به نام پروردگار مهربان

حسابان ۲

ریاضی

دوازدهم

آموزش و مرور ویژهٔ امتحان نهایی

میثم خرّمی

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی

مهروماه

فهرست

درس ۲ تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش‌پذیری و تقسیم

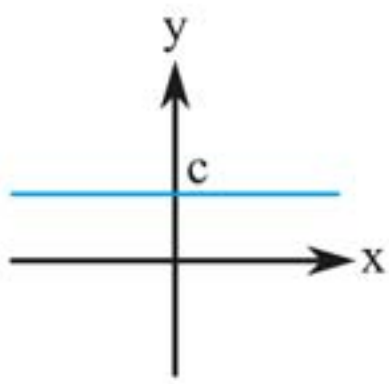
وعدهٔ ۵

توابع چندجمله‌ای

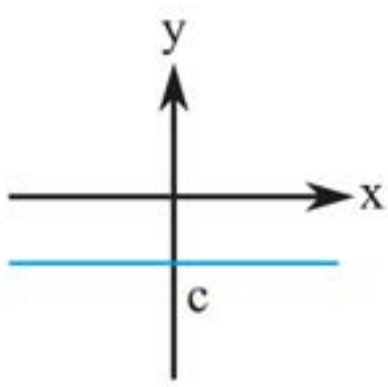
تابع $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ را که در آن a_0 , a_1 ,..., a_n **اعداد حقیقی**، $a_n \neq 0$ و n **عددی صحیح و نامنفی** (حسابی) است، یک **تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n** می‌نامیم.

چند نمونهٔ مهم از این توابع عبارت‌اند از:

چندجمله‌ای از درجهٔ صفر: **(تابع ثابت)** $f(x) = c \neq 0$

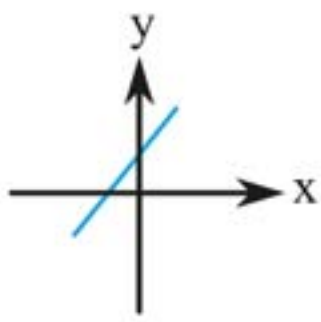


یا

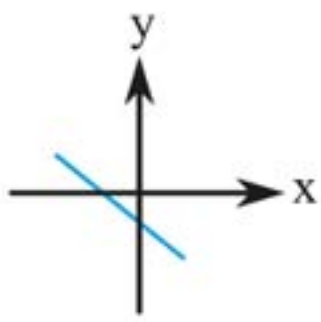


یا ...

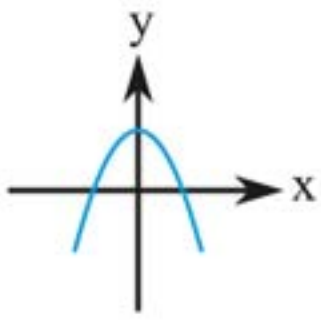
چندجمله‌ای‌های از درجهٔ یک: **(تابع خطی)** $f(x) = ax + b \; ; a \neq 0$



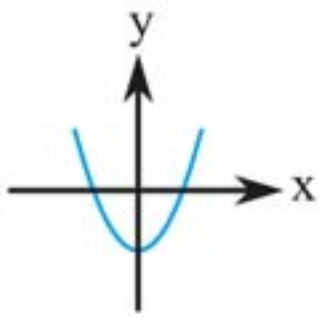
یا



چندجمله‌ای‌های از درجهٔ دو: **(تابع سهمی)** $f(x) = ax^2 + bx + c$



یا



تذکر: برای تابع ثابت $f(x) = ۰$ (محور x ها)، درجه تعریف نمی‌شود.

مثال: درجهٔ هر یک از توابع چندجمله‌ای زیر را مشخص کنید.

الف) $f(x) = ۵$

تابع ثابت و غیرصفر است، پس درجهٔ آن صفر است.

ب) $p(x) = x^۲ - x(x+۲) + ۲x$

چندجمله‌ای را ساده و مرتب می‌کنیم:

$p(x) = x^۲ - x^۲ - ۲x + ۲x = ۰ \Rightarrow p(x) = ۰ \Rightarrow$ بدون درجه

پ) $q(x) = (۲x+۱)(۳x^۲ + ۴x - ۱)$

ابتدا چندجمله‌ای را ساده و مرتب می‌کنیم:

$q(x) = ۶x^۳ + \underline{۸}x^۲ - \underline{\underline{۲}}x + \underline{۳}x^۲ + \underline{\underline{۴}}x - ۱$

$\xrightarrow{\text{مرتب}} q(x) = ۶x^۳ + ۱۱x^۲ + ۲x - ۱$

بنابراین درجهٔ این چندجمله‌ای ۳ است.

ت) $m(x) = x^۲(۱ - x)^۳$

ابتدا چندجمله‌ای را ساده و مرتب می‌کنیم:

$m(x) = x^۲(۱ - ۳x + ۳x^۲ - x^۳) = x^۲ - ۳x^۳ + ۳x^۴ - x^۵$

$\xrightarrow{\text{مرتب}} m(x) = -x^۵ + ۳x^۴ - ۳x^۳ + x^۲$

چندجمله‌ای درجهٔ ۵ است.

چاشنی: حاصل **جمع**، **تفریق** یا **ضرب** توابع چندجمله‌ای نیز یک تابع چندجمله‌ای خواهد بود.

فصل دوم

مثلثات

مثلثات

درس اول — تناوب و تانژانت

- تناوب و تابع متناوب
- تأثیر انبساط و انقباض عمودی و انتقال بر دورهٔ تناوب و ماکزیمم و مینیمم توابع $\sin x$ و $\cos x$
- تأثیر انبساط و انقباض افقی بر دورهٔ تناوب و ماکزیمم و مینیمم توابع $\sin x$ و $\cos x$
- محور تانژانت
- نمودار تابع تانژانت
- یادآوری چند رابطهٔ مهم مثلثاتی و دو رابطهٔ جدید

درس دوم — معادلات مثلثاتی

- معادلات مثلثاتی

درس ۱ تناوب و تانژانت

وعدهٔ ۱

تناوب و تابع متناوب

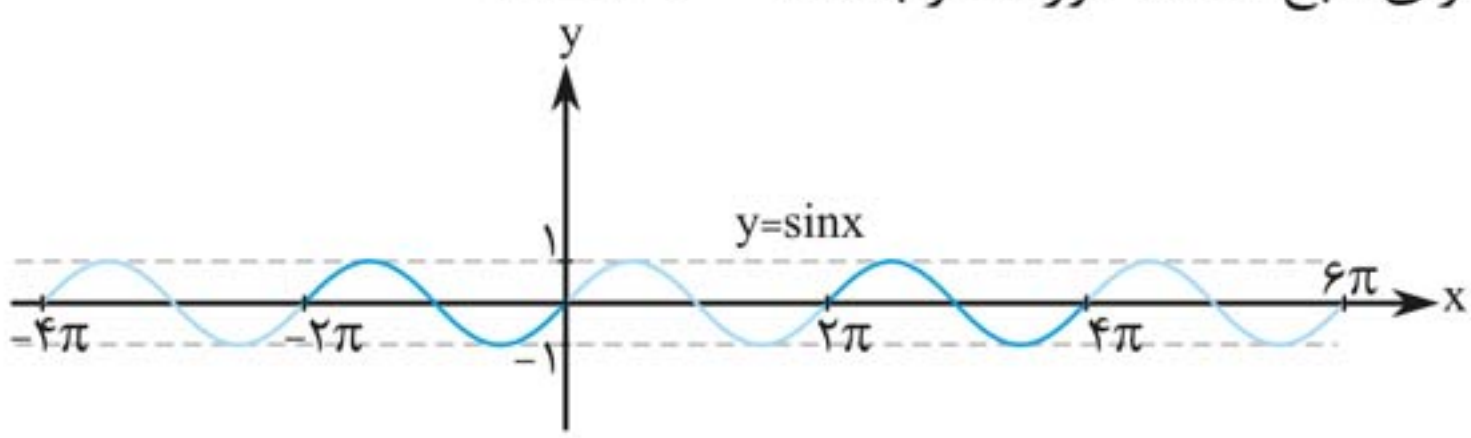
تابع f را متناوب می‌نامیم، هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم:

$$f(x \pm T) = f(x) \quad , \quad x \pm T \in D_f$$

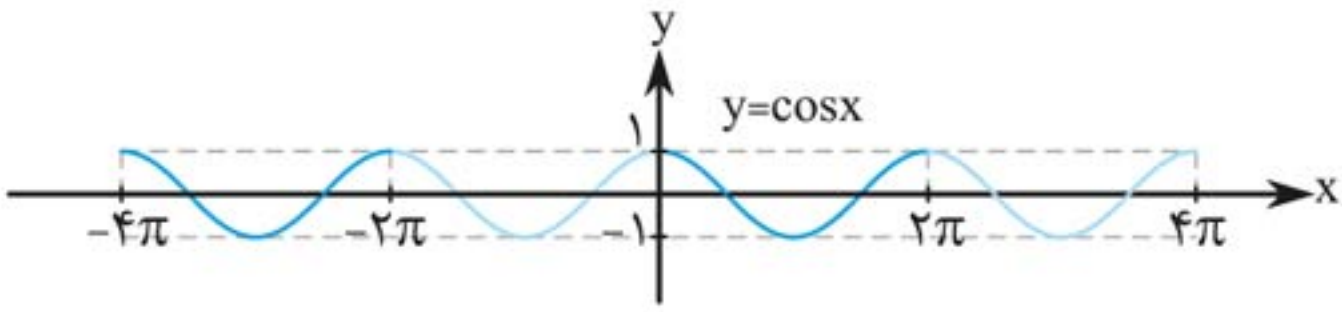
کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دورهٔ تناوب f می‌نامیم.

تعیین تناوب از روی نمودار: وقتی یک نمودار با تکرار قطعه‌ای از آن (با کمترین طول) ساخته می‌شود، می‌گوییم تابع متناوب است و طول قسمت تکرارشونده، دورهٔ تناوب آن است.

به‌عنوان مثال، کل نمودار $y = \sin x$ با تکرار قطعه‌ای از آن به شکل ، که طول آن ۲π است، ساخته می‌شود. توجه کنید این نمودار با قطعه‌ای به طول کمتر از ۲π ساخته نمی‌شود؛ پس برای تابع $\sin x$ دورهٔ تناوب، $T = ۲\pi$ است.



همچنین کل نمودار تابع $y = \cos x$ نیز با تکرار قطعه‌ای از تابع به شکل که طول آن ۲π است، ساخته می‌شود. توجه کنید که نمودار $\cos x$ با قطعه‌ای به طول کمتر از ۲π ساخته نمی‌شود؛ پس برای تابع $\cos x$ نیز دورهٔ تناوب $T = ۲\pi$ است.



با توجه به مطالب گفته‌شده، به‌راحتی به روابط زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} \sin(x \pm \overset{T}{\overset{\uparrow}{۲\pi}}) = \sin x \\ \cos(x \pm ۲\pi) = \cos x \end{cases}$$

مثال: اگر f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب T و $a \in D_f$ باشد، حاصل $f(a+۳T)$ را محاسبه کنید.

پاسخ تابع f متناوب با دورهٔ تناوب T است، پس برای هر $x \in D_f$ داریم:

$$f(x+\underset{\text{حذف می‌شود}}{\underset{\downarrow}{T}}) = f(x)$$

بنابراین می‌توان گفت:

$$f(a+۳T)=f((a+۲T)+\underset{\text{حذف}}{\underset{\downarrow}{T}})=f(a+۲T)=f((a+T)+\underset{\text{حذف}}{\underset{\downarrow}{T}})$$

$$=f(a+\underset{\text{حذف}}{\underset{\downarrow}{T}})=f(a) \Rightarrow f(a+۳T)=f(a)$$

نتیجه: با استدلالی مشابه مثال قبل می‌توان نتیجه زیر را به‌دست آورد:

$$f(x+kT)=f(x) \;\; ; \;\; (k \in \mathbb{Z})$$

T دوره تناوب تابع f است.

وعدهٔ ۶

تعاریف حد بی‌نهایت به زبان ریاضی

الف $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

فرض کنید تابع f در یک همسایگی راست عدد a تعریف شده باشد. در این‌صورت $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ؛ یعنی می‌توانیم مقادیر $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرط آن‌که x به اندازهٔ کافی از راست به a نزدیک شده باشد.

ب $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

فرض کنید تابع f در یک همسایگی راست عدد a تعریف شده باشد. در این‌صورت $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ ؛ یعنی می‌توانیم مقادیر $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد منفی، کوچک‌تر کنیم به شرط آن‌که x به اندازهٔ کافی از راست به a نزدیک شده باشد.

تذکر: اگر $f(x)$ در یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد و x به‌قدر کافی از چپ به a نزدیک شود، به‌طور مشابه $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ نیز قابل تعریف هستند.

پ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. در این‌صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ؛ یعنی می‌توانیم مقادیر $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرط آن‌که x به اندازهٔ کافی به a (از هر دو طرف) نزدیک شده باشد.

ت $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

فـرض کنید تابع f در یک همسـایگی محذوف a تعریف شـده باشـد. در این‌صـورت $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ؛ یعنـی می‌توانیـم مقادیـر $f(x)$ را بـه میزان دلخـواه از هر عـدد منفی، کوچک‌تر کنیم به شـرط آن‌که x به اندازهٔ کافی به a (از هر دو طرف) نزدیک شده باشد.

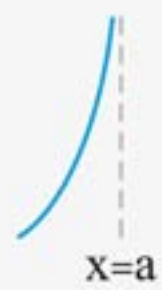
تذکر: تعاریـف **(الـف)** و **(ب)**، تعریـف **حـد نامتناهـی یـک طرفه** و تعاریف **(پ)** و **(ت)**، تعریف **حد نامتناهی** هستند.

چاشنی: منظـور از $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ یـا $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ ، آن اسـت که جواب حد در هـر دو حالت $x \to a^+$ و $x \to a^-$ برابر $+\infty$ یا $-\infty$ شده است:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty \end{cases}$$

به شکل های زیر توجه کنید:

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

حال در $x = ۱$ داریم: $y' = (۲ + f'(۱))f'(۲ + f(۱))$

از طرفی $f(۱) = -۱$ و $f'(۱) = ۶$؛ پس:

$$y' = (۲ + ۶)f'(۲ - ۱) = ۸f'(۱) = ۸ \times ۶ = ۴۸$$

وعدهٔ ۶

مشتق مرتبهٔ دوم

اگر $f(x)$ یک تابع باشد، به $f'(x)$ مشتق مرتبهٔ اول تابع می‌گوییم. مشتق مرتبهٔ دوم تابع $f(x)$ را با نماد $f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبهٔ آن باید از $f'(x)$ مشتق بگیریم.

$$f \xrightarrow{\text{مشتق}} f' \xrightarrow{\text{مشتق}} f''$$

مثال: اگر $f(x) = x^۵ + ۳x^۴ + ۲x - ۱$ باشد، مقدار $f''(۲)$ را محاسبه کنید.

پاسخ ابتدا $f'(x)$ را به‌دست می‌آوریم: $f'(x) = ۵x^۴ + ۱۲x^۳ + ۲$

حال برای محاسبهٔ $f''(x)$ از $f'(x)$ مشتق می‌گیریم:

$$f''(x) = ۲۰x^۳ + ۳۶x^۲ \Rightarrow f''(۲) = ۲۰(۲)^۳ + ۳۶(۲)^۲ = ۳۰۴$$

مثال: اگر $f(x) = \sin^۲ x$ باشد، حاصل $f''(\frac{\pi}{۸})$ را بیابید.

پاسخ $f'(x) = ۲\cos x \sin x$

می‌دانیم که $۲\sin x \cos x = \sin ۲x$؛ پس $f'(x) = \sin ۲x$ حال از $f'(x)$ مشتق می‌گیریم: $f''(x) = ۲\cos ۲x$

بنابراین: $f''(\frac{\pi}{۸}) = ۲\cos(۲ \times \frac{\pi}{۸}) = ۲\cos\frac{\pi}{۴} = ۲ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$

چاشنی: برای محاسبهٔ راحت‌تر مشتق دوم توابع رادیکالی، بهتر است ابتدا آن‌ها را به شکل توانی تبدیل کنیم:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \ , \ \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

لازم به ذکر است که فرمول مشتق x^n که برای n های طبیعی گفته شد، برای n های گویا نیز برقرار است.

مثال: برای تابع $f(x) = \sqrt{x}$ مقدار $f''(1)$ را محاسبه کنید.

پاسخ

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

می‌دانیم $x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$ و توان منفی باعث می‌شود عبارت به مخرج برود، پس:

$$f''(x) = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\sqrt{x^3}} \Rightarrow f''(1) = -\frac{1}{4}$$

تذکر: چون هدف یافتن f'' در $x = 1$ بود، دیگر نیاز نبود که $f''(x)$ را از حالت توان منفی به حالت رادیکالی تبدیل کنیم؛ همان‌جا می‌توانستیم x را برابر ۱ قرار دهیم، اما به جهت یادگیری به حالت رادیکالی تبدیل کردیم.

مثال: اگر $f(x) = \sqrt[3]{x}$، حاصل $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f'(8+h) - f'(h)}{h}$ را بیابید.

(مشابه نهایی ریاضی، دی‌ماه ۹۴)

پاسخ وقتی حد داده‌شده در سؤال را می‌بینیم، متوجه می‌شویم که باید از تابع به‌کار رفته در کسر، مشتق بگیریم. تابع به‌کار رفته f' است، پس حاصل حد داده‌شده برابر $f''(۸)$ است؛ بنابراین:

$$f(x)=x^{\frac{۱}{۳}} \Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}} \Rightarrow f''(x)=-\frac{۲}{۹}x^{-\frac{۵}{۳}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=-\frac{۲}{۹}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۵}}}$$

$$\Rightarrow f''(۸)=-\frac{۲}{۹}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{۸^{۵}}}=-\frac{۱}{۱۴۴}$$

درس ۱ اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

وعدهٔ ۱

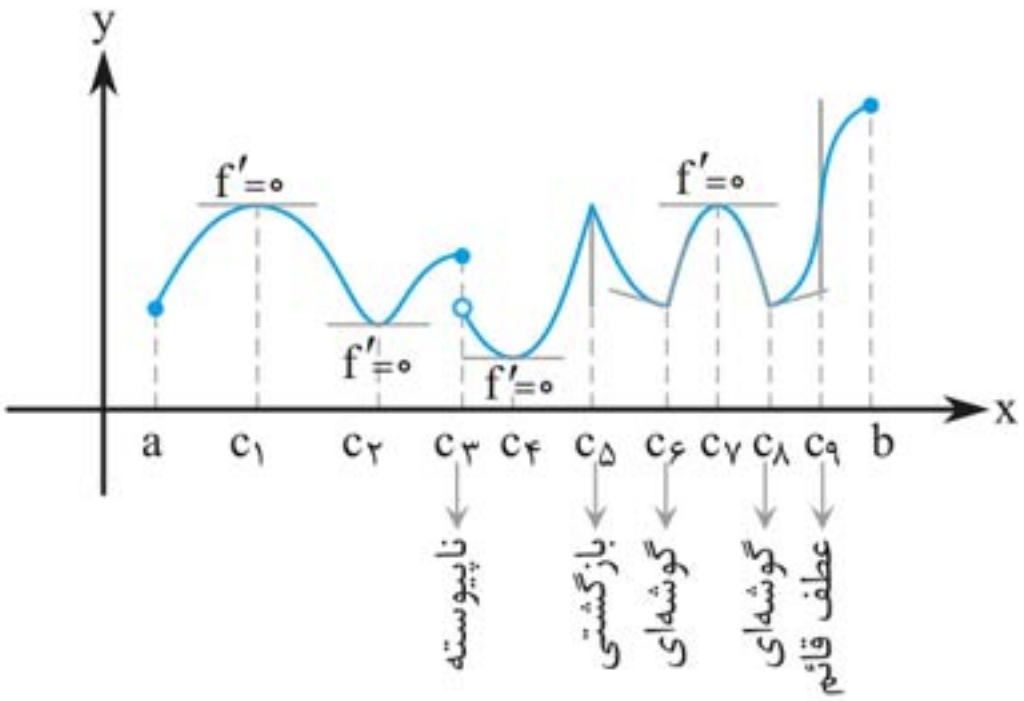
نقاط بحرانی تابع

فرض کنید $f(x)$ یک تابع باشد که در بازهٔ I تعریف شده است. در این‌صورت می‌گوییم نقطهٔ $x = c$ که **نقطهٔ درونی** بازهٔ I است، **نقطهٔ بحرانی** تابع $f(x)$ است، هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشد:

۱ $f(c)$ تعریف شده باشد (موجود باشد).

۲ $f'(c) = ۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

برای نمونه نقاط مشخص‌شده در شکل زیر نقاط بحرانی منحنی هستند:



تذکر: نقاط درونی بازهٔ $[a , b]$، نقاطی غیر از a , b هستند؛ یعنی نقاط بازهٔ (a , b).

چاشنی: برای یافتن نقاط بحرانی یک تابع باید یک بازه موجود باشد در غیراین‌صورت دامنهٔ تابع را به‌عنوان بازه در نظر می‌گیریم.

◂ نقطهٔ بحرانی، نقطهٔ درونی بازهٔ I است، بنابراین نقاط ابتدایی و انتهایی بازهٔ I بحرانی نیستند.

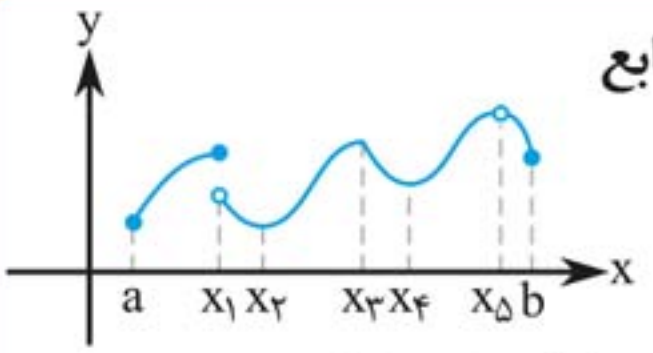
◂ نقاط بحرانی تابع دو دسته‌اند:

دستهٔ اول: نقاطی که در آن‌ها f' موجود و برابر صفر است $(f'(c) = ۰)$.

دستهٔ دوم: نقاطی که f' در آن‌ها موجود نباشد. این دسته شامل نقاط ناپیوستگی تابع f (به شرط آن‌که $f(c)$ موجود باشد)، نقاط گوشه‌ای، نقاط بازگشتی و نقاط عطف قائم است.

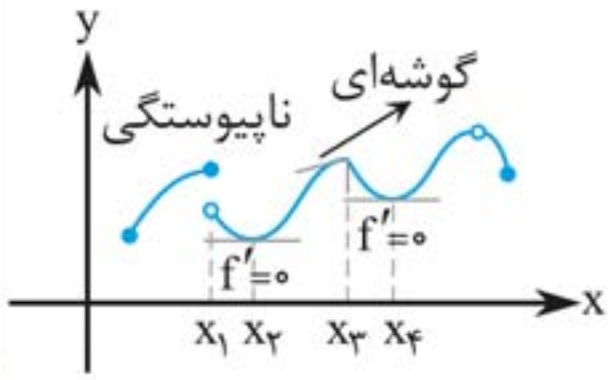
◂ چندجمله‌ای‌ها و توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ همه‌جا پیوسته و مشتق‌پذیرند، بنابراین فقط می‌توانند نقطهٔ بحرانی از نوع $f' = ۰$ داشته باشند.

مثال: در شکل مقابل نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را مشخص کنید.



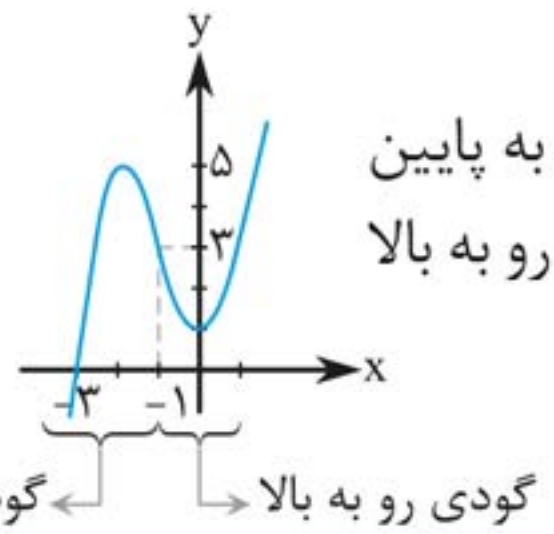
پاسخ نقطهٔ $x_۵$ عضو دامنهٔ تابع نیست، بنابراین $f(x_۵)$ موجود نیست؛ پس $x_۵$ نمی‌تواند نقطهٔ بحرانی باشد. نقاط a و b نقاط ابتدایی و انتهایی دامنه هستند؛ پس نمی‌توانند نقاط بحرانی باشند. تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x_۱$ ناپیوستگی دارد ($f(x_۱)$ موجود است)، پس شرط لازم برای مشتق‌پذیری را ندارد؛ بنابراین $f'(x_۱)$ موجود نیست. در نقاط $x_۲$ و $x_۴$ مشتق برابر صفر است و نقطهٔ $x_۳$ نقطهٔ گوشه‌ای تابع است، پس $f'(x_۳)$ موجود نیست؛ بنابراین مجموعه نقاط بحرانی تابع $f(x)$ برابر است با:

$$\{x_۱, x_۲, x_۳, x_۴\}$$



x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
		رو به پایین		رو به بالا	

پس:



تقعر رو به پایین: $(-\infty , -1)$

تقعر رو به بالا: $(-1 , +\infty)$

وعدهٔ ۸
نقطهٔ عطف تابع

تعریف: می‌گوییم نقطهٔ $x = c$ **طول نقطهٔ عطف** تابع $f(x)$ است، هرگاه هر سه شرط زیر برقرار باشد:

۱ تابع $f(x)$ در $x = c$ **پیوسته** باشد.

۲ نمودار تابع $f(x)$ در نقطهٔ $(c , f(c))$ **خط مماس** داشته باشد.

۳ جهت تقعر $f(x)$ در $x = c$ عوض شود (f'' در $x = c$ تغییر علامت دهد).

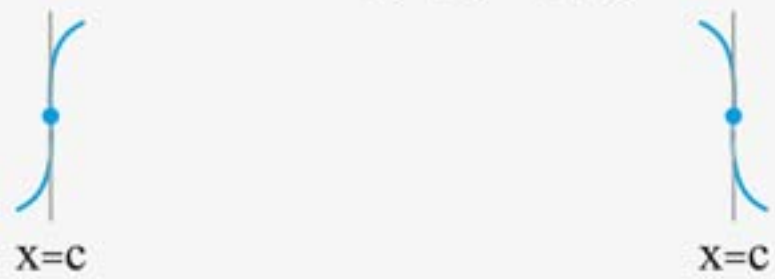
اگر هر سه شرط بالا برقرار باشد، نقطهٔ $(c , f(c))$ را **نقطهٔ عطف** تابع $f(x)$ می‌نامیم. با توجه به این‌که مماس رسم‌شده بر تابع $f(x)$ در نقطهٔ عطف چگونه است، سه نوع نقطهٔ عطف داریم:

چاشنی: وجـود f' در یـک نقطه، وجـود ممـاس در آن نقطه را تضمین می‌کند ولی عکس این مطلب لزوماً درست نیست:

الف درحالتی‌که مماس، افقی باشد، f' وجود دارد و برابر صفر است.

ب درحالتی‌کـه ممـاس مایل باشـد، f' وجـود دارد و برابـر عددی غیرصفر است.

پ درحالتی‌که مماس قائم باشد، f' موجود نیست. در این حالت، $f'_+(c)$ و $f'_-(c)$ هر دو بی‌نهایت و هم‌علامت هستند. در این حالت، خط $x = c$، خط مماس بر تابع در $x = c$ است.



$$f'_+(c) = f'_-(c) = +\infty \qquad f'_+(c) = f'_-(c) = -\infty$$

مثال: جهـت تقعـر و نقطهٔ عطـف توابـع زیـر را در دامنهٔ آن‌ها بررسی کنید.

(تمرین صفحهٔ ۱۳۶)

الف) $f(x) = \frac{۱}{۳}x^۳ - x^۲ - ۳x + ۴$

تابع $f(x)$ چندجمله‌ای است، پس روی $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$f'(x) = x^۲ - ۲x - ۳$$

$$f''(x) = ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

پیوست

فرمول‌نامه

ویژهٔ امتحان نهایی

تابع

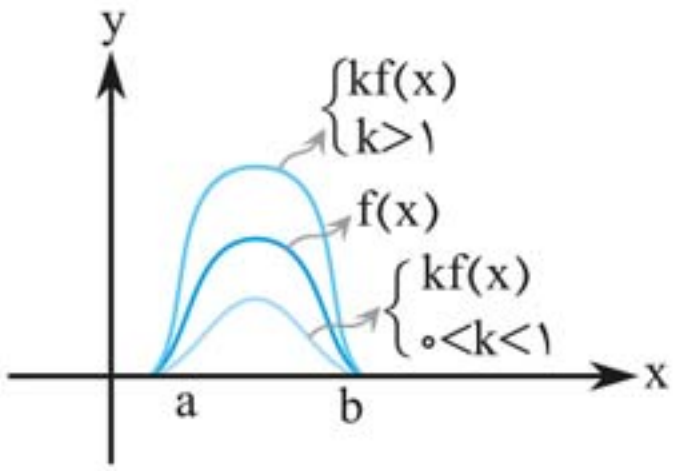
۱ انقباض و انبساط عمودی $(y = kf(x))$:

برای رسم نمودار $y = kf(x)$ کافی است عرض نقاط تابع $f(x)$ را k برابر کنیم.

الف $k > ۱$: در این‌صورت نمودار $y = kf(x)$ از **انبساط عمودی** تابع $f(x)$ به‌دست می‌آید.

ب $۰ < k < ۱$: در این‌صورت نمودار $y = kf(x)$ از **انقباض عمودی** تابع $f(x)$ به‌دست می‌آید.

پ $k < ۰$: در این‌صورت ابتدا منفی را نادیده می‌گیریم و انبساط یا انقباض را انجام می‌دهیم؛ سپس نمودار حاصل را نسبت به **محور x ها** قرینه می‌کنیم.



۲ انقباض و انبساط افقی $(y = f(kx))$:

برای رسم نمودار $y = f(kx)$ کافی است طول همهٔ نقاط تابع $f(x)$ را در $\frac{۱}{k}$ ضرب کنیم.

الف $k > ۱$: در این‌صورت نمودار $y = f(kx)$ از **انقباض افقی** تابع $f(x)$ به‌دست می‌آید.

ب $۰ < k < ۱$: در این‌صورت نمودار $y = f(kx)$ از **انبساط افقی** تابع $f(x)$ به‌دست می‌آید.

مثلثات

۱ تناوب و تابع تانژانت:

الف تابع f را متناوب می‌نامیم، هرگاه عدد حقیقی مثبت T طوری یافت شود که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم:

$$f(x \pm T) = f(x)$$

کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را **دورهٔ تناوب اصلی تابع** $f(x)$ می‌نامیم.

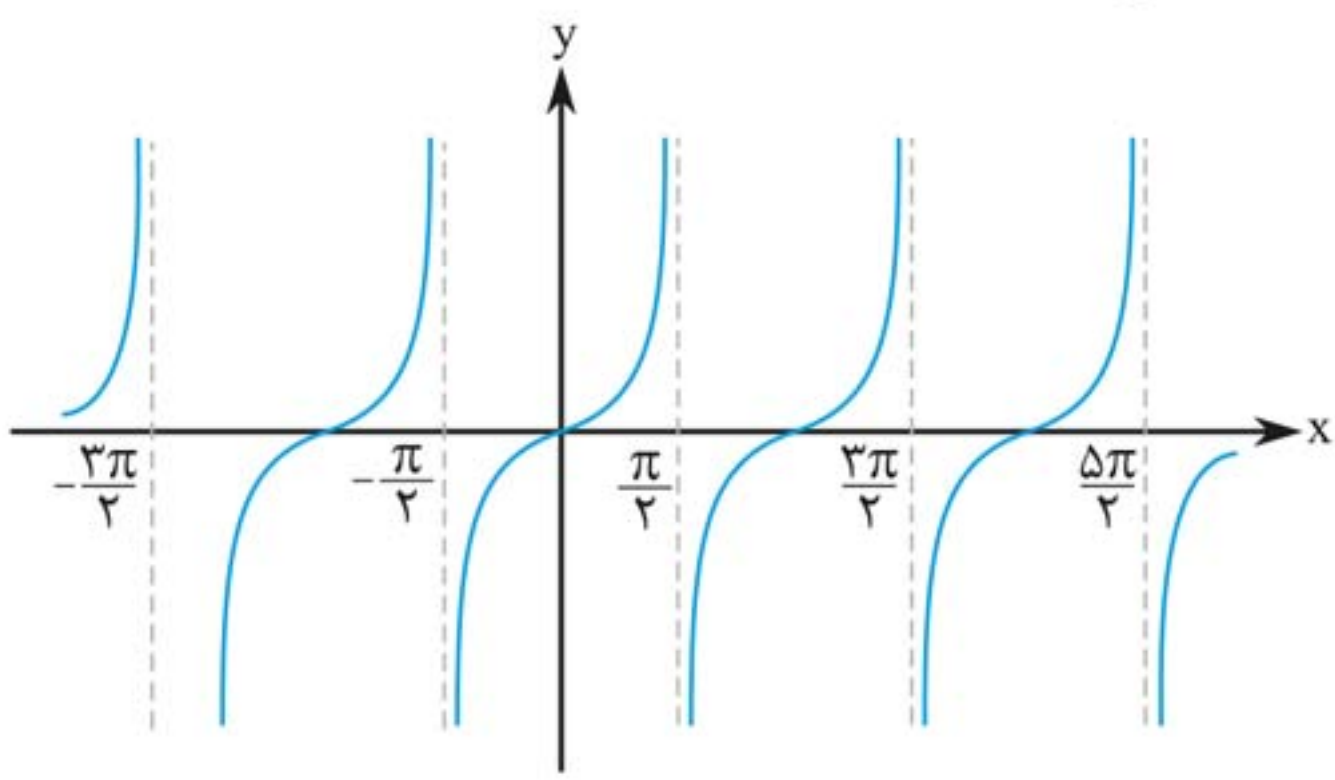
ب برای دو تابع $f(x) = a\sin(bx) + c$ و $f(x) = a\cos(bx) + c$ داریم:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} \qquad \max = |a| + c \qquad \min = -|a| + c$$

پ اگر ماکزیمم، مینیمم و دورهٔ تناوب (T) توابع $f(x) = a\sin(bx) + c$ و $f(x) = a\cos(bx) + c$ را داشته باشیم، می‌توانیم ضرایب a ، b و c این توابع را مشخص کنیم:

$$|b| = \frac{۲\pi}{T} \qquad |a| = \frac{|\max - \min|}{۲} \qquad c = \frac{\max + \min}{۲}$$

ت نمودار تابع $y = \tan x$



حدهای نامتناهی ـ حد در بی‌نهایت

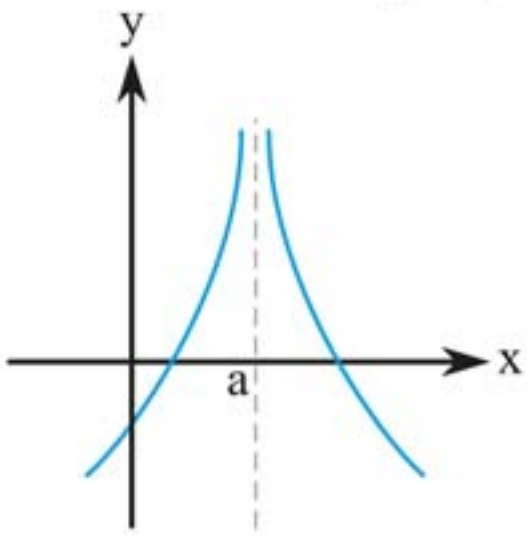
۱ حد بی‌نهایت:

فرض کنید $f(x)$ در یک همسایگی محذوف عدد a تعریف شده باشد، در این‌صورت:

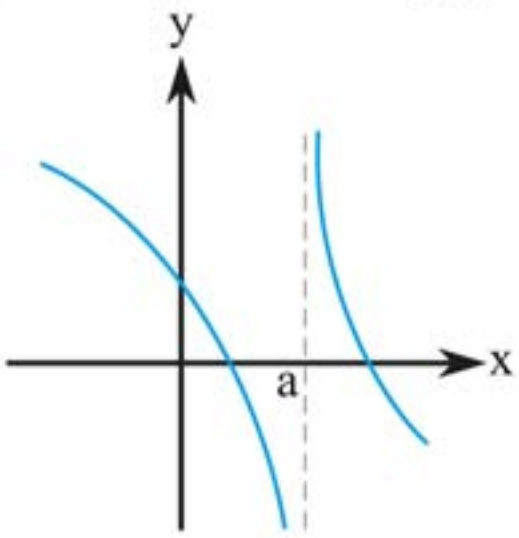
الف $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ ؛ یعنی می‌توانیم مقادیر $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد مثبت، بزرگ‌تر کنیم به شرط آن‌که به اندازهٔ کافی به عدد a نزدیک شده باشیم.

ب $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ ؛ یعنی می‌توانیم مقادیر $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد منفی، کوچک‌تر کنیم به شرط آن‌که به اندازهٔ کافی به عدد a نزدیک شده باشیم.

حدود بی‌نهایت یک‌طرفه، به‌طور مشابه قابل تعریف است.



$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$$



$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty\end{cases}$$

۲ قضیه‌های حد بی‌نهایت:

الف $\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{۱}{x^n}=+\infty\ (n\in\mathbb{N})\,,\ \lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{۱}{x^n}=\begin{cases}+\infty & \text{زوج } n\\ -\infty & \text{فرد } n\end{cases}$

۳ فرمول‌های مشتق گیری:

تابع	مشتق
$y = c$	$y' = ۰$
$y = ax^n$	$y' = nax^{n-۱} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$
$y = \sqrt{ax+b}$	$y' = \frac{a}{۲\sqrt{ax+b}}$
$y = (f \pm g)(x)$	$y' = f'(x) \pm g'(x)$
$y = (kf)(x)$	$y' = kf'(x) \quad (k \in \mathbb{R})$
$y = (f \cdot g)(x)$	$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$y = (\frac{f}{g})(a)$	$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^۲} \quad (g(x) \neq ۰)$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = (fog)(x)$	$y' = g'(x)f'(g(x))$