

Maryam Mirzakhani
May 3, 1977 - July 14, 2017

Professor of Mathematics at
Stanford University



تقدیم به همه فرزندان افتخارآفرین ایران

به مناسبت تقارن زمانی تدوین این کتاب با ضایعه درگذشت پروفسور مریم میرزاخانی بر آن شدیم تا برای آدای احترام، مختصری از افتخارات این نابغه بزرگ را برای شما بیان کنیم:

مریم میرزاخانی اولین دختری بود که به تیم المپیاد ریاضی ایران راه یافت و همچنین اولین دختری بود که در المپیاد ریاضی ایران، مدال طلا گرفت. وی اولین کسی بود که دو سال متوالی مدال طلا کسب کرد و اولین فردی بود که در آزمون المپیاد ریاضی نمره کامل گرفت. او دوره لیسانس و فوق لیسانس ریاضی را در دانشگاه صنعتی شریف سپری کرد و بعد از آن، با دریافت بورسیه از طرف دانشگاه هاروارد به آنجا رفت و دوره دکتری خود را در آن دانشگاه پشت سر گذاشت. مریم در سال ۲۰۰۴ با اخذ مدرک دکترا از دانشگاه هاروارد به سرپرستی کورتیس مکمولن، از برندگان جایزه فیلدز فارغ‌التحصیل شد، در دانشگاه‌های پرینستون و استنفورد به تدریس مشغول شد. یک سال بعد، در سال ۲۰۰۵ نشریه پاپیولار ساینس آمریکا، او را به عنوان یکی از ده دهن جوان جهان برگزید و تجلیل کرد.

او مدتی در پرینستون درس می‌داد ولی بعد به استنفورد رفت و کار تدریس و پژوهش را در آنجا پی گرفت. مریم در شهریور ۱۳۸۷ و در ۳۱ سالگی به درجه استادی این دانشگاه رسید.

مریم میرزاخانی، نخستین بانوی ریاضی‌دان تاریخ لقب گرفته که توانسته است مدال فیلدز را دریافت کند. این مدال معتبرترین جایزه دنیای ریاضیات است و به دانشمندان برگزیده زیر ۴۰ سال اهدا می‌شود. متاسفانه، پروفسور مریم میرزاخانی در تاریخ ۲۴ تیرماه ۱۳۹۶، در ۴۰ سالگی جان به جان آفرین تسلیم کرد و در میان بهت همگان، وجودش از جهان دریغ شد.



مقدمه مدیر شورای تألیف مهروماه

بیا تا گل برافشانیم و می در ساغر اندازیم

فلک را سقف بشکافیم و طرحی نو دراندازیم

«حضرت حافظ»

دانش‌آموزان عزیز! فرزندان دلبندم!

انتشارات مهروماه وارد مرحله جدیدی از فعالیت‌های آموزشی خود شده است. هم‌زمان با تحول اساسی در سیستم آموزش کشور و ایجاد تغییرات بنیادین در کتاب‌های درسی، جمعی از بهترین اساتید و مؤلفین توانمند کشور در «مهروماه» گرد هم آمده‌اند تا برای شما کتاب‌هایی را به رشته تحریر درآورند که از خواندن آن‌ها لذت برده و دوستشان داشته باشید. کتاب‌هایی که در شکوفایی توانمندی‌های شما عزیزان دلبندم، جداً اثرگذار باشند. اساتید و مؤلفانی که در کتاب‌های جدید مهروماه (دهم، یازدهم و سال آینده، دوازدهم) دست به قلم شدند، علاوه بر برخورداری از تمام ویژگی‌های یک مؤلف آموزشی خوب مانند سواد علمی بالا، تجربه کافی در تدریس، تألیف و ...، یک ویژگی دیگر هم دارند؛ ویژگی که شاید محور زندگی اینجانب و رکن اساسی تمام فعالیت‌های آموزشی مهروماه را تشکیل می‌دهد: عشق به فرزندانمان. ما این مهر و عشق را با هیچ مبلغ و ثروتی عوض نمی‌کنیم، حتی اگر آن مبلغ در حد عدد آووگادرو باشد!

فرزندان همچون ماه من!

برای این‌که کتاب‌های مهروماه در این دوره جدید، بیش‌ترین کارایی آموزشی را در جهت موفقیت شما داشته باشند، تدابیر فراوانی اندیشیدیم: شورای تألیف تشکیل دادیم، کارآمدترین مدیران آموزشی و مؤلفان برجسته را گرد هم آوردیم، کتاب‌ها براساس شیوه‌نامه‌هایی متکی بر چند دهه تجربه موفق نگاشته شدند، چندین لایه ویراستار (از دانشجویان فرهیخته و نابغه گرفته تا اساتید بنام کشور) به کار گرفتیم تا از غلط‌های تایپی، سهوی و ... اثری باقی نماند.

گروه‌های تولید و هنری مهروماه نیز با هدایت مستقیم مدیر فرزانه مهروماه، جناب احمد اختیاری، سنگ تمام گذاشتند تا کتاب‌هایی تولید شوند همچون ما! کتاب‌هایی که برازنده نام وزین «مهروماه» اند. شاید مناسب باشد که تعدادی از مهم‌ترین انواع کتاب‌های کمک آموزشی مهروماه را برای شما معرفی کنم:

۱ کتاب‌های آموزش و کار: در این کتاب در مورد هر مبحثی که در مدرسه توسط دبیر محترم تدریس می‌شود یا خودتان از کتاب درسی مطالعه می‌کنید، ابتدا آموزش مختصر و مفید و البته کاملی از آن مبحث داده شده و سپس، تمرین‌هایی ارائه شده که با حل آن‌ها می‌توانید تمام قسمت‌های تدریس شده یا مطالعه شده از کتاب درسی را، به خوبی فرا گرفته تا بر کتاب درسی با تمام جزئیات آن، مسلط شوید.

۲ کتاب‌های تست: در این کتاب‌ها، برای هر مبحث معین، ابتدا درس‌نامه‌ای جذاب و سپس تست‌های مربوط به آن مبحث ارائه شده است.

درس‌نامه‌ها شامل مفاهیم و مطالب اصلی و بنیادی بوده و به نکات حاشیه‌ای که دور از موضوع محوری و اصلی‌اند، پرداخته نشده است. از طرفی، ضمن ارائه پاسخ تشریحی تست‌ها، برخی از نکات ویژه تستی در قالب «راهنمای آموزشی» بسیار کاربردی و منحصر به فرد آورده شده است. همین‌طور، در برخی از کتاب‌های تست (مانند درس شیرین شیمی) در کنار پاسخ تشریحی تعدادی از تست‌ها، ایستگاه‌های «شارژینگ» آمده است تا دانش‌آموزان در موضوعات مورد نظر، خیلی خوب شارژ شوند.

با حل تست‌های این کتاب‌ها و مطالعه پاسخ‌های کاملاً تشریحی آن‌ها و نیز درس‌نامه‌ها، راهنماها و شارژینگ‌ها، موفقیت در کنکور امری طبیعی و آسان خواهد بود.

۳ **کتاب‌های آموزش:** ویژگی اساسی این کتاب‌ها، ارائه آموزش کامل درس و مفاهیم و همین‌طور، پرسش‌هایی است که دانش‌آموزان با حل آن‌ها، در امتحانات مدرسه با قطعیت به نمره ۲۰ رسیده و از طرفی، پایه آموزشی لازم برای حمله به تست‌ها را پیدا خواهند کرد.

ضمناً، در این کتاب‌ها، ضمن ارائه درس در هر مبحث، پرسش‌های جالبی از طرف سه دانش‌آموز به ترتیب قوی، متوسط و نسبتاً ضعیف پرسیده می‌شوند که پاسخ به این پرسش‌ها، مکمل خوبی برای درس‌های ارائه شده است.

۴ **کتاب‌های لقمه:** ابعاد این کتاب‌ها، کوچک بوده و بنابراین می‌توانند همانند تلفن همراه، همه جا همراهتان باشند. اندازه و فرم این کتاب‌ها و نیز مطالب تألیف‌شده در آن‌ها به گونه‌ای تنظیم شده‌اند که مطالعه این کتاب‌ها همه جا میسر است: در مترو و اتوبوس، توی هواپیما، توی رختخواب و حتی شاید زیر دوش حمام!

۵ **کتاب‌های امتحانوفن:** این کتاب برای هفته‌های آخر قبل از امتحان ترم و شب امتحان طراحی و تألیف شده است. یکی از ویژگی‌های این کتاب، مجهز بودن آن به خلاصه درس‌های «کپسولی» منحصربه‌فرد است. در مجموع ده‌سری امتحان بarmبندی شده استاندارد با رعایت تمام ضوابط آموزش و پرورش در آن ارائه شده و علاوه بر پاسخ‌های لازم برای گرفتن نمره کامل، توضیحات اضافی جهت شيرفهم شدن دانش‌آموزان نیز در کنار پاسخ‌ها آمده است.

غير از پنج نوع کتاب مذکور، انتشارات مهروماه، کتاب‌های دیگری هم برای نظام جدید آموزشی منتشر خواهد کرد که هر کدام به جای خود، مفید و دوست‌داشتنی هستند؛ از جمله سری کتاب‌های معجزه کنکور، کتاب‌های آزمون، کتاب‌های جمع‌بندی و کتاب‌های جامع کنکور. اطلاعات لازم در مورد تک‌تک این کتاب‌ها را می‌توانید از طریق سایت مهروماه به آدرس mehromah.ir به دست آورید.

با آرزوی توفیق روزافزون همه فرزندان میهنم

مدیر شورای تألیف مهروماه

محمدحسین انوشه

مقدمه



شازده کوچولو پرسید: تو کی هستی؟

روباه گفت: من روباه هستم.

شازده کوچولو بهش گفت: بیا با من بازی کن. من آنقدر غصه به دل دارم که نگوا!

روباه گفت: من نمیتونم با تو بازی کنم. منو اهلی نکردن!

شازده کوچولو گفت: ببخش! اما اهلی کردن یعنی چی؟

روباه گفت: اهلی کردن چیز بسیار فراموش شده‌ای است و معنی‌اش «ایجاد علاقه کردن» است.

متن بالا احساسی‌ترین بخش کتاب جاودانه «شازده کوچولو» اثر آنتوان دو سنت اگزوپری است.

نویسنده توی این قسمت از داستان میخواد بگه برای نگه داشتن هر چیزی باید اون رو اهلی کنید، یعنی براش

زمان رو که بزرگترین سرمایه زندگیتونه، خرج کنید.

یعنی اگه میخوای به ریاضی علاقه مند بشی و توی این درس موفق باشی، باید برای ریاضی، وقت بذاری.

باید اینقدر تمرین کنی و مسئله حل کنی تا ریاضی رو اهلی کنی.

ما توی این کتاب سعی کردیم کارت رو آسون کنیم. بهترین و مهم‌ترین سؤال‌های کتاب درسی رو برات آوردیم

تا با کمترین زمان به بهترین نتیجه برسی!

چندتا از ویژگی‌های این کتاب رو براتون می‌گم:

۱ هر فصل از کتاب درسی رو براتون به چند قسمت تقسیم کردیم تا متناسب با جلسه‌های تدریس معلم محترمتون بشه.

۲ اول هر فصل یه درخت دانش خیلی کامل از بخش‌های اون قرار دادیم تا تویه نگاه بفهمی چی به چی و چقدر از مطالب رو هنوز نخوندی!

۳ اول هر بخش یه درس‌نامه مختصر و مفید گذاشتیم تا وقتی معلمت درس میده بتونی سریع از روی اون، مطلب رو دوره کنی.

۴ یه هیئت چند نفره از بهترین دبیران تهران، تک‌تک سؤال‌های این کتاب رو بررسی کردن تا مطمئن شدیم کتاب از کیفیت بالا و مهروماهی برخورداره.

۵ مطمئن شدیم هیچ مطلبی از کتاب درسی جا نیفتاده، حتی فعالیت‌ها و «تمرین در کلاس»‌ها.

۶ هر سؤالی که توی امتحان‌های نهایی بوده و به کتاب جدید هم ربط داشته، تبدیل به تمرین شده و توی کتاب اومده.

۷ تمرین‌ها رو به ترتیب از ساده به دشوار آوردیم تا روند یادگیری‌تون راحت‌تر و سریع‌تر بشه.


۸ دوتا امتحان، یکی برای ترم اول و یکی برای ترم دوم توی کتاب گذاشتیم که شب امتحان خیلی بهتون کمک می‌کنه.

۹ انواع و اقسام تیپ‌بندی‌های سؤال مثل جای خالی‌ها و درست - غلط، مسئله، تمرین و ... آوردیم تا یه مجموعه کامل براتون آماده باشه.

۱۰ حواسمون به حجم کتاب بوده که تعادل حفظ بشه و نه خسته‌کننده باشه، نه فرایند یادگیری ناقص بمونه. دیگه چی میخوای؟! این کتاب همه چی تمومه! © این گوی و این میدان!

• ساختار کتاب اینجوریه:

• هر فصل از کتاب درسی به چند درس مستقل از هم تقسیم‌بندی شده و برای هر درس، اول یه درس‌نامه مختصر و مفید و بعد، تمرینات متنوعی ارائه شده.

• برای سؤال‌هایی که دشواری قابل توجهی دارن، علامت  در کنار شماره سؤال قرار داده شده تا بدونید که

- این سؤال‌ها در انتهای کتاب، پاسخ تشریحی دارن.
- جواب آخر همه تمرین‌های محاسباتی در انتهای کتاب آورده شده است.
- در انتهای فصل ۲، یک امتحان از مباحث ترم اول و در انتهای آخرین فصل، امتحان دیگری از مباحث ترم دوم ارائه کردیم.
- سؤال‌های هر مبحث رو از ساده به دشوار چیدیم.
- نکته‌هایی برای استفاده بهتر از کتاب: بعد از این‌که توی مدرسه، مبحث مورد نظر توسط دبیر درس داده شد، درسنامه کتاب برای اون مبحث رو با دقت بخون تا آماده حل تمرینات شی. وقتی تمرین‌ها رو حل می‌کنی، دقت کن که برای پرسش‌های دشوارتر، نماد \Rightarrow در کنار شماره سؤال قرار داده شده و پاسخ تشریحی اون‌ها در انتهای کتاب اومده. در ضمن، جواب آخر همه تمرین‌های محاسباتی رو هم انتهای کتاب آوردیم.
- با نزدیک شدن به شب امتحان، برای امتحان ارائه شده در انتهای فصل‌های ۲ و ۵ کتاب، پاسخ بنویس. برای آمادگی بیشتر برای امتحان، می‌تونی در فاصله یکی دو روز مونده به امتحان، به کتاب «امتحانوفن» مهروماه مراجعه کنی.

اما قدردانی:

- در این‌جا لازم می‌دونم از جناب آقای احمد اختیاری مدیر انتشارات که الحق والانصاف به تمام جزئیات توجه دارند و نمی‌ذارن کتاب کم‌کیفیت برای چاپ ارسال شه، تشکر کنم.
- همین‌طور از استاد گرانقدر محمدحسین انوشه، مدیر شورای تألیف که با راهنمایی‌ها، پیشنهادات و انتقادات سازنده ایشان، به تألیف این‌چنینی رسیدیم قدردانی و تشکر می‌کنم.
- هم‌چنین لازم می‌دونم از همه عزیزان مهروماهی‌ام که در آماده شدن با کیفیت و به موقع این کتاب، نقش مؤثری داشتند، تشکر کنم، به ویژه:
- خانم رویا طبسی که برای صفحه‌آرایی کتاب، جانانه تلاش کرد.
- خانم زهرا خوشنود که برای هماهنگی تألیف و تولید کتاب، از جان مایه گذاشت.
- خانم‌ها سمیه جبّاری (مدیر تولید)، الهام پیلوایه (مسئول فنی تولید)، الناز رضوانی و مهشید برزنونی (حروفچین)، آقای ساسان اسدی (رسام) و آقای حسین شیرمحمدی از واحد هنری که همکاری صمیمانه و ارزشمندی داشتند.
- آقای امیر انوشه (مدیر توانمند سایت مهروماه)
- ویراستاران علمی کتاب که تلاش مضاعفی در جهت رفع هرگونه ایراد و کمبود از کتاب، به عمل آوردن و جداً تأثیرگذار بودن، از جمله: آقایان افشین فرزانه، محمدامین مولایی، سبحان سیفالهی راد و خانم‌ها سنور حریری و کیانا معظمی.

مدیر گروه ریاضی
مهندس عباس اشرفی

فهرست

۹ هندسه تحلیلی و جبر

۲۹ هندسه

۴۹ تابع

۷۹ مثلثات

آزمون نیمسال اول ۱۰۷

۱۰۹ توابع نمایی و لگاریتمی

۱۳۱ حد و پیوستگی

۱۵۳ آمار و احتمال

آزمون پایان سال ۱۷۲



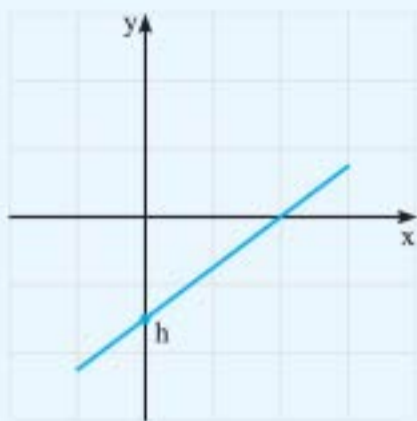
هندسه تحلیلی و جبر





درس اول: هندسه تحلیلی

◀ معادله خط



فرم کلی معادله یک خط در دستگاه دکارتی به صورت‌های زیر است:

$y = mx + h$ (فرم استاندارد)

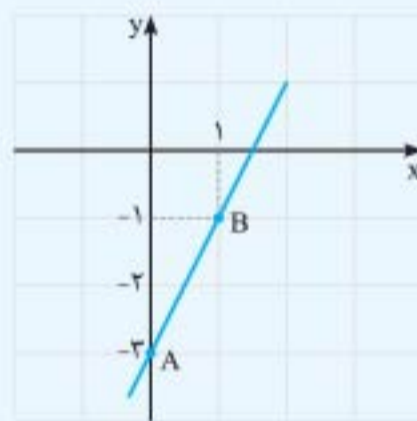
$ax + by + c = 0$ (فرم کلاسیک)

در حالت استاندارد، ضریب x را شیب خط (m) و عدد ثابت را عرض از مبدأ خط (h) می‌گوییم.

• رسم معادله خط: با داشتن دو نقطه دلخواه از معادله یک خط، می‌توان آن را رسم کرد.

مثال: شیب و عرض از مبدأ خط $2y = 4x - 6$ را تعیین کنید سپس آن را رسم کنید.

پاسخ:



$2y = 4x - 6 \Rightarrow y = 2x - 3 \Rightarrow$ شیب = ۲ و عرض از مبدأ = -۳

به x دو مقدار دلخواه داده و مقادیر y را به دست می‌آوریم.

$x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow A(0, -3)$

$x = 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow B(1, -1)$

• نوشتن معادله خط: برای نوشتن معادله یک خط باید دو نقطه از آن یا یک نقطه و شیب آن خط معلوم باشد.

فرض می‌کنیم نقاط $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ از خط معلوم باشند. ابتدا شیب خط را از رابطه $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

محاسبه کرده و در رابطه مقابل قرار می‌دهیم تا معادله خط به دست آید:

مثال: معادله خط گذرنده از دو نقطه $A(1, 2)$ و $B(-1, 0)$ را به دست آورید.

پاسخ:

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 2}{-1 - 1} = \frac{-2}{-2} = 1$

$y - 2 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x + 1$

• وضعیت دو خط نسبت به هم: دو خط $y = mx + h$ و $y = m'x + h'$ ممکن است وضعیت‌های زیر را داشته باشند:

۱ موازی: دارای شیب‌های مساوی و عرض از مبدأهای نامساوی باشند. ($m = m', h \neq h'$)

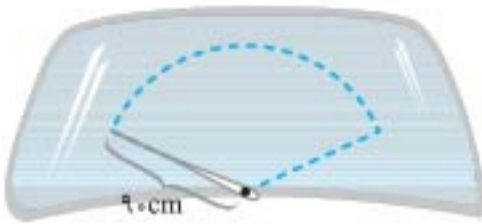
۲ منطبق: دارای شیب‌ها و عرض از مبدأهای مساوی باشند. ($m = m', h = h'$)

۳ متقاطع: دارای شیب‌های نامساوی باشند. ($m \neq m'$)

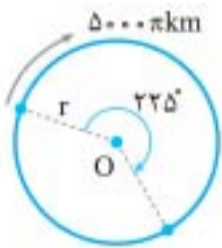
• حالت عمود بودن: یکی از حالت‌های خاص تقاطع دو خط، عمود بودن آن‌ها است و شرط عمود بودن، معکوس و قرینه بودن شیب‌های دو خط است. ($m \cdot m' = -1$)



۱۹) نوک برف پاک کنی به طول ۹۰cm در یک حرکت، مسافتی که به طور تقریبی طی می کند برابر $۲۰۲/۵cm$ است. زاویه ای که در طی این حرکت ایجاد می شود چند درجه است؟ ($\pi \simeq ۳$)



۲۰) ستاره ای روی مسیری دایره ای شکل به میزان $\theta = ۲۲۵^\circ$ دوران کرده و در این مسیر مسافت ۵۰۰۰π کیلومتر را طی می کند. شعاع مسیر دایره ای شکل چند کیلومتر است؟



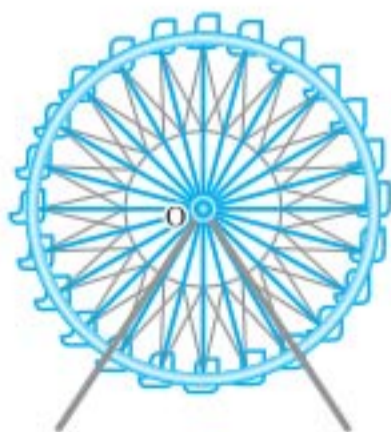
۲۱) اندازه زاویه ای که عقربه ساعت شمار از ساعت ۲ تا ۴ بعد از ظهر طی می کند را بر حسب درجه و رادیان بیان کنید.



۲۲) فرض کنید سوار چرخ و فلکی شده اید که ۲۴ کابین دارد و کابین های آن شماره گذاری شده اند. اگر در آغاز حرکت در

جهت خلاف عقربه های ساعت، شما روی کابین شماره ۴ قرار داشته باشید، بعد از $\frac{۳۸\pi}{۱۲}$ رادیان دوران، شما در موقعیت کدام

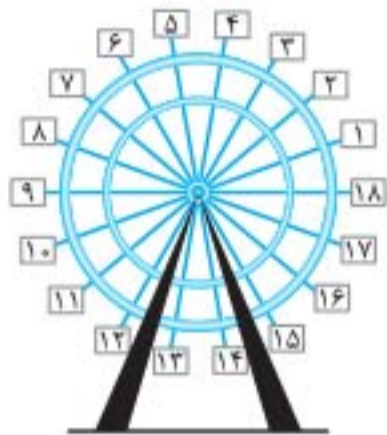
کابین قرار دارید؟







۲۳ چرخ و فلکی دارای ۱۸ کابین با فاصله‌های مساوی است که به ترتیب از شماره‌های ۱ تا ۱۸ در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت شماره‌گذاری شده است. اگر این چرخ و فلک به میزان $\frac{22\pi}{9}$ رادیان در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت بچرخد، کابین شماره ۸ به مکان اولیه کدام کابین منتقل می‌گردد؟



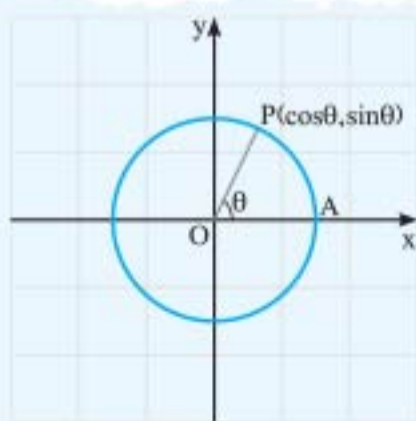
۲۴ در یک تراکتور شعاع چرخ کوچک ۳۰cm و شعاع چرخ بزرگ ۶۰cm است. اگر چرخ عقب $\frac{\pi}{3}$ رادیان بچرخد، میزان چرخش چرخ جلو را بر حسب رادیان بدست آورید.



۲۵ پره‌های یک آسیاب بادی با سرعت ثابت در هر ثانیه ۸ دور می‌چرخند. اگر طول پره‌ها ۵ متر باشد، سرعت نوک پره‌ها چند متر بر ثانیه است؟



درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی



در سال گذشته آموختید که اگر هر نقطه‌ای روی دایره مثلثاتی را به مبدأ وصل کنیم، زاویه‌ای مانند θ ایجاد می‌شود. در این حالت مختصات نقطه P به صورت $(\cos\theta, \sin\theta)$ می‌باشد.





آزمون نیمسال اول



درس: ریاضی (۲) رشته: تجربی مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه تاریخ امتحان: دی ماه

ردیف	سؤالات	نمره
۱	اگر $A(2,0)$ و $B(4,2)$ و $C(5,-1)$ رئوس مثلث ABC باشند، آن گاه معادله میانه CM را به دست آورید.	۱/۵
۲	در معادله $2x^2 + 4x + m + 1 = 0$ مقدار m را به گونه‌ای بیابید که یکی از ریشه‌های آن ۲ واحد بزرگ‌تر از ریشه دیگر باشد.	۱
۳	هر یک از جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. الف) معادله $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = 0$ دارای ریشه حقیقی است. ب) فاصله نقطه $A(2,-3)$ از خط $x = -3$ برابر است. پ) هر نقطه که از دو ضلع یک مثلث به یک فاصله باشد روی قرار دارد. ت) دامنه تابع $y = \frac{2x-1}{\sqrt{4-x^2}}$ برابر با بازه است. ث) نمودار هر تابع یک‌به‌یک با نمودار تابع وارون آن نسبت به خط قرینه یکدیگرند. ج) برای رسم نمودار تابع $y = -f(x)$ کافی است نمودار $f(x)$ را نسبت به قرینه کنیم. چ) زاویه $\frac{7\pi}{5}$ رادیان برابر درجه است. ح) نمودار تابع $y = \sin x$ نسبت به متقارن است.	۲
۴	معادله زیر را حل کنید. $\sqrt{x+7} = \sqrt{x+1}$	۱
۵	اگر دو نفر با هم تایپ کنند، می‌توانند در ۴ ساعت یک کار تایپی را انجام دهند. با فرض این که سرعت یکی از آنها سه برابر دیگری باشد، حساب کنید هر یک از آنها به تنهایی در چند ساعت می‌توانند کار تایپ را انجام دهند؟	۱
۶	نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید. الف) هیچ مثلثی با سه ضلع برابر وجود ندارد. ب) همه اعداد اول فردند.	۲
۷	در دوزنقه زیر نسبت $\frac{MN}{PQ}$ چه قدر است؟ 	۱/۵
۸	در شکل زیر اگر $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$ باشد، مقادیر x و y را به دست آورید. 	۱/۵





٢٥

.

٢١/٢٥

الف ١٢

١٣٥

الف ٢/٥

.

الف ١٥

ب ٤٢/٨

٨/٧٥

الف $\sigma_y^2 = 2$

$\sigma_y^2 = 2$

الف $\sigma_y^2 = 2$

$\sigma_y^2 = 2$

الف ٢٩/٥

الف ١/٥

الف $v_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}, v_2 = \frac{\sqrt{2}}{13}$

$v_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}$

الف ٢٢

ب -٥

ب ٢/٥

ب ٦/٧

د ٢٧٢/١

ب $\frac{9/5}{8}$

ب ١/٦

ب ١٥, ٢٢, ٢٢

ب -٢

ب .

ج ٢٧/٢١

ب $\sqrt{\frac{9/5}{8}}$

٢٨

٢٩

٣٠

٣١

٣٢

٣٣

٣٥

٣٧

٣٨

٣٩

٤٠

٤٢

٤٤

٤٥

٤٦

$\frac{8}{27}$

$\frac{2}{11}$

$\frac{4}{9}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{11}$

$\frac{15}{17}$

الف $\frac{4}{5}$

$\frac{1}{4}$

الف $\frac{1}{16}$

٠/٠٦٤

٠/٧٢

٠/٢٤

$\frac{3}{4}$

الف $(\frac{1}{12})^6$

$\frac{241}{7^4}$

$\frac{265 \times \dots \times 241}{(265)^{25}}$

الف $(\frac{1}{12})^2$

الف ٢٦

$a = -427$

٨٦

٢٥

ب $\frac{1}{4}$

ب $\frac{1}{16}$

ب $\frac{285}{1728}$

ب $\frac{110}{114}$

٤

٥

٦

٧

٨

٩

١٠

ب $\frac{1}{5}$

١٢

١٣

ب $\frac{1}{8}$

١٥

١٧

١٨

١٩

٢٠

٢١

٢٢

٢٣

٢٤

٢٥

٢٦

٢٧





۳۴

ت $y = \sqrt{x^2 + 2} \Rightarrow y^2 = x^2 + 2 \Rightarrow x^2 = y^2 - 2$
 $\Rightarrow x = \sqrt{y^2 - 2} = g^{-1}(x) = \sqrt{x^2 - 2}$

ج $y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow x+1 = xy - y \Rightarrow x(1-y) = -1-y$
 $\Rightarrow x = \frac{-1-y}{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1+x}{x-1}$

۳۵

ب $f(x) = 2 - \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 4x + 4 (x \leq 2)$
 $y = 2 - \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = 2 - y \Rightarrow x = (2 - y)^2$
 $\Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 4 = g(x)$

۳۲

ج $f(x) = 2x + 5 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$
 $g(x) = \frac{x}{x^2 - 4} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{+2, -2\}$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x+5}{\frac{x}{x^2-4}} = \frac{(2x+5)(x^2-4)}{x}$

$D(\frac{f}{g})(x) = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{+2, -2, 0\}$

فصل چهارم: مثلثات

۵

$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{l_1}{r_1} \\ \alpha_2 &= \frac{l_2}{r_2} \\ \alpha_1 &= \alpha_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow \frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2} \Rightarrow \frac{l_2}{l_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{2}{3}$

۱۶

ابتدا زاویه داده شده را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$\alpha = 175^\circ = \frac{175 \times \pi}{180} = \frac{5 \times 25 \times \pi}{180} \xrightarrow{\pi=3} \alpha = \frac{5 \times 25 \times 3}{180}$
 $\Rightarrow \alpha = \frac{25}{12}$

پس خواهیم داشت:

$\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow r = \frac{l}{\alpha} = \frac{7 \text{ cm}}{\frac{25}{12}} = \frac{7 \times 12}{25} = 24 \text{ cm}$

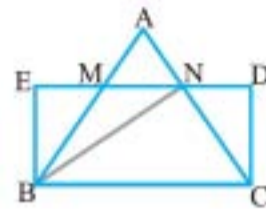
۲۲

۲۴ کابین در مجموع یک دور کامل دایره چرخ و فلک را پوشش می‌دهند

بنابراین زاویه بین هر دو کابین برابر است با: $\frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12} \text{ rad}$

۶۰

با توجه به فرض‌های مسئله، نتیجه می‌گیریم که مساحت مثلث ABC، ۹ برابر مساحت مثلث AMN است و از طرفی این دو مثلث با هم متشابه‌اند:



$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = (\frac{MN}{BC})^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BC}{MN} = 3$

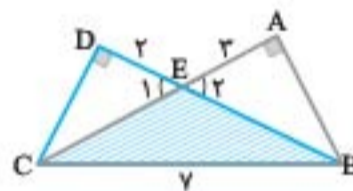
با توجه به شکل داریم:

$\frac{S_{BCDE}}{S_{\triangle MNB}} = \frac{BE \times BC}{\frac{1}{2} BE \times MN} = \frac{2BC}{MN} = 2 \times 3 = 6$

۶۲

چون $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ و $\hat{D} = \hat{A} = 90^\circ$ پس دو مثلث ABE و DCE با هم متشابه‌اند در نتیجه:

$\frac{DE}{AE} = \frac{DC}{AB} = \frac{EC}{EB} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{EC}{EB} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{EC}{EC+EB}$



چون محیط مثلث BCE برابر ۱۶ و $BC=7$ است، پس $EC+BE=9$ آن‌گاه:

$\frac{2}{5} = \frac{EC}{9} \Rightarrow EC = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$, $EB = 9 - 3\frac{3}{5} = 5\frac{2}{5}$
 $|EB - EC| = |5\frac{2}{5} - 3\frac{3}{5}| = 1\frac{4}{5}$

فصل سوم: تابع

۹

مخرج کسر داده شده تنها به ازای $x=2$ صفر شده است، پس $x=2$ ریشه مضاعف تابع است، یعنی:

۱) $\Delta = 0 \Rightarrow a^2 - 4b = 0 \Rightarrow a^2 = 4b$
 ۲) $x=2$ ریشه مضاعف $\rightarrow 4 + 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a - 4$

$\begin{cases} b = \frac{a^2}{4} \\ b = -2a - 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{a^2}{4} = -2a - 4 \Rightarrow a^2 = -8a - 16$
 $\Rightarrow a^2 + 8a + 16 = 0 \Rightarrow (a+4)^2 = 0 \Rightarrow a = -4$
 $\Rightarrow b = 4 \Rightarrow a+b=0$



۴۷

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$\Delta x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + (-x + \frac{\pi}{12})$$

$$\Rightarrow 6x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi + \pi - 4\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{24} \text{ rad}$$

۵۴

$$\text{ع } \cot(90^\circ + 25^\circ) \cot(180^\circ - 25^\circ) \times (-\cot(540^\circ - 30^\circ))$$

$$= \frac{(-\tan 25^\circ) \cdot (-\cot 25^\circ) \times (\cot(30^\circ))}{1} = \sqrt{3}$$

۵۵

$$\frac{\sin(180^\circ - 25^\circ) - \cos(180^\circ + 25^\circ)}{\sin(90^\circ + 25^\circ) + \sin(90^\circ - 25^\circ)}$$

$$= \frac{(\sin 25^\circ) - (-\cos 25^\circ)}{\cos 25^\circ + \cos 25^\circ} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج را بر } \cos 25^\circ \text{ تقسیم می‌کنیم}}$$

$$\frac{\frac{\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ} + \frac{\cos 25^\circ}{\cos 25^\circ}}{\frac{\cos 25^\circ}{\cos 25^\circ} + \frac{\cos 25^\circ}{\cos 25^\circ}} = \frac{\tan 25^\circ + 1}{2} = \frac{1/\sqrt{3} + 1}{2} = 0.68$$

۶۲

$$\sin(\frac{7\pi}{3} - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\sin(\Delta\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(630^\circ - \alpha) = \sin(7 \times 90^\circ - \alpha) = \sin(\frac{7\pi}{2} - \alpha) = -\cos \alpha$$

دع سوم

$$\tan(\frac{7\pi}{3} + \alpha) = -\cot \alpha$$

۴ رابطه بالا را در سمت چپ تساوی جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{1}{-\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} \times (-\cot \alpha)$$

$$= \frac{-1}{\cos \alpha} + \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$= 1 - \frac{1}{\cos \alpha} = \text{سمت راست}$$

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

۲۹

$$\text{ت } \log_{(\sqrt{3}+1)}(\sqrt{3}+1)^2 - \log_{(\sqrt{3}+1)^2}(\sqrt{3}+1)^2$$

$$= 2 \log_{(\sqrt{3}+1)}(\sqrt{3}+1) - \frac{2}{2} \log_{(\sqrt{3}+1)}(\sqrt{3}+1)$$

$$= 2 - \frac{2}{2} = \frac{4}{2}$$

رادیان دوران برابر است با: $\frac{28\pi}{12}$

$$\frac{28\pi}{12} = \frac{26\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} = 2\pi + \frac{2\pi}{12}$$

$$= 2\pi + 2(\frac{\pi}{12}) = 2\pi + \pi + 2(\frac{\pi}{12})$$

$$= 2\pi + \frac{12\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} = 2\pi + \frac{14\pi}{12}$$

۲π رادیان دوران یعنی یک دور کامل که دوباره روی موقعیت کابین

۴ قرار دارد سپس $\frac{14\pi}{12}$ دوران داریم که چون بین هر دو کابین $\frac{\pi}{12}$

رادیان فاصله است بنابراین باید از موقعیت ۴، ۱۴ کابین جلو برود که

به کابین ۱۸ می‌رسد.

۲۵

هر دور گردش برابر $2\pi \text{ rad}$ است. بنابراین ۸ دور گردش برابر $8 \times 2\pi = 16\pi$

رادیان می‌باشد یعنی:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 16\pi \\ r = 5\text{m} \end{array} \right\} \Rightarrow \ell = \alpha r = 16\pi \times 5 = 80\pi \text{ m}$$

چون این مسافت در ۱ ثانیه طی می‌شود بنابراین سرعت برابر

$80\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$ خواهد بود.

۴۲

$$\text{الف } A = \tan 2^\circ \times \tan 4^\circ \times \tan 8^\circ \times \tan 16^\circ \times \tan 32^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \tan 2^\circ = \cot 88^\circ \Rightarrow \tan 2^\circ \times \tan 88^\circ = 1 \\ \tan 4^\circ = \cot 86^\circ \Rightarrow \tan 4^\circ \times \tan 86^\circ = 1 \\ \tan 8^\circ = \cot 82^\circ \Rightarrow \tan 8^\circ \times \tan 82^\circ = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow A = 1$$

$$\text{ب } \left. \begin{array}{l} \sin 15^\circ = \cos 75^\circ \\ \sin 45^\circ = \cos 45^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sin 15^\circ \times \tan 30^\circ \times \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ \times \cot 30^\circ \times \cos 75^\circ}$$

$$\frac{\tan 30^\circ}{\cot 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

۴۴

الف با توجه به صورت سؤال دو زاویه $25^\circ - x$ و $4x - 10^\circ$ متمم‌اند

یعنی:

$$25^\circ - x + 4x - 10^\circ = 90^\circ$$

$$\Rightarrow 3x + 15^\circ = 90^\circ \Rightarrow x = 25^\circ$$

ب مانند قسمت الف داریم:

$$x + \frac{\pi}{15} + \frac{4\pi}{15} + 2x = \frac{\pi}{2}$$

$$2x + \frac{5\pi}{15} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} \text{ rad}$$