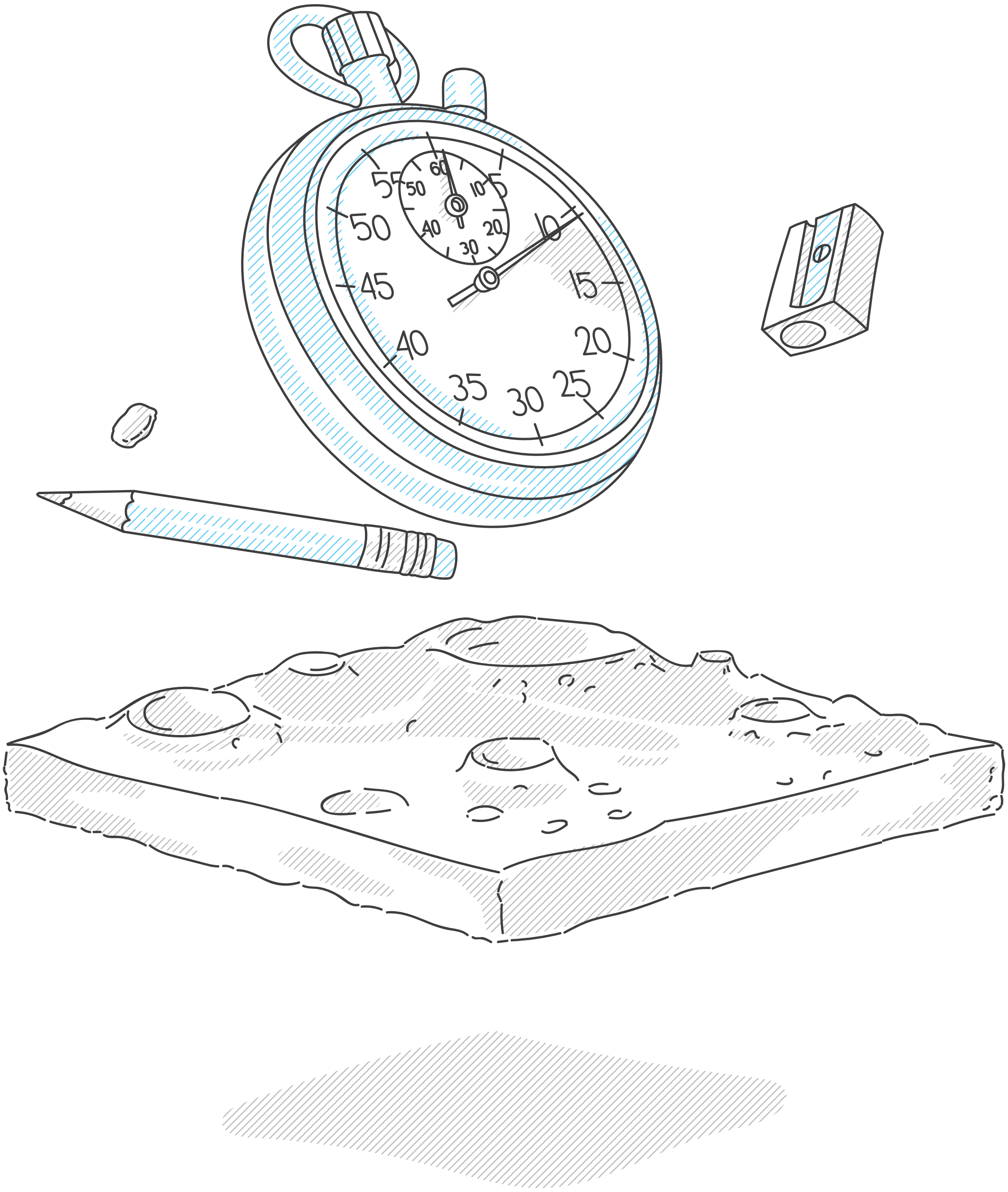
به نام پروردگار مهربان

آزمون PLUS+

حسابان و ریاضیات پایه

آزمون‌هایی برای ۱۰۰٪

▪ میلاد منصوری ▪ محمد گودرزی



مهروماه

تقدیم به آموزگارانمان با احترام
و تقدیم به دانش آموزان با امید

مقدمه

کتابی که در دست دارید با هدفی بسیار مهم که همان موفقیت شما عزیزان است تألیف شده و اطمینان داریم که اگه این کتاب رو خوب بخونید اونوقت میتونید با خیال راحت از هر آزمونی از جمله کنکور موفق بیرون بیایید.
این کتاب شامل درسنامه‌ها و آزمون‌های همهٔ فصل‌های حسابان ۱ و ۲ و ریاضیات پایه است و آزمون‌ها فصل به فصل به همراه پاسخ‌نامهٔ تشریحی طراحی شدن و درآخر کتاب ۵ آزمون جامع هم گذاشتیم . ابتدای هر فصل یه درسنامهٔ طلایی هست که همهٔ نکته‌های همون فصل و اصل کاری‌ها رو نوشتیم و توی چند مورد فوت کوزه‌گری هم یادتون دادیم و هر جا که نیاز بوده قضیه و نکته‌های توپ ساختیم تا حسابی کار رو براتون راحت کنیم. واسه نکته‌های مهم‌تر چند تا مثال آوردیم، چون معتقدیم ریاضی رو با مثال و حل مسأله بهتر می‌شه فهمید مثل یاد گرفتن شنا، که تا خودتو به آب نزنی نمیتونی شنا کردن رو یاد بگیری... و به همین دلیل درسنامهٔ بعضی از فصل‌ها نسبت به درسنامهٔ کتاب‌های مشابه مفصل‌تره.
آزمون‌ها داستانشون فرق داره و باید قول بدین که روی این آزمون‌ها حسابی وقت بذارین ... چون اکثر سؤالات جدیدن و با فکر و هدف طراحی شدن و سعی کردیم کاری کنیم که بعد از خوندن این کتاب احساس قدرت کنین و از پس هر آزمونی بر بیاید.
به طور کلی اگه به دنبال سؤالات مفهومی، متنوع و جدید هستی خیالت راحت باشه که انتخاب درستی کردی. برای خوندن این کتاب نباید مستقیم سراغ آزمون‌ها بری، هدف اینه که، خوندن این کتاب شما رو برای کنکور ورزیده و آماده کنه و مثل یک دونده که برای روز مسابقه با تمرینات درست و حسابی خودش رو قوی میکنه شما هم باید با خوندن درسنامه‌ها و نکات و ریزه‌کاری‌ها و حل مثال‌ها و تست‌ها، تجربه و تسلط خودتون رو بالا ببرید تا سر جلسهٔ کنکور گیر نیوفتید ... این سؤالات در واقع سؤالات کنکور نیستند، بلکه از استاندارد آموزشی دیگری تبعیت می‌کنند (استاندارد ورزش و تقویت) پس انتظار نداشته باشید آزمون‌های این کتاب خیلی راحت باشه ولی میتونید با دقت و بدون هیچ نگرانی مطالب و نکات رو چندبار مرور و تمرین کنید تا اینکه از پس این آزمون‌ها با موفقیت بیرون بیایید و اون موقع هست که ببینید تو کنکور چه کولاکی کردید.

تشکر و قدردانی

امـا شـرط لازم نوشـتن یـک کتاب خوب، داشـتن یک خانـوادهٔ فداکاره که مـا رو با مهربانی و صبـر حمایت کردند و بخاطر داشـتن این نعمت بزرگ شاکریم و از اونها با تمام وجود تشکر می‌کنیم .

همـکاری بـا مهرومـاه تجربهٔ قشـنگ و ارزشـمندیه و دلیـل اصلیش وجود دو بزرگمرد دوسـت داشـتنیه: اول مدیر انتشـارات جناب آقای احمد اختیاری که در همهٔ شرایط حمایت جانانه‌ای از این کتاب داشتند و دوم مدیر گروه ریاضی انتشارات استاد عباس اشرفی نازنین که دریایی از تجربه و توانایی هستن.

دوستان خوب و با محبتی در نوشتن این کتاب به ما یاری رسوندن؛ از جمله استاد کیان کریمی خراسانی با اخلاق و با سواد که ما رو از مشـاوره‌های علمـی ارزنده‌ای بهره‌مند کردند، همچنین رهنمودهای سـازندهٔ دیگر دوسـتان از جمله مهنـدس داوود یاوری و دکتر علیرضا یحیایی ازمشـاورین برتر آموزشـی کشـور و همچنین محمد رامهرمزی، مهرشـاد دهقان و محسـن قندچلر (اسـتاد برجسـته فیزیـک) از دوسـتانی هسـتند که همیشـه به مـا روحیه دادند و حمایـت کردند و ما به داشتنشـون افتخار می‌کنیم ، خـدا ما رو خیلی دوست داره که همچنین نعمت‌های بزرگی بهمون داده.

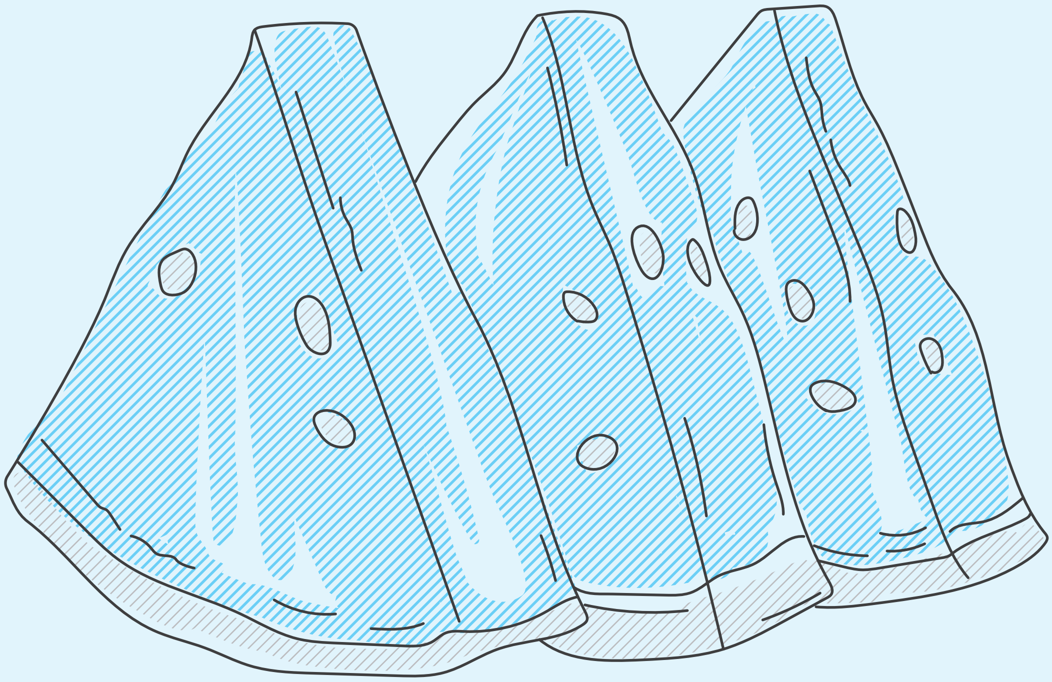
امـا زحمـات بسـیار ارزشـمند همـهٔ عزیزانـی کـه در تهیـه و چـاپ این کتـاب وقت و نیرو گذاشـتن بسـیار سـتودنیه، ما از جنـاب آقای محمدحسـین انوشـه مدیر شـورای تألیف و همچنین گروه تولید به مدیریت سـرکار خانم سـمیرا سیاوشـی، گروه فنی به سرپرستی جناب آقای میلاد صفایی، گروه هنری به مدیریت جناب آقای محسن فرهادی و همهٔ عزیزانی که در تولید این کتاب نقش ایفا کردن صمیمانه تشکر می‌کنیم و از خداوند براشون سلامتی آرزومندیم.

در آخـر، کتـاب حاضـر را بـه تمامـی دانش آموزان ایـران زمین و دبیران محتـرم تقدیم می‌کنیم و از همه دوسـتان انتظـار داریم هر نوع اشکال چاپی یا محتوایی را به ما گوشزد کنند تا در ویرایش‌های بعدی اصلاح گردد.

میلاد منصوری ـ محمد گودرزی

فهرست

بخش ۱



درسنامه + آزمون‌های تفکیکی

این کتاب دارای درسنامه‌های طلایی است که شامل تمام نکات مربوط به آن فصل می‌شود و برای این نکات مثال‌هایی آورده‌ایم که دیدن این مثال‌ها به درک درست و کامل نکات کمک می‌کند.
یکی از دلایلی که درسنامهٔ این کتاب در برخی فصل‌ها از کتاب‌های دیگر مفصل‌تر است، وجود همین نکات به همراه مثال‌هایی متنوع برای درک بهتر آن‌هاست.
توصیهٔ ما به شما این است که تمام مثال‌های درسنامه را کامل و دقیق حل کنید، سپس به سراغ آزمون‌های هر فصل بروید.

فصل اول: ریشه، توان و اتحاد

۱ نکات رادیکال‌ها $(m, n, p \in \mathbb{N}-\{1\})$

توضیح	شرایط	نکته
بیرون آوردن عدد از زیر رادیکال	n فرد n زوج	$\sqrt[n]{a^n}=a$ $\sqrt[n]{a^n}=\lvert a\rvert$
بردن عدد به زیر رادیکال	n فرد n زوج و $a>0$ n زوج و $a>0$	$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}$ $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}$ $-a\sqrt[n]{b}=-\sqrt[n]{a^n b}$
ساده کردن توان و فرجه با هم	$a>0$ n فرد و $a<0$ n زوج و $a<0$	$\sqrt[nm]{a^{np}}=\sqrt[m]{a^p}$ $\sqrt[nm]{a^{np}}=\sqrt[m]{a^p}$ $\sqrt[nm]{a^{np}}=\sqrt[m]{\lvert a\rvert^p}$
ضرب کردن توان و فرجه در یک عدد	$a>0$ n فرد و $a<0$	$\sqrt[m]{a^p}=\sqrt[mn]{a^{np}}$ $\sqrt[m]{a^p}=\sqrt[mn]{a^{np}}$
نوشتن رادیکال به‌صورت توان کسری	$a>0$	$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$
فرجه‌های متوالی	–	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}}=\sqrt[mnp]{a}$

۲ ضرب و تقسیم رادیکال‌ها با فرجه‌های برابر

۱ $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

۲ $\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

۳ ریشهٔ n ام

ریشهٔ n ام عدد b برابر a است، اگر و تنها اگر $a^n=b$.

۴ تقریب $\sqrt[n]{x}$

ابتدا باید نمایشی از عدد x به‌صورت $x=a^n+b$ بنویسیم که a^n نزدیک‌ترین توان n ام کامل به عدد x است. (در این نمایش $a, b\in\mathbb{Z}$ هستند) سپس از قاعدهٔ مقابل استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a^n+b}\simeq a+\frac{b}{na^{n-1}}$$

◂ برای نمونه:

$$\sqrt{7}=\sqrt{2^2+3}\simeq 2+\frac{3}{2\times 2}\simeq 2/75$$

همچنین می‌دانیم:

$$4<7<9\Rightarrow 2<\sqrt{7}<3$$

۵ مقایسهٔ توان‌ها و ریشه‌های عدد a

$a>1$	$a^n>a^{n-1}>\cdots>a^3>a^2>a>\sqrt{a}>\sqrt[3]{a}>\cdots>1$
$0<a<1$	$1>\cdots\sqrt[4]{a}>\sqrt[3]{a}>\sqrt{a}>a>a^2>a^3>a^4>\cdots>0$
$-1<a<0$	$a^2>a^4>a^6>\cdots>0>\cdots>a^5>a^3>a>\sqrt[3]{a}>\sqrt[5]{a}>\cdots>-1$
$a<-1$	$\cdots>a^4>a^2>0>\cdots>\sqrt[5]{a}>\sqrt[3]{a}>a>a^3>a^5>\cdots$

۶ فرمول رادیکال مرکب

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

◂ برای نمونه:

$$\sqrt{5+\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{25-2}}{2}}+\sqrt{\frac{5-\sqrt{25-2}}{2}}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{23}}{2}}+\sqrt{\frac{5-\sqrt{23}}{2}}$$

۷ جدول قواعد توان

معنی a^n	$a^n=\overbrace{a\times a\times\cdots\times a}^{n\text{ بار}}$
اگر پایه‌ها برابر باشند.	$a^n\times a^m=a^{n+m}$ $a^n\div a^m=a^{n-m}$
اگر توان‌ها برابر باشند.	$a^n\times b^n=(ab)^n$ $a^n\div b^n=(\frac{a}{b})^n$
توان رساندن عدد توان‌دار	$(a^n)^m=a^{nm}$
توان منفی	$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\ ,\ a\neq 0$
هر عدد غیر صفر به‌توان صفر برابر یک است.	$a^0=1\ ,\ 0^0$:تعریف نشده

۸ روابط بین اعداد وارون

اگر b و a دو عدد وارون یکدیگر باشند، یعنی $ab=1$، آن‌گاه:

۱ $a^n=b^{-n}$

۲ $a^m.b^n=a^{m-n}=b^{n-m}$

۳ $\frac{a^m}{b^n}=a^{m+n}$

۴ $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}=1 \qquad (a, b\neq -1)$

فصل دوم: عبارت‌های جبری

۱ معادلهٔ درجهٔ اول

ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ یک $ax+b=0$ برابر $x=-\frac{b}{a}$ است.

۲ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

۱ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ معمولاً با تجزیه کردن (بیشتر از همه اتحاد جملهٔ مشترک) به‌دست می‌آید. درصورتی‌که تجزیه دشوار باشد از Δ کمک می‌گیریم. $a,b,c\in\mathbb{R}\;,\;\Delta=b^2-4ac\;,\;a\neq 0$

۲ براساس علامت عدد حقیقی Δ، سه حالت ممکن است پیش آید:

الف) اگر $\Delta<0$ باشد، معادله ریشهٔ حقیقی ندارد، اما اطلاعات ارزشمندی دربارهٔ علامت $y=ax^2+bx+c$ به‌دست می‌آید، که عبارت‌اند از:

- اگر $a>0$ باشد، آن‌گاه y همواره مثبت است.
- اگر $a<0$ باشد، آن‌گاه y همواره منفی است.

دو مورد بالا را می‌توان در یک جمله خلاصه کرد: ay همواره مثبت است.

ب) اگر $\Delta=0$ باشد، معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ دارای یک ریشهٔ مضاعف است که از دستور $x_0=\frac{-b}{2a}$ به‌دست می‌آید، در این حالت:

$ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$

پ) اگر $\Delta>0$ باشد، معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\;,\;x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

در این حالت عبارت ax^2+bx+c به‌صورت مقابل تجزیه‌پذیر است:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

۳ اگر $ac<0$ باشد، حتماً $\Delta>0$ است.

۴ اگر $x=\alpha$ ریشه‌ای از معادله $P(x)=0$ باشد، حتماً در معادله صدق می‌کند، یعنی $P(\alpha)=0$.

۳ قوانین ویت

البته این روابط حتی برای $\Delta<0$ نیز درست است. اما در سطح آموزشی دبیرستان شرط $\Delta\geq 0$ را برای حقیقی بودن ریشه‌ها نیاز داریم.

۱ در هر معادلهٔ درجهٔ دو که $\Delta\geq 0$ باشد، روابط زیر بین ریشه‌ها برقرار است:

$S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

$P=x_1x_2=\frac{c}{a}$

۲ روابط کمکی زیر را نیز داریم:

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=S^2-2P$

$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3(x_1+x_2)(x_1x_2)=S^3-3PS$

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-\frac{b}{c}$

۳ در معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ وقتی $\Delta\geq 0$، $P=x_1x_2=\frac{c}{a}$ و $S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ باشند، آن‌گاه جدول زیر دربارهٔ علامت ریشه‌ها به ما کمک می‌کند:

اگر $S>0$ و $P>0$ آن‌گاه هر دو ریشه مثبت هستند.
اگر $P<0$ ریشه‌ها مختلف العلامت هستند.
اگر $S<0$ و $P<0$ قدرمطلق ریشهٔ منفی از ریشهٔ مثبت بزرگ‌تر است.
اگر $S<0$ و $P>0$ هر دو ریشه منفی هستند.

۴ اگر x_2 و x_1 ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشند، آن‌گاه ریشه‌های معادلهٔ $cx^2+bx+a=0$، $\frac{1}{x_1}$ و $\frac{1}{x_2}$ هستند.

۵ معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشهٔ مضاعف $x=x_1$ دارد، به‌صورت $a(x-x_1)^2$ است.

◄ برای نمونه: معادله‌ای که ریشهٔ مضاعف ۵ دارد، به‌صورت $a(x-5)^2$ است.

۴ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم

۱ اگر هر سه ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ سوم $ax^3+bx^2+cx+d=0$ اعدادی حقیقی باشند، داریم:

$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}\;,\;x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}\;,\;x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$

۲ در معادله‌های درجهٔ سه، معمولاً یکی از ریشه‌ها ± 1 یا ± 2 است. با داشتن ریشهٔ اول یعنی $x=a$ و تقسیم معادله بر $x-a$ می‌توانیم بقیهٔ ریشه‌ها را در صورت وجود به‌دست آوریم.

۵ تغییر متغیر

۱ اگر a و b دو عدد وارون باشند، برای حل معادلهٔ $ma^x+nb^x=k$، باید از تغییر متغیر کمک بگیریم. به مثال زیر دقت کنید:

مثال ۱: جواب‌های معادلهٔ $(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x=4$ را بیابید.

پاسخ در حل معادلهٔ $(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x=4$ چون دو عدد وارون وجود دارد باید از تغییر متغیر کمک بگیریم:

$(2+\sqrt{3})^x=T>0\Rightarrow T+\frac{1}{T}=4\Rightarrow T^2-4T+1=0$

$\Rightarrow T_1=2+\sqrt{3}\;,\;T_2=2-\sqrt{3}$

بنابراین:

$(2+\sqrt{3})^{x_1}=(2+\sqrt{3})\Rightarrow x_1=1$

$(2+\sqrt{3})^{x_2}=(2-\sqrt{3})\Rightarrow x_2=-1$

۲ همواره در تغییر متغیر حواستان به عبارت‌های مثبت باشد، عبارت‌هایی به فرم $\sqrt{A(x)}$، $a^{A(x)}$، x^2 و $|x|$ همواره نامنفی هستند.

آزمون ۴ معادلات گنگ و گویا

مطابق با آزمون پنجم گزینهٔ ۲ و آزمون چهارم قلم‌چی —%

۱. معادلهٔ $\sqrt{x^۴+۴x-۸}=۲+x$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) یک ۲) دو ۳) چهار ۴) جواب ندارد.

۲. حاصل جمع جواب‌های معادلهٔ $\frac{۳-x}{۲x+۳}+\frac{x-۱}{۲x+۱}=۷$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۲۳}{۱۳}$ ۲) $\frac{۲۵}{۱۴}$ ۳) $-\frac{۲۳}{۱۳}$ ۴) $-\frac{۲۵}{۱۴}$

۳. معادلهٔ $x^۲-mx+۳-m=۰$ دارای ریشه‌های حقیقی نه لزوماً متمایز α و β است. اگر $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=۲$ باشد، آن‌گاه $\alpha^۲+\beta^۲$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۴

۴. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۴x+۳=\sqrt{x^۲+۴x+۵}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۴)

۱) -۲ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۵. هرگاه ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲+ax+۳=۰$ برابر $\frac{۱}{x_۲}$ و $\frac{۱}{x_۱}$ باشند، ریشه‌های کدام معادله $x_۱+x_۲$ و $x_۱x_۲$ هستند؟

۱) $۳x^۲+(۲-a)x+۲a=۱$ ۲) $۹x^۲-۳(۲-a)x-۲a=۰$

۳) $۴x^۲+(۳-a)x+۲-a=۰$ ۴) $۹x^۲+۲(a-۳)x+a=۱$

۶. معادلهٔ $\sqrt{x+۶+۲\sqrt{x+۵}}-۱=\sqrt{-x+۲۰}$ چند جواب دارد؟

۱) سه ۲) هیچ ۳) دو ۴) یک

۷. مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\frac{۱}{x(x+۲)}+\frac{۱}{(x+۲)(x+۴)}+\frac{۱}{(x+۴)(x+۶)}=\frac{۱}{۶}$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) ۳ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) -۱

۸. معادلهٔ $(x^۲-۲x)^۲-(x^۲-۲x)=۲$ چند ریشهٔ حقیقی متمایز دارد؟ (ریاضی ۹۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹. به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادلهٔ $x^۴-(m+۲)x^۲+m+۵=۰$ چهار ریشهٔ حقیقی متمایز دارد؟ (تجربی ۸۵)

۱) $m<-۴$ ۲) $m>۴$ ۳) $-۴<m<۴$ ۴) $۴<m<۹$

۱۰. در معادلهٔ $mx^۲-x-۳=۰$ حاصل جمع وارون ریشه‌ها، دو برابر حاصل‌ضرب آن‌ها است. m کدام است؟

۱) $m=۶$ ۲) $m=۱۲$ ۳) $m=۱۸$ ۴) $m=۲۴$

۱۱. در معادلهٔ $x^۲-۵x+۱=۰$، حاصل $\frac{x_۲}{(x_۱-۵)^۲}+\frac{x_۱}{(x_۲-۵)^۲}$ برابر کدام است؟ ($x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌ها هستند.)

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۲. اگر همهٔ ریشه‌های معادله‌های $۲x^۲-۱۲x+m=۱$ و $۳x^۲-nx+۱۲=۰$ مشترک باشند، ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+mx+n=۰$ کدام است؟

۱) $m\,,\,n$ ۲) $۲\,,\,m+n$ ۳) $-۶\,,\,-۳$ ۴) $-۴\,,\,-۳$

۱۳. اگر معادلهٔ $۳x^۲-mx+۲-m=۰$ دو ریشهٔ حقیقی ناهم‌علامت داشته باشد، آن‌گاه حدود مجموع این دو ریشه کدام است؟

۱) $(-۲,+\infty)$ ۲) $(\frac{۲}{۳},+\infty)$ ۳) $(-۲,-\frac{۴}{۳})$ ۴) $(-۱,\frac{۲}{۳})$

۱۴. به ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^۲-(m+۳)x+۵=۰$ برابر ۶ است؟ (تجربی ۹۳)

۱) $-\frac{۹}{۵}$ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۹}{۵},۱$ ۴) نشدنی

۱۵. چه تعداد از معادله‌های زیر جواب حقیقی دارند؟

الف) $|x-۳|+\sqrt{۲x-۱}+۲=۰$ ب) $۲x-۱+\sqrt{x-۳}=۱$ پ) $\frac{۳x+۱}{۲x+۵}+\frac{۲x+۵}{۳x+۱}=\frac{۳}{۲}$ ت) $x+\sqrt{x-۲}=\sqrt{x}$

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

آزمون ۸ بازه و مجموعه

مطابق با آزمون اول گزینهٔ ۲ و آزمون سوم قلم‌چی

—%

۱. اگر سه عضو جدید به مجموعهٔ A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌هایش ۵۶ تا بیشتر می‌شود. اگر به A دو عضو اضافه می‌کردیم، تعداد زیرمجموعه‌هایش چند تا بیشتر می‌شد؟

۱) ۲۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۱۶

۲. اگر به مجموعهٔ A دو عضو بیافزاییم، تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی آن ۱۵ تا بیشتر می‌شود. تعداد زیرمجموعه‌های A چندتا است؟

۱) ۶۴ ۲) ۱۲۸ ۳) ۲۵۶ ۴) ۵۱۲

۳. اگر $I=[a-1,b)$ و $J=(3,b+1]$ باشند و $I\bigcap J=[4,10)$ آن‌گاه J شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۴. مرکز بازهٔ باز I عدد ۶ است. مرکز بازهٔ باز J عدد ۴ است. اگر مرکز بازه‌های $I\bigcap J$ و $I\bigcup J$ به ترتیب ۴/۵ و ۵/۵ باشد، آن‌گاه طول بازهٔ $I-J$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۵. اگر $2\in(a,3)$ و $b\in(0\,,\,a-1)$ باشد، آن‌گاه کدام لزوماً صحیح است؟

۱) $a\in(0,1)$ ۲) $b\in(1,2)$ ۳) $ab+b\in(0,1)$ ۴) $ab-b\in(0,1)$

۶. اگر $A=\{1,2,\{1,2,3\}\}$ ، $B=\{1,2,3,\{1,2\}\}$ و $C=\{1,2,3\}$ باشد. کدام رابطه صحیح است؟ (ریاضی ۹۴)

۱) $A-B=C$ ۲) $B-C=\varnothing$ ۳) $B-C=\{1,2\}$ ۴) $A-B=\{C\}$

۷. چند مورد از موارد زیر صحیح است؟ (مشابه کتاب درسی)

الف) اگر C متناهی باشد، حتماً C' نامتناهی است.

ب) اگر C' نامتناهی باشد، حتماً C متناهی است.

پ) اگر C نامتناهی باشد، حتماً C' نامتناهی است.

ت) اگر C و C' متناهی باشند، مجموعهٔ مرجع متناهی است.

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۸. در یک کلاس ۲۰ نفری، ۶ دانش‌آموز فقط به فوتبال علاقه دارند. ۵ نفر نیز فقط به بسکتبال علاقه دارند. حداکثر چند نفر به دست کم یکی از این دو ورزش علاقه دارند؟ (در این مدرسه هیچ ورزش دیگری در برنامه وجود ندارد.)

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۹. در بین ۶۵ نفر از مهمان‌های یک هتل، ۱۵ نفر می‌توانند انگلیسی صحبت کنند، ولی فارسی نمی‌توانند صحبت کنند. ۲۰ نفر نه فارسی می‌توانند صحبت کنند و نه انگلیسی. چند نفر در این هتل فارسی می‌توانند صحبت کنند؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۱۰. نامعادلهٔ $|2x+a|<b$ معادل بازهٔ $(-3,1)$ است. کدام نامعادله، بازهٔ $(-b\,,a)$ را نمایش می‌دهد؟

۱) $|x-1|<2$ ۲) $|x+1|<2$ ۳) $|x+1|<3$ ۴) $|x-1|<3$

۱۱. مجموعهٔ $((A\bigcup B)-A)\bigcap((A\bigcup B)-B)$ با کدام‌یک از مجموعه‌های زیر معادل است؟

۱) A ۲) B ۳) $A\bigcap B$ ۴) $\varnothing$

۱۲. چه تعداد از مجموعه‌های زیر متناهی هستند؟

الف) مجموعهٔ اعداد گویا بین ۰ و ۱ که مخرج آن‌ها از ۱۰ کمتر است.

ب) مجموعهٔ اعداد گویا بین ۰ و ۱ که اختلاف صورت و مخرج آن‌ها ۱ واحد است.

پ) مجموعهٔ اعداد حقیقی که جذر آن‌ها از مجذور آن‌ها بزرگ‌تر است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳. اگر $(-1,a)\bigcup(a-2,b)=(-2,0)$ باشد. کدام گزینه الزاماً صحیح است؟

۱) $b=a=0$ ۲) $b>0\,,a=0$ ۳) $b=0\,,a\le 0$ ۴) $-2<b\le 0\,,a=0$

۱۴. اگر $I\bigcup J=I$ باشد. کدام نتیجه‌گیری صحیح است؟

۱) $I-J=I$ ۲) $J=\varnothing$ ۳) $I\bigcap J=J$ ۴) $I=J$

۱۵. اگر $I\bigcup j=(a-1,2)$ و $I-j=[1,b)$ باشد، آن‌گاه حدود a و b کدام است؟ (I و J دو بازه هستند)

۱) $a<b=2$ ۲) $b<a=2$ ۳) $a<2\,,b>2$ ۴) $b<2\,,a<1$

◂ **برای نمونه:** تعیین علامت عبارت $P(x)=(x-۱)^{۵}(x-۳)^{۸}$ به‌صورت زیر است:

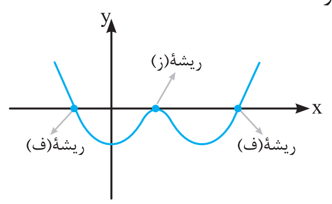
x		ف ۱		ز ۳	
P(x)	−	۰	+	۰	+

۳ اگر عاملی مانند $(x-x_۱)^n$ در $P(x)$ ضرب شود و $P(x)$ خودش عامل $(x-x_۱)^m$ را داشته باشد، آن‌گاه مرتبه‌ها با هم جمع می‌شوند.

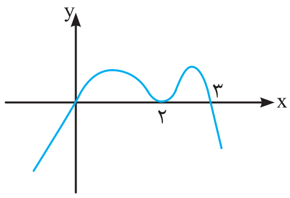
◂ **برای نمونه:** اگر $x=۲$ برای تابع $P(x)$ ریشه‌ای از مرتبهٔ ۳ باشد، آن‌گاه $x=۲$ برای عبارت $(x-۲)^{۲}P(x)$ ریشه‌ای از مرتبهٔ ۵ است.

همین ریشه برای $\frac{P(x)}{(x-۲)}$ مانند ریشه‌ای از مرتبهٔ ۲ رفتار می‌کند، ولی باید دقت کنیم عبارت آخر در $x=۲$ تعریف نشده است.

۴ نمودار در ریشه‌های «ز» با محور xها تماس دارد، ولی عبور نمی‌کند؛ مانند نمودار زیر:

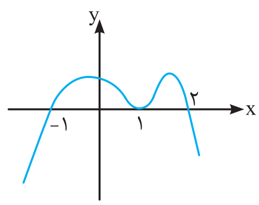


مثال ۳: با توجه به نمودار $y=(x-۲)P(x)$ که به صورت زیر است، تعیین کنید که $x=۲$ ریشهٔ مرتبهٔ زوج $P(x)$ است یا مرتبهٔ فرد.



پاسخ دقت کنید که نمودار $(x-۲)P(x)$ در $x=۲$ ریشهٔ «ز» دارد. این یعنی خود $P(x)$ در این نقطه ریشه‌ای از مرتبهٔ فرد داشته است. بدیهی است که $x=۰$ و $x=۳$ هر دو ریشه‌های مرتبهٔ فرد $(x-۲)P(x)$ هستند و البته عامل $(x-۲)$ تأثیری در مرتبهٔ آن‌ها ندارد. بنابراین $x=۰,۳$ برای $P(x)$ نیز ریشه‌هایی با مرتبهٔ فرد هستند.

مثال ۴: نمودار $y=(x-۱)P(x)$ به‌صورت زیر است. تابع $xP(x)$ را تعیین علامت کنید.



پاسخ از نمودار $(x-۱)P(x)$ معلوم است $x=۱$ ریشه‌ای با مرتبهٔ زوج برای $(x-۱)P(x)$ است. پس حتماً برای $P(x)$، ریشه‌ای با مرتبهٔ فرد است. $x=۲$ و $x=-۱$ نیز ریشه‌های $(x-۱)P(x)$ هستند و چون $(x-۱)$ تأثیری بر مرتبهٔ آن‌ها ندارد، پس $x=-۱$ و $x=۲$ برای $P(x)$ نیز ریشه‌هایی با مرتبهٔ فرد هستند.

از طرفی $xP(x)$ یک ریشهٔ دیگر نیز دارد که $x=۰$ از مرتبهٔ یک است. بنابراین کلاً داریم:

x		−۱		۰		۱		۲	
xP(x)	−	۰	+	۰	−	۰	+	۰	−

سمت راست نمودار در yهای منفی قرار دارد.

۴ تعیین علامت توابع یکنوا

۱ به‌طورکلی توابع اکیداً صعودی، اگر ریشه‌ای داشته باشند، جدول تعیین علامت آن‌ها به‌صورت زیر است:

x		$x_۱$	
اکیداً صعودی f(x)	−	۰	+

۲ توابع اکیداًنزولی مانند $g(x)$ اگر ریشه داشته باشند، جدول تعیین علامتی به صورت زیر دارند:

x		$x_۱$	
اکیداً نزولی g(x)	+	۰	−

توجه: در همهٔ حالت‌ها باید حواسمان به دامنه باشد.

۵ نامعادلات جبری

برای حل نامعادلهٔ $A(x)\le B(x)<C(x)$ باید دو نامعادلهٔ زیر را حل کرده و اشتراک بگیریم:

الف) $A(x)\le B(x)$

ب) $B(x)<C(x)$

مثال ۵: نامعادلهٔ $۳x-۱<۲x+۱<x+۵$ را حل کنید.

پاسخ باید دو نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

۱ $۳x-۱<۲x+۱\Rightarrow x<۲$

۲ $۲x+۱<x+۵\Rightarrow x<۴$

حال اشتراک می‌گیریم: ۱ $\cap$ ۲ $=(-\infty,۲)$

۶ نامعادلات شامل قدرمطلق

نامعادلهٔ $|A(x)|\le b$ که در آن b عددی مثبت است با نامعادلهٔ $-b\le A(x)\le b$ معادل است.

نکتهٔ طلایی: اگر بخواهیم $a<f(x)<b$ را به‌صورت یک نامعادلهٔ قدرمطلقی نمایش دهیم کافی است قرار دهیم: $m=\frac{a+b}{۲}$, $n=\frac{b-a}{۲}$.
در این صورت نامعادلهٔ $a<f(x)<b$ با $|f(x)-m|<n$ معادل خواهد بود.

مثال ۶: $|۲x+۱|<۵$ را حل کنید.

پاسخ در این سؤال داریم:

$$-۵<۲x+۱<۵\xrightarrow{-۱}-۶<۲x<۴\xrightarrow{\div ۲}-۳<x<۲$$

۷ قضیه

به‌طورکلی نمی‌توان دو طرف یک نامساوی را در عبارتی دلخواه ضرب یا تقسیم کرد. مگر اینکه «مطمئن باشیم آن عبارت مثبت باشد» حتی دو طرف نامعادله را نمی‌توان به توان ۲ رساند. مگر اینکه «مطمئن باشیم دو طرف نامنفی هستند.»

نکته: در بعضی مسائل محدودیت‌های دامنه یا حتی گاهی خود صورت سؤال، شرایطی مانند $x>۱$ را ایجاد می‌کنند. این باعث می‌شود که مثلاً $۲x+۱$ عبارتی مثبت شود.

قبلاً نیز در جدول داده شده، عبارت‌هایی را دیدیم که همواره نامنفی هستند. چنین عبارت‌هایی در حل نامعادله، فوق‌العاده مهم و مفید هستند.

فصل هشتم: تابع

۱ تعریف تابع و دامنه و برد آن

۱ مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب، که مؤلفه‌های اول تکراری نداشته باشند، تشکیل یک تابع می‌دهند. به مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های اول، دامنه و مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های دوم، برد می‌گویند.

◂ برای نمونه: مجموعهٔ $f=\{(۱,۵),(۲,۷),(۳,۲۰),(۴,۲۰)\}$ یک تابع را نمایش می‌دهد. دامنهٔ آن $D_f=\{۱,۲,۳,۴\}$ و برد آن $R_f=\{۵,۷,۲۰\}$ است. همان‌طور که می‌بینید اشکالی ندارد که مؤلفه‌های دوم تکراری باشند.

مثال ۱: y و x را به‌نحوی بیابید که مجموعهٔ $g=\{(۱,x+۳),(۲,۵),(۲,y-۲),(۱,۶)\}$، یک تابع باشد.

پاسخ اولین مشکلی که باید حل کنیم، وجود مؤلفهٔ تکراری ۱ در $(۱,x+۳)$ و $(۱,۶)$ است. برای حل این مشکل باید کاری کنیم که دو زوج مرتب $(۱,x+۳)$ و $(۱,۶)$ در واقع برابر باشند. پس باید: $x+۳=۶\Rightarrow x=۳$

به نحو مشابهی دو زوج مرتب $(۲,۵)$ و $(۲,y-۲)$ نیز باید برابر باشند:

$y-۲=۵\Rightarrow y=۷$

۲ اگر f یک تابع و $(a,b)\in f$ باشد، می‌نویسیم $b=f(a)$. به‌همین دلیل نمایش $f=\{(a,f(a))\,|\,a\in D_f\}$ نیز مرسوم است.

◂ برای نمونه: مجموعهٔ $f=\{(x,۲x+۱)\,|\,x=۱ \text{ یا } ۲ \text{ یا } ۳\}$ نمایش دیگری از تابع $f=\{(۱,۳),(۲,۵),(۳,۷)\}$ است. همان‌طور که می‌بینید از $(۲,۵)\in f$ در واقع متوجه می‌شویم که $۵=f(۲)=۲\times۲+۱$.

۲ تابع ثابت

تابعی که برد آن فقط شامل یک عضو باشد، تابع **ثابت** نام دارد. برای نمونه توابع زیر همگی نمونه‌هایی از تابع ثابت هستند:

الف $f(x)=۲۰$

ب $f=\{(۱,۵),(۲,۵),(۳,۵),(۱۰,۵)\}$

پ $f(x)=\sin^۲ x+\cos^۲ x$

دقت کنید که در مورد سوم، بنابه اتحاد مثلثاتی مهمی که می‌شناسیم، $f(x)=۱$ است. از همین رو تابعی ثابت است.

مثال ۲: اگر $f=\{(۱,۲x+۱),(۲,۵),(۳,y-۲)\}$ تابعی ثابت باشد، $x+y$ را بیابید.

پاسخ در این‌جا چون f تابعی ثابت است و $f(۲)=۵$ است، پس باید $f(۱)=f(۳)=۵$ باشند. این یعنی:

$$\begin{cases}۲x+۱=۵\\ y-۲=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۲\\ y=۷\end{cases}\Rightarrow x+y=۹$$

۳ تابع همانی

به تابعی مانند $f(x)$ که به ازای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $f(x)=x$ تابع **همانی** می‌گویند.

مثال ۳: b و a را به نحوی بیابید تا تابع $f(x)=\dfrac{ax^۲+bx+۱۰}{۳x+\frac{۱۰}{x}+۲}$ در دامنه‌اش، تابع همانی باشد.

پاسخ به پاسخ این مثال خوب دقت کنید. باید کاری کنیم که ضابطهٔ $f(x)$ بعد از ساده شدن به‌صورت $f(x)=x$ درآید. این یعنی:

$$\frac{ax^۲+bx+۱۰}{۳x+\frac{۱۰}{x}+۲}=x\Rightarrow ax^۲+bx+۱۰=۳x^۲+۲x+۱۰ \quad ①$$

نکتهٔ بسیار مهم این است که ① یک معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب x نیست. در واقع ① اصلاً معادله نیست، بلکه اتحاد است. دلیل این‌که ① معادله نمی‌باشد، به خاطر ماهیت x است. x در توابع متغیر است نه مجهول. یعنی مقدار x از قبل به‌وسیلهٔ دامنهٔ $f(x)$ تعیین شده است و لازم نیست آن را پیدا کنیم. کاری که باید بکنیم این است که دو طرف ① را مانند یک اتحاد برابر کنیم و این یعنی باید ضرایب هر جمله در دو طرف تساوی برابر باشند: $a=۳\ ,\ b=۲\ ,\ ۱۰=۱۰$

نکتهٔ طلایی: اگر بخواهیم دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را با هم مساوی یا برابر قرار دهیم، باید به تساوی $f(x)=g(x)$ به چشم اتحاد نگاه کنیم. اما اگر بخواهیم نقطهٔ تلاقی دو نمودار $y=f(x)$ و $y=g(x)$ را به‌دست آوریم، باید $f(x)=g(x)$ را به عنوان یک معادله حل کنیم و مقدار یا مقادیر x را پیدا کنیم.

مثال ۴: فرض کنید $f(x)=x^۲+۳x+۲$ باشد. b و a را به نحوی بیابید تا $f(x+۱)=x^۲+ax+b$ باشد.

پاسخ در این مسئله می‌خواهیم دو تابع $f(x+۱)$ و $g(x)=x^۲+ax+b$ با هم برابر باشند. (خودمان برای راحتی روی تابع دوم اسم گذاشتیم). این یعنی تساوی داده شده یک اتحاد است. پس:

$$f(x+۱)=x^۲+ax+b\Rightarrow(x+۱)^۲+۳(x+۱)+۲=x^۲+ax+b$$

$$\Rightarrow x^۲+۵x+۶=x^۲+ax+b\Rightarrow a=۵\,,\,b=۶$$

مثال ۵: دو نمودار $y=x^۲+۱$ و $y=x+۳$ در چه نقاطی تلاقی دارند؟

پاسخ در این‌جا که دنبال نقطهٔ تلاقی هستیم، در واقع باید معادلهٔ $x^۲+۱=x+۳$ را حل کنیم که روش حل آن نیز به‌صورت زیر است:

$$x^۲+۱=x+۳\Rightarrow x^۲-x-۲=۰\Rightarrow(x-۲)(x+۱)=۰\Rightarrow x=۲ \text{ یا } x=-۱$$

دقت کنید فعلاً فقط طول نقاط تلاقی به‌دست آمده‌اند. با قرار دادن در ضابطهٔ هر کدام از توابع بالا، عرض نقاط تلاقی نیز به‌دست می‌آید:

$x=۲\Rightarrow A(۲,۵)$

$x=-۱\Rightarrow B(-۱,۲)$

۴ تابع خطی

تابع به فرم $f(x)=ax+b$ را تابع **خطی** می‌گویند. توابع خطی با نقطه‌گذاری، به سادگی رسم می‌شوند. در هر تابع خطی پیدا کردن a و b مهم‌ترین کاری است که باید بکنیم. به a شیب و به b عرض از مبدأ می‌گوییم.

فصل چهاردهم: کاربرد مشتق

۱ یکنوایی توابع مشتق‌پذیر

۱ برای تعیین این‌که تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ در چه بازه‌ای صعودی یا نزولی است، باید $f'(x)$ را تعیین علامت کنیم.

مثال۱: تابع $f(x)=\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۲}{۲}-۲x+۱$ در چه بازه‌ای نزولی است؟

پاسخ ابتدا $f'(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=x^۲-x-۲=(x-۲)(x+۱)$$

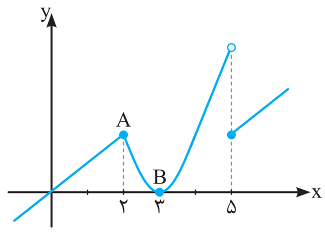
حالا با تعیین علامت کردن $f'(x)$، می‌فهمیم که $f(x)$ در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است.

x		−۱		۲	
f'(x)	+	∘	−	∘	+
f(x)	↗ صعودی		↘ نزولی		↗ صعودی

همان‌طور که می‌بینید $f(x)$ در بازهٔ $(-۱,۲)$ نزولی است. البته $f(x)$ روی هر زیرمجموعه‌ای از این بازه هم، نزولی است.

توجه: در مثال (۱) جدول تعیین علامت $f'(x)$ نشان می‌دهد که $f(x)$ روی بازه‌های $(-\infty,-۱)$ و $(۲,+\infty)$ صعودی است. دقت داشته باشید که مجاز نیستیم از بازه‌های یکنوایی اجتماع بگیریم. مثلاً همین تابع، در مجموعهٔ $(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$ یکنوا نیست. به مثال زیر دقت کنید.

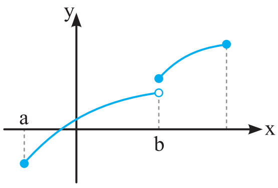
مثال۲: نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر است. دربارهٔ یکنوایی $f(x)$ در بازه‌های مختلف بحث کنید.



پاسخ تابع $f(x)$ در بازهٔ $(-\infty,۲)$ اکیداً صعودی است. در بازهٔ $(۲,۳)$ اکیداً نزولی است. در بازهٔ $(۳,۵)$ هم اکیداً صعودی است. دقت کنید که تابع $f(x)$ در $(-\infty,۲)\cup(۳,۵)$ صعودی نیست. در ضمن $f(x)$ در بازهٔ $(۵,+\infty)$ صعودی است. اما در $x=۵$ تابع یک «فرود لحظه‌ای» دارد، پس در بازهٔ $(۳,+\infty)$ صعودی نیست.

وضعیت نقطهٔ $x=۵$ در این مثال، خاص است. قضیهٔ بعدی دربارهٔ چنین وضعیتی است.

۲ فرض کنید $f(x)$ در بازه‌های $[a,b)$ و $[b,c]$ صعودی باشد. اگر $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\le \lim\limits_{x\to b^+} f(x)$ باشد، آن‌گاه $f(x)$ در بازهٔ $[a,c]$ صعودی است.



معمولاً در مواجهه با توابع چندضابطه‌ای، از این قضیهٔ مفید استفاده می‌کنیم.

مثال۳: حدود a را به نحوی بیابید تا تابع $f(x)=\begin{cases}۲x+a & ; \quad x\ge ۱\\ x^۳+x+۲ & ; \quad x<۱\end{cases}$ روی مجموعهٔ اعداد حقیقی صعودی باشد.

پاسخ برای $x<۱$ ضابطهٔ $f(x)$ به صورت $f(x)=x^۳+x+۲$ است. اگر از این ضابطه مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$f'(x)=۳x^۲+۱\Rightarrow f'(x)>۰\Rightarrow f(x) \text{ اکیداً صعودی}$$

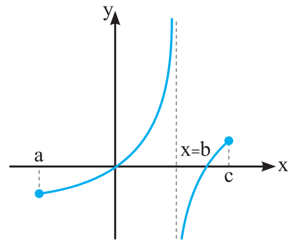
بنابراین $f(x)$ در بازهٔ $(-\infty,۱)$ اکیداً صعودی است.

برای $x\ge ۱$ هم ضابطهٔ $f(x)=۲x+a$، یک تابع خطی با شیب $+۲$ است. بنابراین در این حالت نیز $f(x)$ صعودی است.

در نتیجه $f(x)$ در بازه‌های $(-\infty,۱)$ و $[۱,+\infty)$ صعودی است. حال حد چپ و راست را می‌یابیم: $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)\le \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)\Rightarrow ۴\le ۲+a\Rightarrow ۲\le a$

۳ اگر $f(x)$ در بازه‌های (a,b) و $[b,c)$ نزولی باشد و $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\ge \lim\limits_{x\to b^+} f(x)$ باشد، آن‌گاه $f(x)$ در بازهٔ (a,c) نزولی است.

۴ تابعی که مجانب قائم داشته باشد و در دو طرف مجانب قائم خود تعریف شود، نمی‌تواند یکنوا باشد. به نمودار زیر دقت کنید:



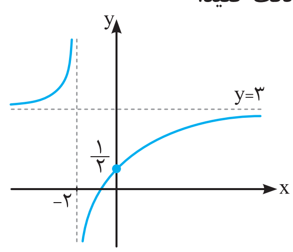
مثال۴: صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x)=\frac{۳x+۱}{x+۲}$ را روی دامنهٔ آن، مشخص کنید.

پاسخ مشتق این تابع برابر است با:

$$f'(x)=\frac{۶-۱}{(x+۲)^۲}=\frac{۵}{(x+۲)^۲}\Rightarrow f'(x)>۰$$

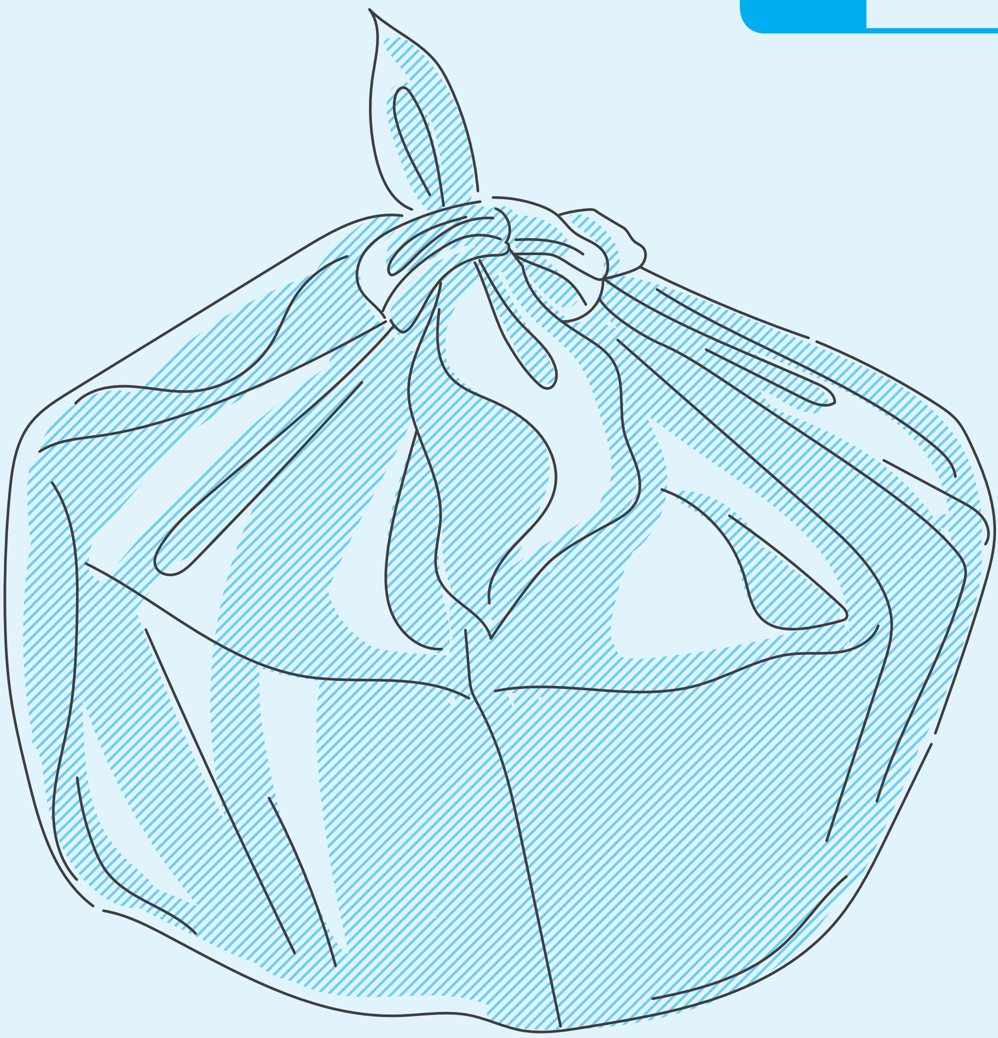
با این‌که $f'(x)$ در همهٔ اعداد حقیقی مقداری مثبت است، نتیجه نمی‌گیریم که $f(x)$ صعودی است. در واقع $x=-۲$ مجانب قائم $f(x)$ است و تنها چیزی که می‌توان گفت این است که $f(x)$ در بازه‌های $(-\infty,-۲)$ یا $(-۲,+\infty)$ صعودی است. حتی در اجتماع این بازه‌ها هم صعودی نیست.

به نمودار $y=f(x)$ دقت کنید:



توجه: گاهی سؤال نمودار $y=f'(x)$ را می‌دهد و دربارهٔ یکنوایی $f(x)$ سؤالاتی می‌پرسد. به مثال زیر دقت کنید.

بخش ۲



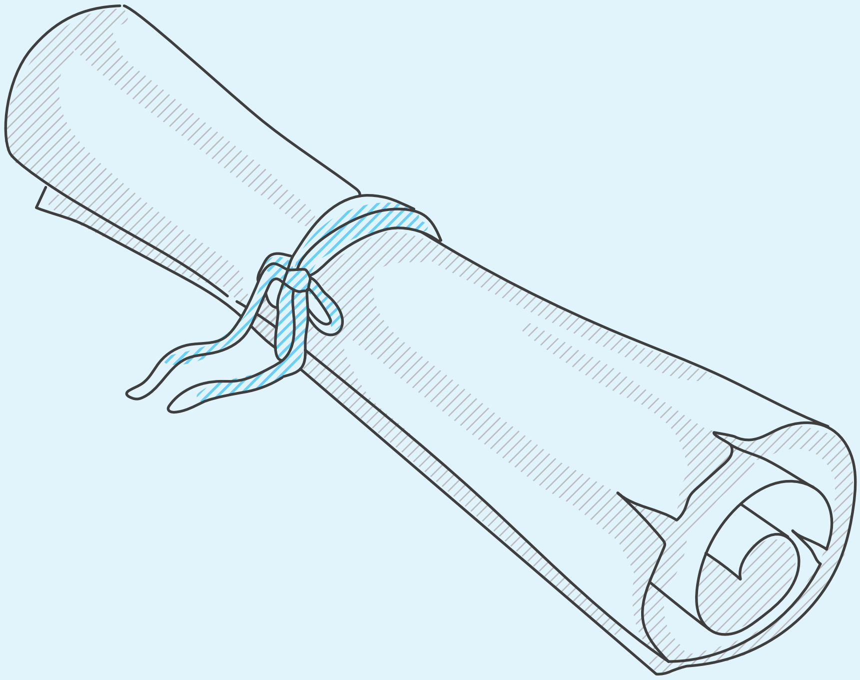
آزمون‌های جامع

چون هدف ما یادگیری اصولی و حرفه‌ای شماست؛ آزمون‌ها به‌صورتی طبقه‌بندی شده‌اند که هر کدام از تست‌ها قرار است تجربه‌ای به شما یاد بدهد. هر آزمون به تفکیک مباحث آزمون‌های قلم چی و گزینهٔ ۲ مشخص شده است. معمولاً توی هر آزمون، تست‌ها از مطالب مختلف با هم ترکیب شده‌اند، این کار برای جلوگیری از شرطی و کلیشه‌ای شدن ذهن است به همین خاطر چیدمان سؤالات در نوع خودش منحصر به فرد است.

پیشنهاد ما این است که کتاب را به قصد یادگیری مفهومی و آشنایی با سؤالات جدید بخوانید و نگران درصد و وقت نباشید. مدت زمان پاسخگویی به هر آزمون را از قبل برای خود تعیین کنید (هر تست تقریباً ۹۰ ثانیه) و به آن پایبند باشید و مانند یک نبرد جانانه با تست روبه‌رو شوید. اگر سؤالی رو درست حل کرده بودید حتماً پاسخنامه هم بخوانید. مطمئن باشید که نکات جالب و مهمی دارد و با مقایسه با راه حل خودتان تجربهٔ بهتری کسب خواهید کرد.

قهرمان‌ها شروع کنید.

بخش ۳



پاسخ‌نامه تشریحی

حل تشریحی و کامل تست‌های موجود در بخش‌های مختلف این کتاب را خواهید دید به‌طوری که سعی کرده‌ایم ساده‌ترین و سریع‌ترین روش‌های حل تست‌ها را با توجه به سطح مطالب کتاب درسی برای شما عزیزان بنویسیم تا با خواندن و مطالعهٔ آن‌ها و مقایسه با راه حل خودتان کوله‌بارتان را پربارتر کنید. بعضی تست‌ها را با چند روش حل کردیم و گاهی هم لابه‌لای حل تست‌ها، نکات کلیدی و جالبی را ذکر کردیم. پس سعی کنید با دقت زیاد بخوانید تا از راه حل‌ها لذت ببرید.

توصیه می‌کنیم که اگر نتوانستید یک سؤال را کامل حل کنید یا اینکه به پاسخ درست نرسیدید، سریعاً به پاسخ‌نامه مراجعه نکنید بلکه ابتدا به درسنامهٔ مربوط مراجعه کنید و اشکال کارتان را پیدا کنید و مجدداً سعی کنید سؤال را حل کنید. با این کار تجربهٔ شما بیشتر می‌شود و اشتباهاتتان کمتر.

۱. گزینه ۲

اولاً چون $\sqrt{x^4+4x-8}\ge 0$ پس $2+x\ge 0$، بنابراین $x\ge -2$. دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^4+4x-8=4+4x+x^2 \Rightarrow x^4-x^2-12=0$$

$$\Rightarrow (x^2-4)\underbrace{(x^2+3)}_{\text{همواره مثبت}}=0\Rightarrow x^2-4=0\Rightarrow x=\pm 2$$

که هر دو جواب قابل قبول هستند، پس معادله دارای دو جواب حقیقی است.

۲. گزینه ۴

طرفین تساوی را در $(2x+3)(2x+1)$ ضرب می‌کنیم:

$$(3-x)(2x+1)+(x-1)(2x+3)=7(2x+3)(2x+1)$$

$$\Rightarrow 6x=28x^2+56x+21 \Rightarrow 28x^2+50x+21=0$$

با توجه به این‌که $\Delta>0$ است و $S=-\frac{b}{a}$، بنابراین مجموع ریشه‌ها برابر $S=\frac{-50}{28}=\frac{-25}{14}$ است.

۳. گزینه ۱

با توجه به ضرب و جمع ریشه‌ها داریم: $\alpha+\beta=m\ ,\ \alpha\beta=3-m$

ولی با توجه به فرض مسئله $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=2$ نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{m}{3-m}=2\Rightarrow m=6-2m\Rightarrow m=2$$

بنابراین: $\alpha^2+\beta^2=S^2-2P=2^2-2(1)=2$

۴. گزینه ۲

از تغییر متغیر $\sqrt{x^2+4x+5}=T$ کمک می‌گیریم. دقت کنید که $T\ge 0$ است. از اینجا داریم:

$$x^2+4x+5=T^2\Rightarrow x^2+4x+3=T^2-2$$

بنابراین: $T^2-2=T\Rightarrow T^2-T-2=0$

با تجزیهٔ این عبارت داریم:

$$(T-2)(T+1)=0\Rightarrow T=2 \text{ یا } T=-1\xrightarrow{T\ge 0}T=2$$

بنابراین $T=2$ است. در نتیجه داریم:

$$\sqrt{x^2+4x+5}=2\Rightarrow x^2+4x+5=4\Rightarrow x^2+4x+1=0$$

در معادلهٔ اخیر $\Delta>0$ است، پس: $x_1x_2=\frac{c}{a}=1$

۵. گزینه ۲

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند، آن‌گاه $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ ریشه‌های معادله $cx^2+bx+a=0$ است. بنابراین x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $3x^2+ax+2=0$ هستند. $x_1+x_2=-\frac{a}{3}, x_1x_2=\frac{2}{3}$

بنابراین معادلهٔ مطلوب به‌صورت زیر است: $S=\frac{2-a}{3}\ ,\ P=\frac{-2a}{9}$

$$x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-\frac{2-a}{3}x-\frac{2a}{9}=0$$

$$\xrightarrow{\times 9}9x^2-3(2-a)x-2a=0$$

۶. گزینه ۴

با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌توان نوشت:

$$x+6+2\sqrt{x+5}=x+5+2\sqrt{x+5}+1=(\sqrt{x+5}+1)^2$$

در نتیجه داریم:

$$\sqrt{x+6+2\sqrt{x+5}}-1=\sqrt{-x+20}\Rightarrow\sqrt{(\sqrt{x+5}+1)^2}-1$$

$$=\sqrt{-x+20}\Rightarrow\sqrt{x+5}=\sqrt{-x+20}$$

$$\Rightarrow x+5=-x+20\Rightarrow 2x=15\Rightarrow x=\frac{15}{2}$$

که جواب فوق قابل قبول است. (حتماً یک‌بار آن را چک کنید)

۷. گزینه ۱

با توجه به نکتهٔ گفته شده داریم:

$$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+6})\Rightarrow\frac{1}{2}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+6})=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x}-\frac{1}{x+6}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{6}{x(x+6)}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x^2+6x-18=0$$

بنابراین $\Delta>0$ و پس $x_1+x_2=-6$ (هیچ‌کدام از ریشه‌ها هیچ مخرجی را صفر نمی‌کنند، چرا؟)

۸. گزینه ۳

از تغییر متغیر $x^2-2x=T$ کمک می‌گیریم. داریم:

$$T^2-T=2\Rightarrow T^2-T-2=0\Rightarrow(T-2)(T+1)=0$$

پس $T=-1$ یا $T=2$. بنابراین:

① $x^2-2x=2\Rightarrow x^2-2x-2=0$

② $x^2-2x=-1\Rightarrow x^2-2x+1=0$

معادلهٔ اول $\Delta>0$ است و دو ریشهٔ حقیقی دارد. معادلهٔ دوم یک ریشهٔ مضاعف $x=1$ دارد. از آن‌جا که $x=1$ ریشهٔ معادلهٔ اول نیست، پس در کل این معادله سه ریشه دارد.

۹. گزینه ۲

از تغییر متغیر $x^2=T$ کمک می‌گیریم. از آن‌جا که هر مقدار مثبت T، دو مقدار حقیقی برای x ایجاب می‌کند، پس باید معادلهٔ $T^2-(m+2)T+m+5=0$ دو جواب حقیقی مثبت داشته باشد. لذا در این مسئله باید $\Delta>0$، $S>0$ و $P>0$. بنابراین:

$$S=(m+2)>0\Rightarrow m>-2$$

$$P=m+5>0\Rightarrow m>-5$$

تا همین‌جا با اشتراک گرفتن از همین دو قسمت اول، معلوم می‌شود که $m>-2$ است. (گزینه‌های «۱» و «۳» رد می‌شوند.)

اینک برای $\Delta>0$ داریم: $\Delta=(m+2)^2-4(m+5)=m^2-16>0$

$$\Rightarrow(m-4)(m+4)>0$$

اما چون $m>-2$ پس $m+4$ حتماً مثبت است، یعنی می‌ماند:

$$m-4>0\Rightarrow m>4$$

از اشتراک $m>4$ و $m>-2$ به جواب مسئله، یعنی $m>4$ می‌رسیم.

۱۰. گزینه ۳

فرض کنیم ریشه‌ها α و β باشند. در این‌صورت:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{b}{c}=-\frac{-1}{-3}=-\frac{1}{3}$$

و از طرفی $\alpha\beta=-\frac{3}{m}$. این یعنی، طبق صورت مسئله باید معادلهٔ مقابل را حل کنیم:

$$-\frac{1}{3}=2(-\frac{3}{m})\Rightarrow m=18$$

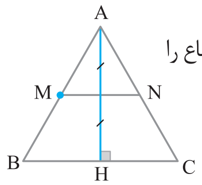
(۲) فاصلهٔ وسط قطر تا یک رأس = نصف قطر = $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

در این مسئله حالت اول پیش آمده است:

$$\frac{a}{2}=\frac{|2(-1)-3-5|}{\sqrt{4+1}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$
$$\Rightarrow a=4\sqrt{5}\Rightarrow S=(4\sqrt{5})^2=80$$

۱۱. گزینه ۳

خطی که وسط AB را به وسط AC وصل می‌کند، ارتفاع را نصف می‌کند. (چقدر خوب است هندسه بدانیم!)



$$m_{BC}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{-2-4}{0-3}=2$$
$$\Rightarrow L_{BC}: y+2=2(x-0)\Rightarrow y-2x+2=0$$
$$AH=\frac{|-1-4+2|}{\sqrt{1+4}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

بنابراین فاصلهٔ خواسته شده برابر است با:

$$\frac{AH}{2}=\frac{3}{2\sqrt{5}}$$

۱۲. گزینه ۱

دو مرحله داریم:

مرحلهٔ اول: تقاطع خطوط را دو به دو پیدا می‌کنیم:

$$A\begin{cases}y=3x\\y=-2x+6\end{cases}\Rightarrow x=\frac{6}{5}\ ,\ y=\frac{18}{5}\Rightarrow A(\frac{6}{5},\frac{18}{5})$$
$$B\begin{cases}y=3x\\y=x+1\end{cases}\Rightarrow B(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$$
$$C\begin{cases}y=x+1\\y=-2x+6\end{cases}\Rightarrow C(\frac{5}{3},\frac{8}{3})$$

مرحلهٔ دوم: مساحت را به کمک قاعدهٔ بند کفشی محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccc}A & \frac{6}{5} & \frac{18}{5}\\ B & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ C & \frac{5}{3} & \frac{8}{3}\\ A & \frac{6}{5} & \frac{18}{5}\end{array}$$

$$S=\frac{1}{2}\left|(\frac{9}{5}+\frac{4}{3}+6)-(\frac{9}{5}+\frac{5}{2}+\frac{16}{5})\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{137}{15}-\frac{75}{10}\right|=\frac{49}{60}$$

۱۳. گزینه ۱

AB در ناحیهٔ دوم است به شرطی که هم A و هم B در ناحیهٔ دوم باشند:

$$x_A, x_B<0\ ,\ y_A, y_B>0$$
$$\begin{cases}m-1<0\\-3<0\\m>0\\m+2>0\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}0<m<1$$

۱۴. گزینه ۴

برای این‌که AB محور x را قطع کند، باید $y_Ay_B<0$ و برای این‌که AB محور y را قطع کند، باید $x_Ax_B<0$ در نتیجه داریم:

$$(m-2)(\frac{2}{m})<0\Rightarrow$$

m		۰		۲	
$\frac{2m-4}{m}$	+	ت‌ن	−	۰	+
			جواب		

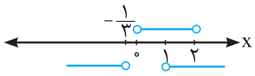
$$(1-m)(3m+1)<0\Rightarrow$$

m		$-\frac{1}{3}$		۱	
(۱-m)(۳m+۱)	−	۰	+	۰	−
	جواب				جواب

بنابراین:

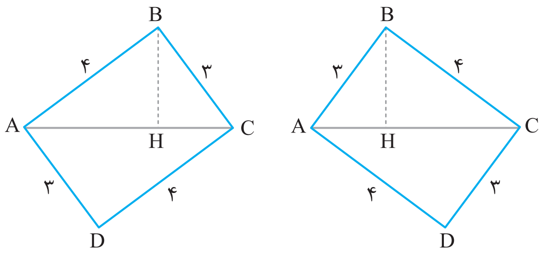
$$(1)\cap(2)=(0,2)\cap((-\infty,-\frac{1}{3})\cup(1,\infty))=(1,2)$$

البته ساده‌تر است اشتراک‌ها را روی محور بگیریم:



۱۵. گزینه ۱

روش اول: مستطیل ABCD به این صورت است:



حالت (۱) حالت (۲)

طبق قضیهٔ فیثاغورس $AC=\sqrt{3^2+4^2}=5$ است، بنابراین:

$$BH=\frac{AB.BC}{AC}=\frac{12}{5}$$

در حالت ۱ داریم:

$$AH=\sqrt{16-BH^2}=\sqrt{16-\frac{144}{25}}=\sqrt{\frac{256}{25}}=\frac{16}{5}$$

بنابراین:

$$m_{AB}=\frac{BH}{AH}=\frac{\frac{12}{5}}{\frac{16}{5}}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$$

و در حالت ۲ به وضوح برابر $-\frac{3}{4}$ است.

روش دوم: حالت ۱ را در نظر بگیرید. مثلث‌های ABH و ABC متشابه هستند. بنابراین:

$$m_{AB}=\frac{BH}{AH}=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{4}$$

حالت ۲ نیز به همین صورت است.

۱. گزینه ۲

$$\frac{3x^2+x-2}{x^2-1}<1\Rightarrow\frac{3x^2+x-2}{x^2-1}-1<0\Rightarrow\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}<0$$

با تجزیهٔ صورت و مخرج خواهیم داشت:

$$\frac{(2x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}<0$$

کافی است حواسمان باشد که عبارت بالا در $x=-1$ تعریف نمی‌شود. بنابراین جدول تعیین علامت به صورت زیر است:

x		۱-		$\frac{1}{2}$		۱	
عبارت	+	ت‌ن	+	۰	−	ت‌ن	+

$$\Rightarrow x\in(\frac{1}{2},1)$$

۲. گزینه ۱

ابتدا شرط دامنه، $x\geq\frac{1}{2}$ است.

با توجه به اینکه دو طرف نامعادله نامنفی است، با به توان ۲ رساندن طرفین خواهیم داشت:

$$|3x-2|<\sqrt{2x-1}\Rightarrow 9x^2-12x+4<2x-1\Rightarrow 9x^2-14x+5<0$$

حال به راحتی داریم:

$$f(x)+f(۲-x)=\frac{۱}{۱+۲^{۱-x}}+\frac{۱}{۱+۳^{۱-x}}+\frac{۱}{۱+۲^{x-۱}}+\frac{۱}{۱+۳^{x-۱}}$$

$$=۱+۱=۲$$

بنابراین:

$$f(۰/۱)+f(۰/۲)+\cdots+f(۱/۹)$$

$$=(f(۰/۱)+f(۱/۹))+(f(۰/۲)+f(۱/۸))+\cdots$$

$$+(f(۰/۹)+f(۱/۱))+f(۱)=۲+۲+\cdots+۲+f(۱)$$

$$=۱۸+f(۱)$$

از طرفی بدیهی است که:

$$f(۱)=\frac{۱}{۱+۲^{۰}}+\frac{۱}{۱+۳^{۰}}=۱$$

بنابراین:

$$۱۸+f(۱)=۱۸+۱=۱۹$$

۱۴. گزینه ۳

تابع $f(x)$ برای $x\le ۰$ تابعی ثابت است. پس برای این‌که $fof(x)$ تابعی ثابت باشد، باید $f(x)\le ۰$ باشد.

$$f(x)=\begin{cases}ax^{۲}+۳x-۱ & ; \quad x>۰\\ -۳ & ; \quad x\le ۰\end{cases}$$

برای $x\le ۰$ که $f(x)$ منفی است و مشکلی نداریم.

برای $x>۰$ باید کاری کنیم که $ax^{۲}+۳x-۱\le ۰$ باشد. از این‌جا نتیجه می‌گیریم که $a<۰$ است. حال اگر عبارت $ax^{۲}+۳x-۱$ ریشه‌ای داشته باشد، چون $x_{۱}x_{۲}=-\frac{۱}{a}>۰$ و $x_{۱}+x_{۲}=-\frac{۳}{a}>۰$ پس خودبه‌خود هر دو ریشه مثبت خواهند بود. این باعث می‌شود که $ax^{۲}+۳x-۱$ در $x>۰$ تغییر علامت دهد.

بنابراین باید $\Delta<۰$ باشد. یعنی:

$$۹+۴a<۰\Rightarrow a<-\frac{۹}{۴}$$

۱۵. گزینه ۱

برای محاسبهٔ $gof(x)$ تمام مقادیر دامنهٔ $f(x)$ را بررسی می‌کنیم:

$$x=۱\ :\ ۱\xrightarrow{f}۵\longrightarrow c-۱\Rightarrow(۱,c-۱)\in gof$$

از این‌جا داریم $c-۱=۱۰$، یعنی $c=۱۱$.

$$x=۲\ :\ ۲\xrightarrow{f}a\xrightarrow{?}$$

معلوم نیست که $a\in D_g$ است یا نه. اما چون $۲\notin D_{gof}$ پس نیازی به بررسی هم ندارد. (در واقع همین یعنی $a\notin D_g$)

از آن‌جا که $(۳,۳)\in gof$، پس:

$$x=۳\ :\ ۳\xrightarrow{f}b+۱\xrightarrow{g}۳$$

این یعنی:

$$g(b+۱)=۳\Rightarrow b+۱=۴\Rightarrow b=۳$$

بنابراین $b+c=۱۴$.

۱. گزینه ۳

فرض کنید $f(x)=x^{۳}+kx^{۲}$. انتقال افقی به معنای $f(x+a)$ است. بنابراین:

$$f(x+a)=(x+a)^{۳}+k(x+a)^{۲}=x^{۳}+mx+۲$$

بنابراین:

$$x^{۳}+(۳a+k)x^{۲}+(۳a^{۲}+۲ak)x+ka^{۲}=x^{۳}+mx+۲$$

بنابراین:

$$\begin{cases}۳a+k=۰\\ ka^{۲}=۲\\ ۳a^{۲}+۲ak=m\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=-۳a\\ -۳a^{۳}=۲\Rightarrow a=\sqrt[۳]{-\frac{۲}{۳}}\end{cases}$$

بنابراین $k=۳\sqrt[۳]{\frac{۲}{۳}}$.

در نتیجه:

$$m=۳a^{۲}+۲ak=۳\sqrt[۳]{\frac{۴}{۹}}-۶\sqrt[۳]{\frac{۴}{۹}}=-۳\sqrt[۳]{\frac{۴}{۹}}=-\sqrt[۳]{۱۲}$$

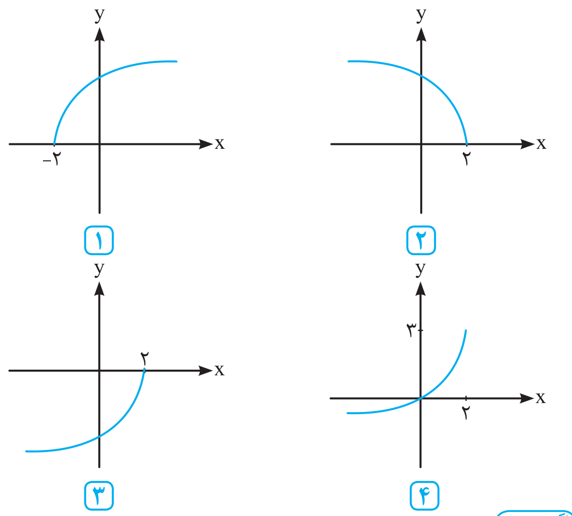
۲. گزینه ۲

گام اول نمودار $y=\sqrt{x}$ را ۲ واحد به سمت چپ می‌بریم: $y=\sqrt{۲+x}$

گام دوم نسبت به y ها قرینه می‌کنیم: $y=\sqrt{۲-x}$

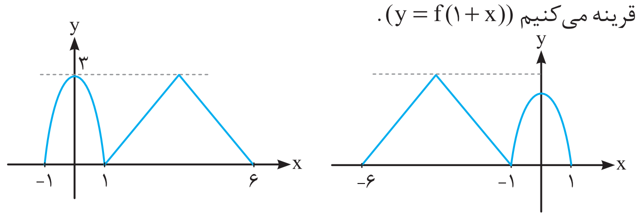
گام سوم نسبت به x ها قرینه می‌کنیم: $y=-\sqrt{۲-x}$

گام چهارم ۳ واحد بالا می‌بریم: $y=۳-\sqrt{۲-x}$



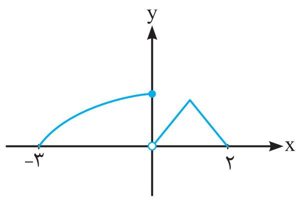
۳. گزینه ۱

اول ۱ واحد به راست انتقال می‌دهیم $(y=f(۱-x))$، سپس نسبت به y ها قرینه می‌کنیم $(y=f(۱+x))$.

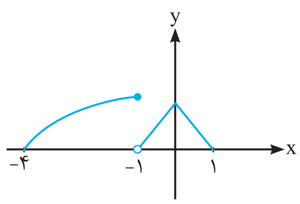


۴. گزینه ۳

ابتدا به کمک $y=f(|x|-۱)$ (نیمهٔ راست) و $y=f(-|x|-۱)$ (نیمهٔ چپ) نمودار $y=f(x-۱)$ را رسم می‌کنیم.



حال یک واحد انتقال به چپ داریم:



۵. گزینه ۴

۲ واحد به سمت راست: $f(x-۲)=|x-۵|+x-۲$

۳ واحد به سمت پایین: $f(x-۲)-۳=|x-۵|+x-۵$

بنابراین: $g(x)=|x-۵|+x-۵$

$g(۲x)=|۲x-۵|+۲x-۵$

بنابراین:

$$۲f(x)=g(۲x)\Rightarrow ۲|x-۳|+۲x=|۲x-۵|+۲x-۵$$

$$\Rightarrow|۲x-۵|-|۲x-۶|=۵$$

بازه‌بندی می‌کنیم:

۱) $x\ge ۳\Rightarrow(۲x-۵)-(۲x-۶)=۵\Rightarrow ۱=۵$ ✗

۲) $\frac{۵}{۲}<x<۳\Rightarrow ۲x-۵+۲x-۶=۵$

$\Rightarrow ۴x=۱۶\Rightarrow x=۴$ ✗

قابل قبول نیست، زیرا در $\frac{۵}{۲}<x<۳$ صدق نمی‌کند.

۸. گزینه ۴

اول مقدار $g(\frac{\pi}{12})$ را محاسبه می‌کنیم:

$$g(\frac{\pi}{12})=1-\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

در نتیجه باید $f(\frac{1}{2})$ را حساب کنیم:

$$f(\frac{2}{x})=\sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}\xrightarrow{x=4}f(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

۹. گزینه ۱

از اتحاد طلایی $1+\cos 2x=2\cos^2 x$ و اتحاد نصف کمان $\sin 2x=2\sin x\cos x$ کمک می‌گیریم:

$$\frac{4\sin^2 x\cos^2 x}{(1+\cos x)2\cos^2 x}=\frac{2\sin^2 x}{1+\cos x}$$

دوباره همین کار را می‌کنیم:

$$\frac{2(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})^2}{2\cos^2\frac{x}{2}}=4\sin^2\frac{x}{2}$$

۱۰. گزینه ۲

می‌دانیم: $\cot 22/5^\circ=\sqrt{2}+1\ ,\ \tan 22/5^\circ=\sqrt{2}-1$

با قرار دادن در صورت مسئله داریم:

$$\sqrt[3]{\tan 22/5^\circ+\cot 22/5^\circ}=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt[3]{\sqrt{2}^3}=\sqrt{2}$$

۱۱. گزینه ۴

ابتدا داریم:

$$\sin(\frac{\pi}{2}-a)=\cos a\ ,\ \sin(\frac{\pi}{2}-b)=\cos b$$

بنابراین داریم:

$$16\sin a\sin b\cos a\cos b\cos 2a\cos 2b$$
$$=4(2\sin a\cos a)(2\sin b\cos b)(\cos 2a\cos 2b)$$
$$=4\sin 2a\sin 2b\cos 2a\cos 2b$$

با تکرار همین عملیات داریم:

$$(2\sin 2a\cos 2a)(2\sin 2b\cos 2b)=\sin 4a\sin 4b$$

با توجه به شرط مسئله $a+b=\frac{7\pi}{8}$ که نتیجه می‌دهد:

$$4a+4b=\frac{7\pi}{2}\Rightarrow \sin 4b=-\cos 4a$$

در نتیجه داریم:

$$-\sin 4a\cos 4a=-\frac{1}{2}\sin 8a$$

۱۲. گزینه ۱

دقت کنید که:

$$\tan x-\cot x=\tan x-\frac{1}{\tan x}=\frac{\tan^2 x-1}{\tan x}$$

با توجه به اتحاد زیر داریم:

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\Rightarrow\frac{\tan^2 x-1}{\tan x}=\frac{-2}{\tan 2x}=-2\cot 2x$$

نتیجه می‌گیریم: $\tan x-\cot x=-2\cot 2x$

این یعنی: $\cot 2x+\tan x=\cot x-\cot 2x$

در این مسئله داریم: $\cot 40^\circ+\cot 20^\circ+\tan 20^\circ+\tan 10^\circ$

$$=(\cot 40^\circ+\tan 20^\circ)+(\cot 20^\circ+\tan 10^\circ)$$
$$=\cot 20^\circ-\cot 40^\circ+\cot 10^\circ-\cot 20^\circ=\cot 10^\circ-\cot 40^\circ$$

۱۳. گزینه ۴

قرار دهید $y=\tan x$. در این‌صورت:

$$y^2-100y+1=0\Rightarrow y_1+y_2=100\ ,\ y_1y_2=1$$
$$\Rightarrow \tan x_1+\tan x_2=100\ ,\ \tan x_1\tan x_2=1$$

چون $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ است، پس معادله فقط همین دو جواب را دارد. اینک داریم:

$$\tan x_1\tan x_2=1\Rightarrow x_1+x_2=\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow \cos x_2=\sin x_1$$

از طرفی داریم:

$$y_1^2+y_2^2=S^2-2P=100^2-2$$
$$\Rightarrow \tan^2 x_1+\tan^2 x_2=100^2-2$$
$$\Rightarrow(1+\tan^2 x_1)+(1+\tan^2 x_2)=100^2$$
$$\Rightarrow\frac{1}{\cos^2 x_1}+\frac{1}{\cos^2 x_2}=100^2$$
$$\Rightarrow\frac{\cos^2 x_2+\cos^2 x_1}{\cos^2 x_1\cos^2 x_2}=100^2$$
$$\Rightarrow\frac{1}{\cos^2 x_1\cos^2 x_2}=100^2\Rightarrow\cos x_1\cos x_2=\frac{1}{100}$$

۱۴. گزینه ۳

می‌دانیم که:

$$\tan(x-11\frac{\pi}{2})=-\cot x\ ,\ \tan(x+61\pi)=\tan x$$
$$\sin(x-\frac{17\pi}{2})=-\cos x\ ,\ \sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$$

در نتیجه صورت مسئله تبدیل می‌شود به:

$$-\cot x\tan x+(-\cos x\cos x)=-1-\cos^2 x$$

۱۵. گزینه ۲

بنا به تعریف توابع $\tan x$ و $\cot x$ داریم:

$$\frac{\tan^2 x-\sin^2 x}{\cot^2 x-\cos^2 x}=\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\sin^2 x}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-\cos^2 x}=\frac{\sin^4 x-\sin^4 x\cos^2 x}{\cos^4 x-\cos^4 x\sin^2 x}$$
$$=\frac{\sin^4 x(1-\cos^2 x)}{\cos^4 x(1-\sin^2 x)}=\frac{\sin^4 x\sin^2 x}{\cos^4 x\cos^2 x}=\frac{\sin^6 x}{\cos^6 x}=\tan^6 x$$

۱. گزینه ۲

ابتدا دقت کنید که:

$$\frac{1}{\sin 2x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{2\sin x\cos x}=\frac{2\cos^2 x-(\cos 2x)}{2\sin x\cos x}$$
$$=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\cot x-\cot 2x$$

بنابراین در این مسئله داریم:

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\frac{1}{\sin 8x}$$
$$=\cot\frac{x}{2}-\cot x+\cot x-\cot 2x+\cdots+\cot 4x-\cot 8x$$
$$=\cot\frac{x}{2}-\cot 8x$$

۹. گزینهٔ ۳

در جدول زیر برقرار بودن شرط‌ها را در هر ۴ نمودار بررسی می‌کنیم:

نمودار	شرط الف	شرط ب	شرط پ	شرط ت
گزینهٔ ۱	✓	✓	×	×
گزینهٔ ۲	×	✓	✓	✓
گزینهٔ ۳	✓	✓	✓	✓
گزینهٔ ۴	×	✓	×	×

۱۰. گزینهٔ ۱

تابع $f(x)$ را به‌صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{۳x}{۱+۲x} & ; x\geq ۰\\[2mm] \dfrac{۳x}{۱-۲x} & ; x<۰\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{۳}{(۲x+۱)^۲} & ; x\geq ۰\\[2mm] \dfrac{۳}{(۱-۲x)^۲} & ; x<۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}\dfrac{-۱۲}{(۲x+۱)^۳} & ; x>۰\\[2mm] \dfrac{۱۲}{(۱-۲x)^۳} & ; x<۰\end{cases}$$

بدیهی است که: $f'_+(۰)=f'_-(۰)\Rightarrow$ پس خط مماس وجود دارد

ولی: $f''_-(۰)\neq f''_+(۰)$

پس $x=۰$ نقطهٔ عطف است، از آنجایی که هر دو ضابطهٔ $f''(x)$ فاقد ریشه‌اند، پس $y=f(x)$ نقطهٔ عطف دیگری ندارد.

۱۱. گزینهٔ ۴

از این‌که $x=\alpha$ ریشهٔ معادلهٔ $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ است، داریم:

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha}=f'(\alpha)\Rightarrow f(\alpha)=\alpha f'(\alpha)\Rightarrow \alpha f'(\alpha)-f(\alpha)=۰$$

اما $\alpha f'(\alpha)-f(\alpha)$ در واقع صورت کسر $(\dfrac{f(x)}{x})'$ در نقطهٔ $x=\alpha$ است.زیرا:

$$(\frac{f(x)}{x})'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^۲}\xrightarrow{x=\alpha}(\frac{f(x)}{x})'_{x=\alpha}=\frac{۰}{\alpha^۲}=۰$$

بنابراین $x=\alpha$ نقطهٔ بحرانی تابع $\dfrac{f(x)}{x}$ است. اما:

$$\frac{f(x)}{x}=۴\tan x+۹\cot x\ ;\ ۰<x<\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow(\frac{f(x)}{x})'=\frac{۴}{\cos^۲ x}-\frac{۹}{\sin^۲ x}\Rightarrow\frac{۴}{\cos^۲ x}-\frac{۹}{\sin^۲ x}=۰$$

$$\Rightarrow\frac{۴}{\cos^۲ x}=\frac{۹}{\sin^۲ x}\xrightarrow{\alpha\ \text{ربع اول}}۲\sin\alpha=۳\cos\alpha$$

$$\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۳}{۲}$$

اینک توجه کنید که:

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow ۱+\frac{۹}{۴}=\frac{۱۳}{۴}=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$$

$$\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{۴}{۱۳}$$

از آن‌جا که $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ است، داریم:

$$\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha=۱-\frac{۴}{۱۳}=\frac{۹}{۱۳}$$

بنابراین:

$$\sin\alpha=\frac{۳}{\sqrt{۱۳}},\cos\alpha=\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}\Rightarrow\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{۵}{\sqrt{۱۳}}$$

۱۲. گزینهٔ ۲

طبق فرض مسئله، شیب خط مماس برابر ۳ است.

نقطهٔ عطف تابع $f(x)$ را به کمک مشتق دوم به‌دست می‌آوریم:

$$f''(x)=۶mx+۲(m)=۰\Rightarrow x_I=-\frac{۱}{۳}$$

طبق توضیحات گفته شده $f'(x_I)=۳$ است، یعنی:

$$f'(x)=۳mx^۲+۲mx\xrightarrow{x=-\frac{۱}{۳}}\frac{m}{۳}-\frac{۲m}{۳}=۳\Rightarrow m=-۹$$

۱۳. گزینهٔ ۲

اولاً $\lim\limits_{x\to۰^+}f(x)=۱>۰=\lim\limits_{x\to۰^-}f(x)$ پس در نقطهٔ $x=۰$ تابع صعود می‌کند.

برای $x<۰$ ضابطهٔ تابع $g(x)=x^۳$ است که چون $g'(x)=۳x^۲>۰$ صعودی است، پس $f(x)$ در $(-\infty,۰]$ صعودی است.

برای $x>۰$، ضابطهٔ تابع $h(x)=۱-x^۲$ است که چون در بازه $(۰,+\infty)$ در بازهٔ $f(x)$ و در نتیجه $h(x)$ است، پس $h'(x)=-۲x<۰$ نزولی است. پس گزینهٔ «۲» صحیح است.

۱۴. گزینهٔ ۱

از $f(x)$ مشتق می‌گیریم: $f'(x)=\dfrac{-a\sin x}{(۱+\cos x)^۲}$

چون $f(x)$ نزولی است، پس: $f'(x)<۰$

از طرفی چون $x\in(۰,\pi)$ پس $\sin x>۰$ است، این یعنی:

$$f'(x)=\frac{-a\sin x}{(۱+\cos x)^۲}<۰$$

$$\xrightarrow[(۱+\cos x)^۲>۰]{\sin x>۰}-a<۰\Rightarrow a>۰$$

۱۵. گزینهٔ ۴

باید $f''(x)$ را محاسبه کنیم:

$$f(x)=\frac{x^۲+۸}{x^۲+۱۴}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱۲x}{(x^۲+۱۴)^۲}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{۱۲(x^۲+۱۴)^۲-۴۸x^۲(x^۲+۱۴)}{(x^۲+۱۴)^۴}$$

$$\xrightarrow{f''(x)>۰}\frac{۱۲(x^۲+۱۴)(x^۲+۱۴-۴x^۲)}{(x^۲+۱۴)^۴}>۰$$

$$\xrightarrow{x^۲+۱۴>۰}۱۴-۳x^۲>۰\Rightarrow-\sqrt{\frac{۱۴}{۳}}<x<\sqrt{\frac{۱۴}{۳}}$$

بنابراین بیشترین مقدار $b-a=۲\sqrt{\dfrac{۱۴}{۳}}$ است.

۱. گزینهٔ ۴

روش اول: فرض کنید y و x اضلاع مستطیل باشند. در این صورت داریم:

$$۲(x+y)=۲۰\Rightarrow x+y=۱۰\Rightarrow y=۱۰-x$$

حالا می‌خواهیم حداکثر $S=xy$ را حساب کنیم:

$$S=xy=x(۱۰-x)\Rightarrow f(x)=۱۰x-x^۲$$

به کمک مشتق، بیشترین مقدار $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۱۰-۲x=۰\Rightarrow x=۵$$

در نتیجه: $S_{max}=f(۵)=۵۰-۲۵=۲۵$