۲۴}{۵}$$

حال براساس روابط طولی در دایره داریم:

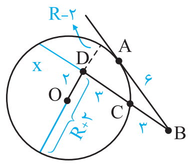
$$AD.DE=BD.DC \Rightarrow \frac{\cancel{۲۴}^{\,۳}}{\cancel{۵}}\times DE=\frac{\cancel{۱۶}^{\,۲}}{\cancel{۵}}\times\frac{۶۴}{۵} \Rightarrow DE=\frac{۱۲۸}{۱۵}$$

۴ ۴ اگر طول قاعده‌های ذوزنقه را a و b فرض کنیم، چون بر دایره محیط شده است، باید مجموع اضلاع مقابل آن برابر باشد، بنابراین:



$$a+b=۸+۱۷=۲۵ \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}(a+b)\times h=\frac{۱}{۲}(۲۵)\times۸=۱۰۰$$

۵ ۳ پاره‌خط‌های OD و DC را امتداد می‌دهیم:



$$۶^۲=۳(۶+x) \Rightarrow x=۶$$

$$(R-۲)(R+۲)=۳\times۶ \Rightarrow R^۲-۴=۱۸ \Rightarrow R=\sqrt{۲۲}$$

۶ ۳ ابتدا معادله‌ی خط گذرا از A و B را می‌نویسیم:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۴-۰}{۱-۲}=-۴ \Rightarrow y-۰=-۴(x-۲) \Rightarrow y=-۴x+۸$$

حال در معادله‌ی این خط، $x \to -۴-x$ و $y \to ۲-y$ تبدیل می‌کنیم:

$$۲-y=-۴(-۴-x)+۸ \Rightarrow ۲-y=۱۶+۴x+۸ \Rightarrow y+۴x=-۲۲ \xrightarrow{x=۰} y=-۲۲$$

۷ ۲ ابتدا $x \to ۶-x$ و $y \to ۲-y$ تبدیل می‌کنیم:

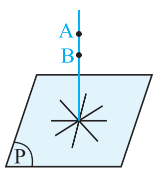
$$\Delta : ۲(۶-x)-(۲-y)=۵ \Rightarrow -۲x+y=-۵$$

حال خط Δ را ۹۰° دوران می‌دهیم:

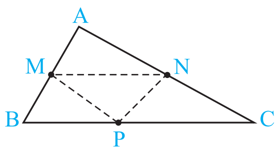
$$R(x,y)=(-y,x)=(x',y') \Rightarrow \begin{cases} y=-x' \\ x=y' \end{cases} \Rightarrow -۲y'-x'=-۵ \Rightarrow x'+۲y'=۵$$

این خط تحت بازتاب نسبت به خط $۲x=y$ بر خودش نگاشته می‌شود، چون بر هم عمود هستند.

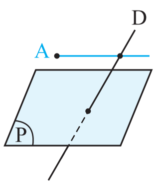
۸ ۳ چون بی‌شمار صفحه‌ی گذرا از نقاط A و B و عمود بر صفحه‌ی P موجود است، پس خط گذرا از A و B بر صفحه‌ی P عمود می‌باشد. بنابراین بر تمام خط‌های صفحه‌ی P عمود است.



۹ ۳ چهار صفحه وجود دارد، یکی از نقطه‌ی D به موازات صفحه رسم می‌شود و سه تای دیگر از نقاط D و نقاط وسط اضلاع می‌گذرند، مثلاً یکی از صفحات از نقاط D، M، N و ...



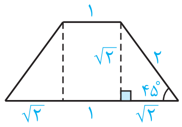
۱۰ ۲ تنها یک خط وجود دارد.



آزمون ۵ — پاسخ آزمون جامع

۱ ۴

این چهارضلعی یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین است که از برخورد نیمسازهای داخلی آن یک کایت حاصل می‌شود و مساحت این کایت برابر است با:

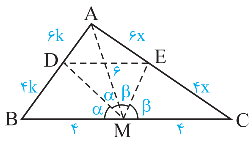


$$S_{\text{کایت}} = (\text{میانگین ساق‌ها} - \text{میانگین قاعده‌ها})^۲ \times \frac{۱}{۲\sin\alpha} = (\sqrt{۲} + ۱ - ۲)^۲ \times \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$= \frac{(\sqrt{۲} - ۱)^۲}{\sqrt{۲}} = \frac{۳ - ۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۳\sqrt{۲} - ۴}{۲} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} - ۲$$

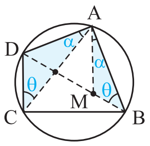
۲ ۳

نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع کناری تقسیم می‌کند:



$$\frac{۶k}{۴k} = \frac{۶x}{۴x} \Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{۶x}{۱۰x} \Rightarrow \frac{DE}{۸} = \frac{۶}{۱۰} \Rightarrow DE = ۴/۸$$

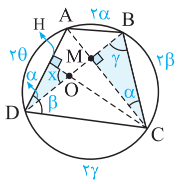
۳ ۱



$$\overset{\Delta}{AMB} \sim \overset{\Delta}{ADC} \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AD \times AB = ۴ \times ۳ = ۱۲$$

۴ ۳

کمان‌های ایجاد شده روی دایره را با ۲α و ۲β و ... نشان می‌دهیم:



$$\begin{cases} \overset{\Delta}{DOH} : x + \alpha = ۹۰^\circ \\ \overset{\Delta}{MBC} : \alpha + \gamma = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \gamma = x \Rightarrow D\hat{O}H = D\hat{B}C$$

۵ ۱

$$\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA} \Rightarrow A' - O = ۳(A - O) \Rightarrow A' = ۳A - ۲O = (۳,۶) - (۶,-۲) = (-۳,۸)$$

$$R(x,y) = (-y,x) \Rightarrow R(-۳,۸) = (-۸,-۳)$$

۶ ۱

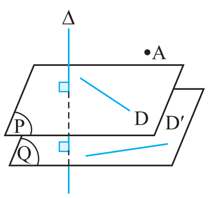
$$T(x,y) = (-y+۲, ۲x+۱) = (x', y') \Rightarrow \begin{cases} y = ۲ - x' \\ x = \dfrac{y' - ۱}{۲} \end{cases} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در خط}} ۲\left(\frac{y' - ۱}{۲}\right) - ۳(۲ - x') = a$$

$$\Rightarrow y' + ۳x' = a + ۷ \xrightarrow{A(۳,۱)} ۱ + ۳(۳) = a + ۷ \Rightarrow a = ۳$$

۷ ۳

چون تصاویر دو خط در صفحه‌ی P موازی و در صفحه‌ی Q متقاطع است، بنابراین Δ و D متنافرند. بنابراین تنها یک صفحه وجود دارد که شامل D و موازی Δ باشد.

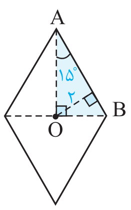
۸ ۳



خط Δ موازی عمودمشترک D و D' است. حال اگر نقطه‌ی A روی راستای عمودمشترک باشد یک خط از آن می‌گذرد که بر D و D' عمود بوده و آن‌ها را قطع کند که همان عمودمشترک است، ولی اگر نقطه‌ی A روی عمودمشترک نباشد، چنین خطی وجود ندارد.

آزمون ۶ — پاسخ آزمون جامع

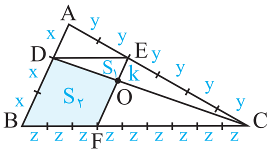
۱ ۱



در مثلث قائم‌الزاویه‌ی رنگ شده، یکی از زاویه‌ها ۱۵° است و فاصله‌ی محل تلاقی قطرها تا ضلع لوزی، همان ارتفاع این مثلث می‌باشد که برابر ربع وتر است، بنابراین $AB = ۸$ می‌باشد. حال در مثلث خواسته شده، اضلاع ۸ و ۸ و زاویه‌ی بین دو ضلع ۱۵۰° است، بنابراین مساحت قسمت رنگی برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۸ \times \sin ۱۵۰^\circ = ۱۶$$

۲ ۲



$$\frac{x}{۲x}=\frac{۲y}{۴y}\Rightarrow DE\parallel BC$$

$$\frac{۴y}{۲y}=\frac{۶z}{۳z}\Rightarrow EF\parallel AB\Rightarrow\begin{cases}\overset{\Delta}{CAD}:\frac{k}{x}=\frac{۴y}{۶y}\Rightarrow k=\frac{۲}{۳}x\\ \overset{\Delta}{CBD}:\frac{OF}{۲x}=\frac{۶z}{۹z}\Rightarrow OF=\frac{۴}{۳}x\Rightarrow OF=۲k\end{cases}$$

بنابراین: با توجه به این که چهارضلعی ODBF ذوزنقه است، داریم:

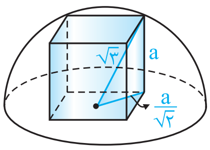
$$\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{\cancel{\frac{۱}{۲}}(\frac{۲}{۳}x)h}{\cancel{\frac{۱}{۲}}(\frac{۴}{۳}x+۲x)\times h}=\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۱۰}{۳}}=۰/۲$$

از طرف دیگر، نسبت مساحت متوازی‌الاضلاع DEFB به مساحت مثلث برابر است با:

$$\frac{S_۱+S_۲}{S}=\frac{(۲x)(۳z)\sin\hat{B}}{\frac{۱}{۲}(۳x)(۹z)\sin\hat{B}}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow\frac{۰/۲S_۲+S_۲}{S}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow\frac{۱/۲S_۲}{S}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow\frac{\cancel{۶}^{۳}S_۲}{۵S}=\frac{\cancel{۴}^{۲}}{۹}\Rightarrow\frac{S}{S_۲}=۲/۷$$

---

۳ ۳



$$a^۲+\frac{a^۲}{۲}=۳\Rightarrow\frac{۳a^۲}{۲}=۳\Rightarrow a^۲=۲\Rightarrow a=\sqrt{۲}$$

و اما قطر مکعب برابر است با:

$$d=\sqrt{۳}a=\sqrt{۳}\times\sqrt{۲}=\sqrt{۶}$$

---

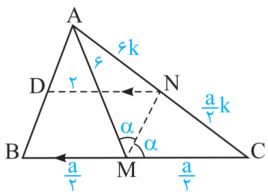
۴ ۴

این چهارضلعی، متوازی‌الاضلاعی با یک زاویه‌ی ۴۵° است. اگر ضلع مربع را a فرض کنیم، آن‌گاه اضلاع مستطیل حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی برابر است با:

$$\begin{cases}x=(۲a-a)\sin ۲۲/۵^\circ\\ y=(۲a-a)\cos ۲۲/۵^\circ\end{cases}\Rightarrow S=xy=a^۲\sin ۲۲/۵^\circ\cos ۲۲/۵^\circ=\frac{۱}{۲}a^۲\sin ۴۵^\circ=\sqrt{۲}\Rightarrow a^۲=۴\Rightarrow S_\Delta=\frac{۱}{۲}a^۲=۲$$

---

۵ ۱

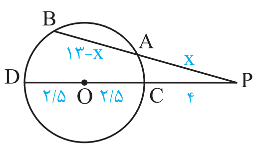


$$\frac{۲}{a}=\frac{۶k}{۶k+\frac{a}{۲}k}\Rightarrow\frac{۲}{a}=\frac{۶}{۶+\frac{a}{۲}}$$

$$\Rightarrow ۱۲+a=۶a\Rightarrow a=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$

---

۶ ۲



$$PA\times PB=PC\times PD\Rightarrow(۱۳-x)x=۴\times ۹$$

$$\Rightarrow x^۲-۱۳x+۳۶=۰\Rightarrow(x-۴)(x-۹)=۰\Rightarrow x=۴ \text{ یا } ۹$$

اما چون AB وتر دایره است، بنابراین باید از قطر کوچک‌تر باشد، یعنی فقط $AB=۴$ قابل قبول است.

---

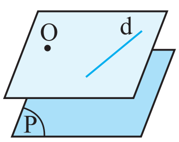
۷ ۴

برای این‌که تبدیل، ایزومتری باشد، باید $a=\pm۱$ باشد. اما به‌ازای $a=-۱$، تبدیل شیب را ثابت نگه نمی‌دارد، بنابراین $a=۱$ می‌باشد. حال:

$$D(x,y)=(۲-y,x-۱)=(x',y')\Rightarrow\begin{cases}y=۲-x'\\ x=y'+۱\end{cases}\Rightarrow ۲(y'+۱)-۳(۲-x')=۴\Rightarrow ۲y'+۳x'=۸$$

---

۸ ۴



اگر خط d و نقطه‌ی O در صفحه‌ای موازی P باشند، هر خط که از O بگذرد و d را قطع کند، موازی صفحه‌ی P خواهد بود.