

دنباله حسابی و مجموع جملات آن

دنباله حسابی: دنباله‌ای است که هر جمله آن (به جز جمله اول) با اضافه کردن عددی ثابت به جمله قبلی به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌گوییم. قدرنسبت را با d و جمله اول را با a_1 یا a نمایش می‌دهیم. در شکل کلی، جملات یک دنباله حسابی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots, a_1 + (n-1)d, \dots$$

$$\text{جمله عمومی: } a_n = a_1 + (n-1)d$$

بنابراین جمله عمومی دنباله حسابی یا همان جمله n ام به صورت مقابل می‌باشد:
در این رابطه، n تعداد جملات است.

می‌دانیم اگر هر جمله را از جمله بعدی کم کنیم، قدرنسبت به دست می‌آید، پس به طور کلی داریم:

$$a_{n+1} - a_n = d$$

مثال: در یک دنباله حسابی، جمله پنجم -2 و جمله دوازدهم 19 است. جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{cases} a_5 = -2 \Rightarrow a_1 + 4d = -2 \\ a_{12} = 19 \Rightarrow a_1 + 11d = 19 \end{cases} \Rightarrow d = 3, a_1 = -14$$

پاسخ: از رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ استفاده می‌کنیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = -14 + 3(n-1) \Rightarrow a_n = 3n - 17$$

نکته: اگر a_m و a_n دو جمله از یک دنباله حسابی باشند، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$a_m - a_n = (m-n)d$$

برای مثال، در سؤال قبل که $a_5 = -2$ و $a_{12} = 19$ است، داریم:

$$a_{12} - a_5 = (12-5)d \Rightarrow 19 - (-2) = 7d \Rightarrow 21 = 7d \Rightarrow d = 3$$

واسطه حسابی: اگر a, b, c و b, c تشکیل دنباله حسابی دهند، آن‌گاه $b = \frac{a+c}{2}$ است. در این حالت می‌گوییم b واسطه حسابی a و c می‌باشد.

رابطه اندیس‌ها: اگر a_m, a_n, a_p, a_k جملاتی از یک دنباله حسابی باشند که رابطه $m+n = p+k$ بین اندیس‌ها برقرار باشد، آن‌گاه همواره داریم:

$$a_m + a_n = a_p + a_k$$

از این رابطه می‌توان نتیجه گرفت که هر جمله، واسطه حسابی بین دو جمله‌ای است که به یک فاصله از طرفین آن قرار دارند.

$$a_{n-k}, \dots, a_n, \dots, a_{n+k}$$

$$a_{n-k} + a_{n+k} = 2a_n$$

k جمله بعد k جمله قبل

برای مثال با توجه به رابطه اندیس‌ها داریم:

$$a_7 + a_{10} = a_5 + a_9 = 2a_7 \quad ; \quad a_5 + a_{14} + a_{17} = 3a_{17}$$

بررسی یک اشتباه متداول: توجه داشته باشید که در رابطه اندیس‌ها، علاوه بر این‌که باید جمع اندیس‌ها در دو سمت تساوی برابر باشد، تعداد

جملات نیز باید برابر باشد. پس دقت داشته باشید که:

$$\underbrace{a_7 + a_{10}}_{\text{دو جمله}} \neq \underbrace{a_{14}}_{\text{یک جمله}} \quad ; \quad \underbrace{a_5 + a_{14} + a_{17}}_{\text{سه جمله}} \neq \underbrace{3a_{18}}_{\text{دو جمله}}$$

تست: اگر در یک دنباله حسابی $a_1 = 1$ و $a_7 = \frac{5}{3}$ باشد، حاصل $\frac{a_{15} + a_{17} + a_{19}}{a_{33} + a_{35} + a_{37}}$ کدام است؟

$$\frac{21}{17} \quad (4)$$

$$\frac{7}{17} \quad (3)$$

$$\frac{105}{71} \quad (2)$$

$$\frac{35}{71} \quad (1)$$

پاسخ: قدرنسبت این دنباله برابر است با $d = a_7 - a_1 = \frac{2}{3}$. حال با توجه به رابطه اندیس‌ها داریم:

$$\frac{a_{15} + a_{17} + a_{19}}{a_{33} + a_{35} + a_{37}} = \frac{3a_{17}}{3a_{35}} = \frac{a_{17}}{a_{35}} = \frac{a_1 + 16d}{a_1 + 34d} = \frac{1 + 16\left(\frac{2}{3}\right)}{1 + 34\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{3 + 32}{3 + 68} = \frac{35}{71}$$

پس گزینه (1) صحیح است.

درج m واسطه حسابی بین دو عدد: چنانچه خواهیم بین دو عدد a و b تعداد m جمله قرار دهیم، به طوری که کلیه اعداد با هم تشکیل یک دنباله حسابی بدهند، اصطلاحاً به این عمل درج m واسطه حسابی می‌گویند. در این حالت چون m جمله درج می‌کنیم، با احتساب جملات a و b در کل $m+2$ جمله وجود دارد. پس برای تعیین قدرنسبت، کافی است a_{m+2} را تشکیل داد.

$$a, \underbrace{O, O, \dots, O}_m, b$$

\downarrow جمله \downarrow
 a_1 a_{m+2}

مثال: بین اعداد ۲ و ۲۷ چهار واسطه حسابی درج کنید.

پاسخ: روش اول: چون چهار واسطه درج می‌کنیم، پس دنباله حاصل شش جمله دارد که جمله اول برابر ۲ و جمله ششم برابر ۲۷ است:

$$2, \underbrace{O, O, O, O}_4, 27$$

\downarrow جمله \downarrow
 a_1 a_6

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_6 = a_1 + 5d \Rightarrow 27 = 2 + 5d \Rightarrow d = 5$$

بنابراین واسطه‌ها به صورت ۲، ۷، ۱۲، ۱۷، ۲۲ به دست می‌آیند.

روش دوم:

نکته: برای درج m واسطه حسابی بین دو عدد a و b به کمک رابطه زیر، قدرنسبت را به دست می‌آوریم:

$$a, \underbrace{O, O, \dots, O}_m, b$$

\downarrow جمله \downarrow
 a_1 a_{m+2}

$$d = \frac{b-a}{m+1}$$

به کمک نکته بالا داریم:

$$d = \frac{27-2}{5} = 5 \Rightarrow \text{واسطه‌ها: } 7, 12, 17, 22$$

نکته: جمله عمومی یک دنباله حسابی، عبارتی درجه اول بر حسب n است:

$$a_n = a + (n-1)d = a + nd - d \Rightarrow a_n = \frac{d}{A}n + \frac{a-d}{B} = An + B$$

ملاحظه می‌شود که در رابطه جمله عمومی دنباله حسابی، ضریب n، برابر قدرنسبت می‌باشد.

مثال: کدام یک از عبارات زیر می‌تواند جمله عمومی یک دنباله حسابی باشد؟

(پ) $c_n = -\frac{n}{2} + 3$

(ب) $b_n = \frac{n}{n+1}$

(الف) $a_n = n^2 + 2n$

پاسخ: عبارات «الف» و «ب» چون چند جمله‌ای درجه اول نیستند، پس نمی‌توانند جمله عمومی دنباله حسابی باشند، اما $c_n = -\frac{n}{2} + 3$ جمله عمومی یک دنباله حسابی با قدرنسبت $-\frac{1}{2}$ می‌باشد. (ضریب n، برابر قدرنسبت است).

مجموع جملات دنباله حسابی

در هر دنباله، مجموع n جمله اول را با S_n نمایش می‌دهند:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

در یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 برای محاسبه S_n کافی است، مجموع جمله اول و جمله nام را در نصف تعداد جملات، ضرب کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

اگر در رابطه بالا از تساوی $a_n = a_1 + (n-1)d$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

بدیهی است که هرگاه جمله اول و قدرنسبت را داشتیم، از این رابطه و اگر به جای قدرنسبت، a_n را داشتیم از رابطه قبلی برای محاسبه مجموع جملات استفاده می‌کنیم.

در رابطه S_n ، مجموع $n-1$ جمله اول، یعنی $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ برابر است با S_{n-1} ، پس نتیجه می‌گیریم:

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n \Rightarrow S_n = S_{n-1} + a_n$$

بنابراین با در اختیار داشتن S_n می‌توان به کمک رابطه زیر، جمله عمومی دنباله را تعیین کرد:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

مثال: در دنباله حسابی ۷، ۴، ۱، ... مجموع بیست جمله اول را به دست آورید.

پاسخ: جمله اول دنباله برابر ۷ و قدرنسبت برابر $-3-4 = -7$ می‌باشد، بنابراین:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}(2(7) + 19(-3)) = 10(14 - 57) = 10(-43) = -430$$

مثال: مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n را به دست آورید.

پاسخ: مقدار $۱+۲+\dots+n$ حاصل جمع n جمله اول یک دنباله حسابی با $a_1=1$ و $a_n=n$ است. پس طبق رابطه $S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)$ مقدار آن برابر $\frac{n}{2}(1+n)$ می شود.

نتیجه: مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n برابر است با:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

تست: در یک دنباله حسابی، مجموع n جمله اول از رابطه $S_n = 3n^2 + 5n$ به دست می آید. جمله عمومی دنباله کدام است؟

$$a_n = 6n + 1 \quad (۲)$$

$$a_n = 6n + 2 \quad (۱)$$

$$a_n = 14n - 2 \quad (۴)$$

$$a_n = 14n - 6 \quad (۳)$$

پاسخ: روش اول: با توجه به این که $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$ است داریم:

$$\begin{cases} S_1 = 3 + 5 = 8 \Rightarrow a_1 = 8 \\ S_2 = 3(2)^2 + 5(2) = 22 \Rightarrow a_1 + a_2 = 22 \xrightarrow{a_1=8} a_2 = 14 \end{cases} \Rightarrow d = a_2 - a_1 = 14 - 8 = 6$$

$$\text{جمله عمومی: } a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 8 + (n-1)(6) = 6n + 2$$

روش دوم: از رابطه $a_n = S_n - S_{n-1}$ استفاده می کنیم:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 + 5n - (3(n-1)^2 + 5(n-1)) = 3n^2 + 5n - (3n^2 - 6n + 3 + 5n - 5) = 3n^2 + 5n - (3n^2 - n - 2) = 6n + 2$$

$$= 3n^2 + 5n - (3n^2 - n - 2) = 6n + 2$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

تست: یک دنباله حسابی دارای ۲۹ جمله است. اگر مجموع سه جمله وسط برابر ۱۸ باشد، مجموع ۲۹ جمله برابر کدام است؟

$$۱۸۲ \quad (۴)$$

$$۱۶۲ \quad (۳)$$

$$۱۶۸ \quad (۲)$$

$$۱۷۴ \quad (۱)$$

پاسخ: چون دنباله ۲۹ جمله دارد، جمله وسط، جمله پانزدهم است $(\frac{29+1}{2} = 15)$ ، در نتیجه داریم:

$$a_{14} + a_{15} + a_{16} = 18 \xrightarrow{\text{رابطه اندیس ها}} 3a_{15} = 18 \Rightarrow a_{15} = 6$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{29} = \frac{29}{2}(a_1 + a_{29}) \xrightarrow{\text{رابطه اندیس ها}} \frac{29}{2}(2a_{15}) = 29 \times 6 = 174$$

پس گزینه (۱) صحیح است.

تست: در یک دنباله حسابی $S_8 - S_5 = 7$ می باشد. حاصل عبارت $a_7 + a_6 + \dots + a_1$ کدام است؟

$$\frac{49}{3} \quad (۴)$$

$$۴۹ \quad (۳)$$

$$\frac{14}{3} \quad (۲)$$

$$۱۴ \quad (۱)$$

پاسخ: می دانیم $S_8 = a_1 + a_2 + \dots + a_8$ و $S_5 = a_1 + a_2 + \dots + a_5$ است، پس نتیجه می گیریم:

$$S_8 - S_5 = a_6 + a_7 + a_8 = 7 \xrightarrow{\text{رابطه اندیس ها}} 3a_7 = 7 \Rightarrow a_7 = \frac{7}{3}$$

$$a_7 + a_6 + \dots + a_1 = (a_7 + a_1) + (a_6 + a_2) + (a_5 + a_3) + a_4 = 2a_7 + 2a_6 + 2a_5 + a_4 = 7a_7 = 7\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{49}{3}$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

نکته: در یک دنباله حسابی، مجموع تعداد فردی از جملات هم فاصله، با حاصل ضرب جمله وسط در تعداد جملات برابر است.

برای مثال در تست قبل داریم:

$$\overbrace{a_7 + a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1}^{\text{جمله ۷}} = 7a_4$$

↓
جمله وسط

نکته: مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی (S_n) ، عبارتی درجه دوم بر حسب n است:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) = an + \frac{n^2}{2}d - \frac{n}{2}d \Rightarrow S_n = \underbrace{\frac{d}{2}}_A n^2 + \underbrace{(a - \frac{d}{2})}_B n = An^2 + Bn$$

ملاحظه می شود که در رابطه S_n ، عدد ثابت وجود ندارد و ضریب n^2 برابر نصف قدرنسبت است.

مثال: آیا یک دنباله می تواند هم یک دنباله هندسی باشد و هم یک دنباله حسابی؟

پاسخ: دنباله ثابت a, a, a, \dots یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۱ و یک دنباله حسابی با قدرنسبت صفر محسوب می شود. ($a \neq 0$)

تست: در یک دنباله هندسی، حاصل ضرب ۹ جمله اول برابر ۸ است ($a_1 a_2 \dots a_9 = 8$). حاصل ضرب $a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$ برابر کدام است؟

- (۱) $2\sqrt[3]{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt[3]{2}$ (۴) ۴

پاسخ: با در نظر گرفتن $a_n = a_1 q^{n-1}$ داریم:

$$a_1 a_2 \dots a_9 = 8 \Rightarrow a_1 (a_1 q) (a_1 q^2) \dots (a_1 q^8) = a_1^9 q^{(1+2+\dots+8)} = a_1^9 q^{36} = (a_1 q^4)^9 = 8 \Rightarrow a_1 q^4 = \sqrt[9]{8} = \sqrt[3]{2}$$

یادآور می شویم که $1+2+\dots+8 = \frac{8 \times 9}{2} = 36$ حال داریم:

$$a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 = (a_1 q)(a_1 q^2)(a_1 q^3)(a_1 q^4)(a_1 q^5) = a_1^5 q^{16} = (a_1 q^4)^4 = (\sqrt[3]{2})^4 = 2\sqrt[3]{2}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

رابطه اندیس ها: اگر a_m, a_p, a_n, a_k جملاتی از یک دنباله هندسی باشند که رابطه $m+n = p+k$ بین اندیس ها برقرار باشد، آن گاه همواره داریم:

$$a_m a_n = a_p a_k$$

(توجه داشته باشید که از رابطه اندیس ها در دنباله هندسی کم تر استفاده می شود.)

برای مثال در یک دنباله هندسی، تساوی های زیر برقرارند:

$$a_4 a_{10} = a_5 a_9 = (a_7)^2 ; a_6 a_9 a_{15} = a_7 a_{10} a_{13} = (a_{10})^3 ; a_2 a_4 a_6 a_8 = (a_5)^4$$

تست: در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و دوم $\frac{9}{2}$ و مجموع جملات چهارم و پنجم ۳۶ می باشد. جمله سوم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۲

پاسخ:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = \frac{9}{2} \Rightarrow a_1 + a_1 q = \frac{9}{2} \\ a_4 + a_5 = 36 \Rightarrow a_1 q^3 + a_1 q^4 = 36 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم دو رابطه}} \frac{a_1 + a_1 q}{a_1 q^3 + a_1 q^4} = \frac{\frac{9}{2}}{36} \Rightarrow \frac{a_1(1+q)}{a_1 q^3(1+q)} = \frac{9}{2 \times 36}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q^3} = \frac{1}{8} \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

حال با توجه به رابطه $a_1 + a_1 q = \frac{9}{2}$ مقدار a_1 را تعیین می کنیم:

$$a_1 + a_1 q = \frac{9}{2} \xrightarrow{q=2} a_1 + 2a_1 = \frac{9}{2} \Rightarrow 3a_1 = \frac{9}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = a_1 q^2 = \frac{3}{2} (2)^2 = 6$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

تست: در یک دنباله عددی (حسابی)، جملات اول، پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی صعودی اند، قدرنسبت

این دنباله کدام است؟

- (۱) $\frac{6}{5}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: روش اول: می دانیم اگر a, b و c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن گاه $b^2 = ac$ است. در این تست، جملات اول (a_1) ،

پنجم $(a_1 + 4d)$ و یازدهم $(a_1 + 10d)$ از یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی هستند، پس داریم:

$$(a_1 + 4d)^2 = a_1(a_1 + 10d) \Rightarrow a_1^2 + 16d^2 + 8a_1 d = a_1^2 + 10a_1 d \Rightarrow 16d^2 = 2a_1 d \xrightarrow{d \neq 0} a_1 = 8d$$

جملات متوالی دنباله هندسی $a_1, a_1 + 4d, a_1 + 10d \xrightarrow{a_1=8d} 8d, 12d, 18d$

می دانیم قدرنسبت در دنباله هندسی، از نسبت هر جمله به جمله قبلی به دست می آید، پس $q = \frac{12d}{8d} = \frac{3}{2}$.

روش دوم:

نکته: اگر در یک دنباله حسابی غیر ثابت، جملات m ام، n ام و p ام ($p > n > m$)، به ترتیب جملات متوالی از یک دنباله هندسی باشند،

آن گاه قدرنسبت دنباله هندسی از رابطه $q = \frac{p-n}{n-m}$ به دست می آید.

با توجه به نکته بالا $q = \frac{11-5}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ می باشد. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

مجموع جملات دنباله هندسی

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

در یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q ، مجموع n جمله اول دنباله از رابطه مقابل به دست می‌آید: ($q \neq 1$)

از رابطه بالا در مواردی که $q = 1$ باشد، نمی‌توان استفاده کرد. بدیهی است در حالتی که قدرنسبت برابر ۱ باشد، دنباله ثابت a, a, \dots, a را داریم که مجموع n جمله اول آن از رابطه $S_n = na$ به دست می‌آید.

مثال: در یک دنباله هندسی، جمله اول برابر ۳- و قدرنسبت برابر $\frac{1}{4}$ است. الف) وضعیت جملات دنباله از لحاظ صعودی یا نزولی بودن چگونه است؟ ب) مجموع ۸ جمله اول آن را به دست آورید.

پاسخ: الف) چون جمله اول منفی و قدرنسبت $0 < q < 1$ است، پس دنباله صعودی می‌باشد. البته با نوشتن چند جمله اول آن، این موضوع به سادگی قابل مشاهده است:

$$-3, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{16}, -\frac{3}{64}, \dots$$

ب) برای محاسبه S_8 با استفاده از رابطه $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ داریم:

$$S_8 = \frac{-3(1-(\frac{1}{4})^8)}{1-\frac{1}{4}} = \frac{-3(1-\frac{1}{256})}{\frac{3}{4}} = -6(1-\frac{1}{256}) = -6(\frac{255}{256}) = -\frac{1530}{128} = -\frac{765}{64}$$

نکته: در مسائل مربوط به دنباله‌های هندسی، از اعداد توان‌دار زیاد استفاده می‌شود، پس بهتر است برای این‌که سریع‌تر پاسخ بدهید آن‌ها را به خاطر بسپارید:

$$2^3 = 8, \quad 2^4 = 16, \quad 2^5 = 32, \quad 2^6 = 64, \quad 2^7 = 128, \quad 2^8 = 256, \quad 2^9 = 512, \quad 2^{10} = 1024$$

$$3^3 = 27, \quad 3^4 = 81, \quad 3^5 = 243, \quad 3^6 = 729, \quad 3^7 = 2187, \quad 3^8 = 6561, \quad 3^9 = 19683, \quad 3^{10} = 59049$$

$$5^3 = 125, \quad 5^4 = 625, \quad 5^5 = 3125, \quad 5^6 = 15625, \quad 5^7 = 78125, \quad 5^8 = 390625, \quad 5^9 = 1953125, \quad 5^{10} = 9765625$$

تست: در یک دنباله هندسی، مجموع هشت جمله اول، $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جمله اول آن است. جمله هفتم چند برابر جمله اول است؟

$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

$$\frac{5}{32} \quad (3)$$

$$\frac{1}{8} \quad (2)$$

$$\frac{1}{16} \quad (1)$$

پاسخ: با توجه به رابطه $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ ، ($q \neq 1$) داریم:

$$S_8 = \frac{5}{4} S_4 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{5}{4} \times \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} \Rightarrow 1-q^8 = \frac{5}{4}(1-q^4) \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (1-q^4)(1+q^4) = \frac{5}{4}(1-q^4)$$

$$\Rightarrow 1+q^4 = \frac{5}{4} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_7}{a_1} = \frac{a_1 q^6}{a_1} = q^6 = (q^2)^3 = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

نکته: در دنباله هندسی بین مجموع n جمله اول و مجموع $2n$ جمله اول رابطه زیر برقرار است: ($q \neq \pm 1$)

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = q^n + 1$$

به عنوان مثال، در تست قبل برای تعیین قدرنسبت می‌توان گفت:

$$\frac{S_8}{S_4} = q^4 + 1 \Rightarrow q^4 + 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow \dots$$

تست: طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا $\frac{2}{3}$ از مساحت آن را رنگ کرده، سپس $\frac{2}{3}$ از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم.

به همین ترتیب در هر مرحله $\frac{2}{3}$ از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله حداقل $\frac{99}{100}$ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

$$4 \quad (4)$$

$$5 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$7 \quad (1)$$

| | |
|----------------|---------------|
| $\frac{2}{3}$ | |
| $\frac{2}{27}$ | $\frac{2}{9}$ |

پاسخ: روش اول: مساحت مربع اولیه برابر ۱ است. در مرحله اول $\frac{2}{3}$ از سطح مربع رنگ می‌شود. در مرحله دوم

$\frac{2}{3}$ از $\frac{1}{3}$ باقی مانده، یعنی $\frac{2}{9}$ رنگ می‌شود، در مرحله سوم نیز $\frac{2}{3}$ از $\frac{1}{9}$ باقی مانده، یعنی $\frac{2}{27}$ رنگ می‌شود و به

همین ترتیب، قسمتی از مربع که در هر مرحله رنگ می‌شود، تشکیل یک دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = \frac{2}{3}$ و

قدرنسبت $q = \frac{1}{3}$ می‌دهند:

$$\text{جملات دنباله: } \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots$$

حال باید مجموع این مساحت‌های رنگ شده، بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{99}{100}$ باشد:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{2}{3}(1-(\frac{1}{3})^n)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}(1-(\frac{1}{3})^n)}{\frac{2}{3}} = 1-(\frac{1}{3})^n$$

$$S_n \geq \frac{99}{100} \Rightarrow 1-(\frac{1}{3})^n \geq \frac{99}{100} \Rightarrow (\frac{1}{3})^n \leq 1-\frac{99}{100} \Rightarrow (\frac{1}{3})^n \leq \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 3^n \geq 100 \Rightarrow n \geq 5$$

یعنی از مرحله پنجم، حداقل ۹۹/۵ درصد مربع رنگ شده است.

روش دوم: به جای این‌که بگوییم مجموع مساحت‌های رنگ‌شده بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{99}{100}$ باشد، می‌گوییم باید مساحت قسمت رنگ‌نشده کم‌تر یا مساوی $\frac{1}{100}$ باشد.

در مرحله اول $\frac{1}{3}$ ، مرحله دوم $\frac{1}{9}$ ، مرحله سوم $\frac{1}{27}$ و به همین ترتیب در مرحله n ام، $\frac{1}{3^n}$ از مساحت مربع، رنگ نشده است. پس داریم:

$$\frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 3^n \geq 100 \Rightarrow n \geq 5$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

اثبات چند اتحاد مهم به کمک مجموع جملات دنباله هندسی

اگر a یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه فرض کنید:

$$S = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$$

S مجموع جملات دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = 1$ و قدرنسبت $q = a$ می‌باشد، پس داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S = \frac{1(1-a^n)}{1-a} = \frac{-(a^n-1)}{-(a-1)} = \frac{a^n-1}{a-1} \Rightarrow a^n-1 = S(a-1) \Rightarrow a^n-1 = (1+a+a^2+\dots+a^{n-1})(a-1)$$

اگر n عددی فرد باشد، با تبدیل a به $-a$ خواهیم داشت:

$$a^n+1 = (a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+\dots-a+1)$$

با توجه به مطالب بالا اتحادهای مهم زیر را می‌توان نتیجه گرفت: ($n \in \mathbb{N}$)

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1}) \quad (\text{فرد})$$

$$x^n - y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + xy^{n-2} - y^{n-1}) \quad (\text{زوج})$$

مثال: حاصل عبارت $A = \frac{(x^5+1)(x-1)}{x^2-1} + x^3 + x$ را به‌ازای $x = \sqrt[3]{3}$ به‌دست آورید.

پاسخ: با تجزیه عبارت x^5+1 داریم:

$$A = \frac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} + x^3 + x = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 + x^3 + x$$

$$= x^4 + x^2 + 1 \stackrel{x=\sqrt[3]{3}}{=} 3 + \sqrt{3} + 1 = 4 + \sqrt{3}$$

ریاضی خارج ۹۳

تست: حاصل عبارت $\frac{t^8 - t^7 + t^6 - \dots - t + 1}{t^6 - t^3 + 1}$ به‌ازای $t = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: روش اول: عبارت $A = 1 - t + t^2 + \dots - t^7 + t^8$ ، مجموع ۹ جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = 1$ و قدرنسبت $q = -t$

می‌باشد. بنابراین:

$$A = S_9 = \frac{a_1(1-q^9)}{1-q} = \frac{1-(-t)^9}{1-(-t)} = \frac{1+t^9}{1+t}$$

عبارت $B = 1 - t^3 + t^6$ ، مجموع ۳ جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = 1$ و قدرنسبت $q = -t^3$ می‌باشد. بنابراین:

$$B = S_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = \frac{1-(-t^3)^3}{1-(-t^3)} = \frac{1+t^9}{1+t^3} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{1+t^9}{1+t} = \frac{(1+t)(1-t+t^2)}{1+t} = 1-t+t^2 = 1 - \frac{1+\sqrt{17}}{2} + \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1+\sqrt{17}}{2} + \frac{1+2\sqrt{17}+17}{4} = 1 + \frac{-2-2\sqrt{17}+18+2\sqrt{17}}{4} = 1+4=5$$

روش دوم: با توجه به اتحادهای گفته شده داریم:

$$t^9 + 1 = (t+1)(t^8 - t^7 + \dots - t + 1), \quad t^9 + 1 = ((t^3)^3 + 1) = (t^3 + 1)(t^6 - t^3 + 1)$$

$$\Rightarrow \frac{t^8 - t^7 + t^6 - \dots - t + 1}{t^6 - t^3 + 1} = \frac{\cancel{t^8 + 1}}{t+1} = \frac{t^3 + 1}{t+1} = \frac{(t+1)(t^2 - t + 1)}{(t+1)} = t^2 - t + 1 \quad \text{مانند روش اول} \quad ۵$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

دنباله حسابی و مجموع جملات آن

کتاب درسی

۱- حاصل $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ کدام است؟

$n^2 - 1$ (۴) $(2n - 1)^2$ (۳) $(n + 1)^2$ (۲) n^2 (۱)

۲- بر محیط دایره‌ای ۲۰ نقطه متمایز وجود دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای متمایز به دست آمده کدام است؟

کتاب درسی

420 (۴) 380 (۳) 210 (۲) 190 (۱)

۳- اگر $\frac{5}{p}, x, y, 1$ چهار جمله اول یک دنباله حسابی باشند، مجموع ۱۵ جمله اول این دنباله کدام است؟

68 (۴) $67/5$ (۳) $62/5$ (۲) 57 (۱)

۴- در یک دنباله حسابی، جمله نوزدهم برابر ۱۰ می‌باشد. مجموع ۳۷ جمله اول این دنباله کدام است؟

135 (۴) 270 (۳) 185 (۲) 370 (۱)

ریاضی خارج ۸۸

۵- در یک دنباله عددی، جمله هفتم، نصف جمله سوم می‌باشد. مجموع چند جمله اول از این دنباله صفر است؟

21 (۴) 20 (۳) 19 (۲) 18 (۱)

کتاب درسی

۶- در یک دنباله حسابی، مجموع n جمله اول از رابطه $S_n = 4n^2 + 3n$ به دست می‌آید. جمله عمومی دنباله a_n کدام است؟

$a_n = 4n + 1$ (۴) $a_n = 4n + 3$ (۳) $a_n = 8n - 1$ (۲) $a_n = 8n + 1$ (۱)

۷- جمله چهارم و شانزدهم از یک دنباله حسابی به ترتیب ۱ و ۱۷ می‌باشند. مجموع ۱۳ جمله اول آن کدام است؟

65 (۴) 56 (۳) 36 (۲) 33 (۱)

۸- در دنباله حسابی $\dots, -21, x, -27$ مجموع جملات منفی کدام است؟

-270 (۴) -75 (۳) -150 (۲) -135 (۱)

کتاب درسی

۹- در دنباله حسابی $\dots, 11, 8, 5$ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل بیشتر از ۵۰۰ شود؟

20 (۴) 19 (۳) 18 (۲) 17 (۱)

۱۰- بین اعداد -13 و 71 ، بیست واسطه حسابی درج کرده‌ایم. قدرنسبت دنباله و مجموع این بیست واسطه حسابی به ترتیب از راست به چپ، کدام است؟

$593, 3$ (۴) $580, 3$ (۳) $593, 4$ (۲) $580, 4$ (۱)

۱۱- در یک دنباله عددی مجموع ۲۰ جمله اول، سه برابر مجموع ۱۲ جمله اول آن است. اگر جمله سوم آن برابر ۶ باشد، جمله دهم آن کدام است؟

ریاضی داخل ۹۰

38 (۴) 36 (۳) 34 (۲) 32 (۱)

۱۲- در یک دنباله حسابی با جمله اول a ، اگر یک واحد به قدرنسبت افزوده شود، آن‌گاه به مجموع ۲۰ جمله اول چه قدر افزوده خواهد شد؟

ریاضی داخل ۸۳

190 (۴) 180 (۳) 170 (۲) 160 (۱)

کتاب درسی

۱۳- مجموع اعداد طبیعی فرد و بخش پذیر بر عدد ۳ که کوچک تر از ۱۰۱ می‌باشند، کدام است؟

884 (۴) 867 (۳) 852 (۲) 816 (۱)

ریاضی داخل ۹۸

۱۴- مجموع تمام اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۷، کدام است؟

742 (۴) 735 (۳) 728 (۲) 721 (۱)

کتاب درسی

۱۵- مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۷ کدام است؟

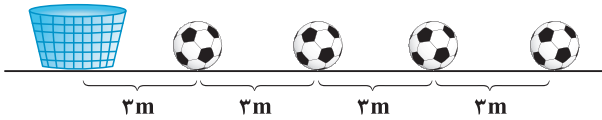
70336 (۴) 70400 (۳) 69237 (۲) 35168 (۱)

۱۶- مجموع اعداد بین ۲۰ تا ۲۰۰ که باقی مانده تقسیم آن‌ها بر عدد ۴ برابر ۲ باشد، کدام است؟

- ۴۹۹۵ (۴) ۴۹۵۰ (۳) ۴۹۲۸ (۲) ۴۷۵۲ (۱)

۱۷- مطابق شکل، تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سید ۳ متر است. دونه‌ای باید از کنار سید شروع کرده و هر توپ را برداشته و به سید بیندازد و مجدداً به طرف توپ بعدی بدود و آن را تا سید حمل کند و به داخل آن بیندازد. اگر این دونده مجموعاً ۹۱۸ متر دویده باشد، او چند توپ را در سید انداخته است؟

کتاب درسی



- ۱۵ (۱)
۱۶ (۲)
۱۷ (۳)
۱۸ (۴)

۱۸- مجموع n جمله اول از یک دنباله حسابی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ می‌باشد. در این دنباله، مجموع جملات با شروع از جمله هفتم

ریاضی خارج ۹۰

و ختم به جمله هجدهم، کدام است؟

- ۹ (۱) $\frac{29}{3}$ (۲) $\frac{49}{3}$ (۳) ۱۸ (۴)

۱۹- در دنباله‌ای با جمله عمومی $a_n = \frac{n}{2} - 1$ ، مجموع جملات متوالی با شروع از جمله دهم و ختم به جمله سی‌ام کدام است؟

- ۱۶۸ (۱) ۱۸۹ (۲) ۱۹۰ (۳) ۲۱۰ (۴)

۲۰- در یک دنباله عددی، مجموع ۴ جمله اول برابر ۱۵ و مجموع ۵ جمله بعدی آن برابر ۳۰ می‌باشد. جمله یازدهم این دنباله کدام است؟

- $7/5$ (۱) ۸ (۲) $8/5$ (۳) ۹ (۴)

۲۱- در یک دنباله حسابی، مجموع ۵ جمله اول، $\frac{1}{3}$ مجموع ۵ جمله بعدی می‌باشد. جمله دوم چند برابر جمله اول است؟

- $\frac{3}{2}$ (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲۲- یک دنباله حسابی دارای ۴۱ جمله است. اگر مجموع ۵ جمله وسط برابر ۲۰ باشد، مجموع این ۴۱ جمله کدام است؟

- ۱۲۳ (۱) ۱۶۴ (۲) ۲۰۵ (۳) ۲۴۶ (۴)

۲۳- در یک دنباله حسابی $S_1 - S_7 = 6$ است. حاصل عبارت $a_6 + a_7 + \dots + a_{12}$ کدام است؟

- ۱۴ (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴)

۲۴- در بیست جمله اول از یک دنباله حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله اول کدام است؟

کتاب درسی

- ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر (۱)

۲۵- در دو دنباله حسابی به صورت‌های $2, 4, 6, \dots$ و $5, 8, 11, \dots$ مجموع جملات مشترک کم‌تر از ۱۰۰ کدام است؟

- ۸۴۸ (۱) ۷۵۰ (۲) ۶۵۸ (۳) ۶۴۲ (۴)

۲۶- در یک دنباله حسابی، $a_1 = 3 + \sqrt{2}$ و $a_7 = 5 + \sqrt{2}$ است. مجموع چهار جمله چهارم این دنباله چه قدر از مجموع چهار جمله دومش بیشتر است؟

- ۸ (۱) ۶۴ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴)

۲۷- در یک دنباله حسابی، مجموع ۸ جمله اول آن با مجموع ۱۴ جمله اول آن برابر است. مجموع ۲۲ جمله اول دنباله کدام است؟

- ۱۴ (۱) ۱۴ (۲) ۲۸ (۳) صفر (۴)

۲۸- در دنباله حسابی $1, 4, 7, 10, \dots$ مجموع جملات چهارم، هشتم، دوازدهم، ... و شصتم کدام است؟

- ۱۳۸۰ (۱) ۱۳۹۰ (۲) ۱۴۰۰ (۳) ۱۴۱۰ (۴)

۲۹- کدام گزینه به ترتیب جمله عمومی و مجموع n جمله اول، یک دنباله حسابی را نشان می‌دهد؟

- (۱) $\{2n^2 + n\}, \{3n - \frac{1}{2}\}$ (۲) $\{2n^2 + 5\}, \{3n - \frac{1}{2}\}$ (۳) $\{2n^2 + n\}, \{3n + \frac{1}{n}\}$ (۴) $\{2n^2 + 5\}, \{3n + \frac{1}{n}\}$

۳۰- اگر $a_n = (p-2)n^2 + (2p-1)n - 5$ جمله عمومی یک دنباله حسابی باشد، مجموع ده جمله اول این دنباله کدام است؟

- ۹۵ (۱) ۱۱۰ (۲) ۱۱۵ (۳) ۱۲۵ (۴)

۳۱- مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی از رابطه $S_n = (2p-1)n^2 + qn^2 + pn + q + 1$ به دست می‌آید. مجموع ۵ جمله دوم این دنباله کدام است؟

- ۸۷/۵ (۱) -۸۲/۵ (۲) -۷۷/۵ (۳) -۷۲/۵ (۴)

۳۲- در یک دنباله حسابی ۶۰ جمله‌ای، مجموع ۱۱ جمله اول برابر با ۷۰ و مجموع ۱۱ جمله آخر برابر ۵۱ می‌باشد. مجموع تمام جملات کدام است؟

- (۱) ۲۴۰ (۲) ۳۳۰ (۳) ۴۲۰ (۴) ۵۱۰

۳۳- در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۱۵ و مجموع سه جمله آخر برابر ۶۹ است و مجموع تمام جملات ۱۶۸ می‌باشد. این دنباله چند جمله دارد؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۲ (۳) ۱۱ (۴) ۱۰

۳۴- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جمله هر دسته برابر شماره آن دسته باشد. ... (۱, ۳, ۵), (۷, ۹, ۱۱), (۱۳, ۱۵, ۱۷, ۱۹, ۲۱), ... جمله آخر در دسته بیستم کدام است؟

ریاضی خارج ۹۱

- (۱) ۴۱۵ (۲) ۴۱۹ (۳) ۴۲۱ (۴) ۴۲۳

۳۵- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جمله هر دسته، مجذور کامل باشد. ... (۱, ۳, ۵), (۷, ۹, ۱۱), (۱۳, ۱۵, ۱۷, ۱۹, ۲۱), ... مجموع جملات در دسته دهم کدام است؟

- (۱) ۱۶۹۱ (۲) ۱۷۱۰ (۳) ۱۷۲۹ (۴) ۱۷۴۸

۳۶- در یک دنباله حسابی، مجموع ۵ جمله متوالی برابر ۵ و مجموع مربعات آن‌ها ۴۵ می‌باشد. جمله وسط این پنج جمله چند برابر مجذور قدرنسبت می‌باشد؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{4}$

۳۷- اعداد $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ جملات متوالی تصاعد حسابی هستند. اگر $a_1 = 4$ و $a_n = 169$ باشند، مجموع

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}}$$

- (۱) $\frac{n}{12}$ (۲) $\frac{n-1}{12}$ (۳) $\frac{n}{15}$ (۴) $\frac{n-1}{15}$

۳۸- در یک دنباله عددی جمله دوم ۳ برابر جمله سوم می‌باشد و داریم: $a_n = a_{n+3} + 9$. مجموع چهار جمله سوم این دنباله کدام است؟

- (۱) -۸۴ (۲) -۸۲ (۳) -۷۸ (۴) -۷۶

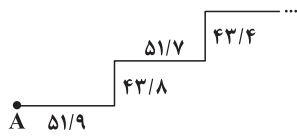
۳۹- بین دو عدد ۵ و ۵۳، تعدادی عدد طوری قرار می‌دهیم که کل اعداد تشکیل دنباله حسابی بدهند و تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این اعداد ۳۶ باشد. مجموع کل اعداد قرار داده شده کدام است؟

- (۱) ۱۸۷ (۲) ۲۱۰ (۳) ۱۹۷ (۴) ۲۰۳

۴۰- در دنباله حسابی با جمله عمومی $a_n = 2n - 1$ ، حاصل $\frac{2}{a_1 a_2} + \frac{2}{a_2 a_3} + \frac{2}{a_3 a_4} + \dots + \frac{2}{a_{12} a_{13}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{0.92}{1}$ (۲) $\frac{0.94}{2}$ (۳) $\frac{0.96}{3}$ (۴) $\frac{0.98}{4}$

۴۱- کوهنوردی از نقطه A پایین کوه در مسیری به شکل مقابل در حال صعود به نوک کوه است به طوری که هر کدام از فواصل افقی را در زمان $\frac{1}{5}$ دقیقه و هر کدام از فواصل عمودی را در $\frac{1}{75}$ دقیقه طی می‌کند. فواصل افقی $\frac{1}{2}$ و فواصل عمودی $\frac{1}{4}$ متر در هر مرحله کاهش می‌یابد. اگر او بعد از ۶۵ دقیقه به نوک قله کوه یعنی نقطه B برسد، طول AB کدام است؟



- (۱) $100\sqrt{132}$ (۲) $100\sqrt{152}$ (۳) $100\sqrt{154}$ (۴) $100\sqrt{164}$

دنباله هندسی و مجموع جملات آن

۴۲- در یک دنباله هندسی، مجموع پنج جمله اول برابر ۱۲ و جمله ششم ۲۴ واحد از جمله اول بیشتر می‌باشد. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۴۳- دنباله هندسی $\dots, \frac{1}{p}, x, 2$ غیرنزولی است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

- (۱) $\frac{41}{32}$ (۲) $\frac{21}{16}$ (۳) $\frac{11}{8}$ (۴) $\frac{23}{16}$

ریاضی خارج ۸۹

۴۴- در یک دنباله هندسی صعودی به صورت $\dots, b, 9, a, 4$ ، مجموع شش جمله اول کدام است؟

- (۱) $81\frac{3}{8}$ (۲) $81\frac{7}{8}$ (۳) $82\frac{3}{8}$ (۴) $83\frac{1}{8}$

۴۵- در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول آن ۱۵۳ می‌باشد. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟

- ریاضی داخل ۸۹
- | | | | |
|---------------------|-------|-------|--------|
| (۱) $\frac{81}{16}$ | (۲) ۸ | (۳) ۹ | (۴) ۱۶ |
|---------------------|-------|-------|--------|

۴۶- در یک دنباله هندسی، مجموع ده جمله اول $(4\sqrt{2} + 1)$ برابر مجموع ۵ جمله اول است. در این دنباله، مجموع ۸ جمله اول چند برابر مجموع چهار جمله اول است؟

- | | | | |
|-------|-------|-------|--------|
| (۱) ۵ | (۲) ۳ | (۳) ۹ | (۴) ۱۷ |
|-------|-------|-------|--------|

۴۷- در یک دنباله هندسی نزولی با جمله اول مثبت، بین جملات، رابطه $\frac{a_1 a_2 a_3}{(a_4)^3} = 64$ برقرار است. مجموع شش جمله اول، چند برابر جمله اول است؟

- | | | | |
|---------------------|---------------------|----------------------|---------------------|
| (۱) $\frac{63}{64}$ | (۲) $\frac{63}{32}$ | (۳) $\frac{63}{128}$ | (۴) $\frac{63}{16}$ |
|---------------------|---------------------|----------------------|---------------------|

۴۸- بین دو عدد ۲ و $16\sqrt{2}$ ، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، دنباله هندسی تشکیل داده‌اند. مجموع این ۸ عدد کدام است؟

ریاضی خارج ۸۸

- | | | | |
|------------------------|------------------|------------------------|------------------------|
| (۱) $30(2 + \sqrt{2})$ | (۲) $48\sqrt{2}$ | (۳) $30(\sqrt{2} + 1)$ | (۴) $36(\sqrt{2} + 1)$ |
|------------------------|------------------|------------------------|------------------------|

۴۹- در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن برابر ۳ می‌باشد. مجموع شش جمله اول کدام است؟

- ریاضی داخل ۸۸
- | | | | |
|------------|------------|------------|------------|
| (۱) $10/8$ | (۲) $11/2$ | (۳) $12/6$ | (۴) $13/4$ |
|------------|------------|------------|------------|

۵۰- برای محافظت از تابش مضر مواد رادیو اکتیویته، لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد مضر ۹۷ درصد کاهش یابد؟

کتاب درسی

- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| (۱) ۶ | (۲) ۷ | (۳) ۸ | (۴) ۹ |
|-------|-------|-------|-------|

۵۱- طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن و سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. به همین ترتیب در هر مرحله، نیمی از مساحت باقی‌مانده از مرحله قبل را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله، حداقل ۹۹ درصد سطح مربع، رنگ شده است؟

کتاب درسی

- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| (۱) ۶ | (۲) ۷ | (۳) ۸ | (۴) ۹ |
|-------|-------|-------|-------|

۵۲- تعداد جملات یک دنباله هندسی عددی زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟

ریاضی داخل ۹۴

- | | | | |
|-------------------|-------------------|-------|-------|
| (۱) $\frac{1}{3}$ | (۲) $\frac{1}{2}$ | (۳) ۲ | (۴) ۳ |
|-------------------|-------------------|-------|-------|

۵۳- جملات اول، دوم و ششم از یک دنباله حسابی، جملات متوالی یک دنباله هندسی هستند. مجموع ۱۰ جمله اول این دنباله حسابی چند برابر جمله اول آن است؟

- | | | | |
|---------|---------|---------|---------|
| (۱) ۱۲۰ | (۲) ۱۲۵ | (۳) ۱۵۵ | (۴) ۱۴۵ |
|---------|---------|---------|---------|

۵۴- در یک دنباله حسابی جملات اول، پنجم و هفدهم به ترتیب سه جمله اول یک دنباله هندسی هستند. مجموع چهار جمله اول دنباله هندسی چند برابر جمله اول آن است؟

- | | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| (۱) ۱۵ | (۲) ۴۰ | (۳) ۸۵ | (۴) ۵۶ |
|--------|--------|--------|--------|

۵۵- حاصل $A = (1 + x + x^2 + \dots + x^8)(1 - x + x^2 - \dots + x^8)$ به‌ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

- | | | | |
|---------|---------|---------|---------|
| (۱) ۵۰۷ | (۲) ۵۱۱ | (۳) ۵۱۲ | (۴) ۵۱۶ |
|---------|---------|---------|---------|

ریاضی داخل ۹۳

۵۶- حاصل عبارت $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$ به‌ازای $t = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ کدام است؟

- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| (۱) ۲ | (۲) ۳ | (۳) ۴ | (۴) ۵ |
|-------|-------|-------|-------|

۵۷- در دنباله هندسی $\sqrt{3}, \sqrt[4]{243}, \dots$ مجموع چهار جمله اول چند برابر مجموع چهار جمله دوم است؟

- | | | | |
|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| (۱) $\frac{1}{3}$ | (۲) $\frac{1}{9}$ | (۳) $\frac{1}{27}$ | (۴) $\frac{1}{81}$ |
|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|

۵۸- به‌ازای یک مقدار x ، اعداد $2 - x^2, x^2, 2x$ و $x^2 + 4$ به ترتیب سه جمله اول از دنباله هندسی نزولی‌اند. مجموع هفت جمله اول این دنباله کدام است؟

تجربی داخل ۹۳

- | | | | |
|----------------------|----------------------|--------------------|---------------------|
| (۱) $\frac{117}{16}$ | (۲) $\frac{125}{16}$ | (۳) $\frac{63}{4}$ | (۴) $\frac{127}{8}$ |
|----------------------|----------------------|--------------------|---------------------|

۵۹- در خانه اول شطرنج، یک عدد گندم می‌گذاریم. در خانه دوم ۲ گندم، در خانه سوم ۴ گندم و به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانه قبل گندم قرار می‌دهیم. اگر وزن هر دانه گندم یک گرم باشد، وزن کل گندم‌ها چند گرم می‌شود؟ مقدار آن از ۱۰۰۰ میلیارد تن بیشتر است یا کمتر؟ (صفحه شطرنج ۶۴ خانه دارد).

کتاب درسی

۱(۱) - ۸^۸، بیشتر ۱(۲) - ۸^۸، کمتر ۳(۱) - ۱۶^{۱۶}، بیشتر ۴(۱) - ۱۶^{۱۶}، کمتر

۶۰- در خانه اول شطرنج یک عدد گندم، در خانه دوم ۲ گندم، در خانه سوم ۴ گندم و به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانه قبل گندم می‌گذاریم. اگر وزن هر دانه گندم یک گرم باشد، حداقل در چند خانه، گندم قرار داده شود تا میزان کل گندم بیشتر از ۶۴ کیلوگرم باشد؟

۱(۱) ۱۷ ۲(۲) ۱۸ ۳(۳) ۲۰ ۴(۴) ۱۶

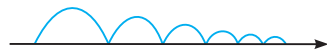
۶۱- توپی را از سطح زمین به هوا پرتاب می‌کنیم به طوری که تا ارتفاع ۶۴ متری بالا می‌رود و بعد از هر بار برخورد به زمین به اندازه نصف ارتفاع قبلی بالا می‌رود. در لحظه‌ای که برای دهمین بار به زمین برخورد می‌کند، این توپ چه مسافتی را بر حسب متر طی کرده است؟

۱(۱) ۱۲۷/۷۵ ۲(۲) ۱۹۱/۷۵ ۳(۳) ۲۵۵/۷۵ ۴(۴) ۲۶۴/۷۵

۶۲- یک بانک به حساب سپرده مشتری، سالانه ۲۰٪ سود می‌دهد. اگر شخصی دو میلیون تومان سپرده‌گذاری کند، بعد از ۵ سال مقدار موجودی حسابش تقریباً چند میلیون تومان می‌شود؟ (فرض کنید ۲۵۰۰۰۰ = ۱۳^۵)

۱(۱) ۴ ۲(۲) ۴/۵ ۳(۳) ۵/۵ ۴(۴) ۵

۶۳- موجی بر روی نیم‌دایره‌های بالای یک محور حرکت می‌کند. با قطر اولیه یک واحد، هر بار که به محور برخورد کند، ۲۰ درصد از طول قطر آن کاسته می‌شود. اندازه محیط این نیم‌دایره‌های متوالی دنباله‌ای از اعداد حقیقی است. مجموع ۵ جمله اول این دنباله کدام است؟



۱(۱) $\frac{5\pi}{2} \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^5\right)$ ۲(۲) $\frac{5\pi}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^5\right)$ ۳(۳) $5\pi \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^5\right)$ ۴(۴) $5\pi \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^5\right)$

ریاضی خارج ۹۸

۶۴- با توجه به دنباله حسابی، مجموع $\frac{1}{17 \times 20} + \frac{1}{8 \times 11} + \frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{2 \times 5} + \dots$ ، کدام است؟

۱(۱) ۰/۱۵ ۲(۲) ۰/۱۸ ۳(۳) ۰/۲۴ ۴(۴) ۰/۲۵

۶۵- در تجزیه $x^9 + x^3 y^3$ کدام عامل وجود دارد؟

۱(۱) $x^2 - y$ ۲(۲) $x^2 + y^2 + x^2 y$ ۳(۳) $x^3 + y$ ۴(۴) $x^2 + y^2 - x^2 y$

۶۶- در تجزیه عبارت $(x^3 - x^2 + 3)^9 + (x^3 + x^2 + 1)^9$ کدام عامل وجود دارد؟

۱(۱) $x^2 + 2$ ۲(۲) $x^2 - 1$ ۳(۳) $2x^2 - 1$ ۴(۴) $2x^2 + 2$

۶۷- حاصل عبارت $A = \frac{(x^2 + 1)(x - 2)}{x^2 - x - 2} + x^5 + x^3 + x$ به ازای $x = \sqrt{3}$ کدام است؟

۱(۱) ۴۰ ۲(۲) ۴۱ ۳(۳) ۴۲ ۴(۴) ۴۳

۶۸- در یک دنباله هندسی که نه صعودی است و نه نزولی، مجموع چهار جمله اول $\frac{1}{3}$ مجموع جملات پنجم تا دوازدهم می‌باشد. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱(۱) $-\sqrt{2}$ ۲(۲) $\sqrt{2}$ ۳(۳) $-\sqrt[3]{2}$ ۴(۴) $\sqrt[3]{2}$

۶۹- سه عدد، جملات متوالی یک دنباله هندسی اند به طوری که مجموع آن‌ها ۲۱ و مجموع معکوس آن‌ها $\frac{7}{13}$ است. عدد بزرگ‌تر کدام است؟

۱(۱) ۹ ۲(۲) ۱۰ ۳(۳) ۱۲ ۴(۴) ۱۵



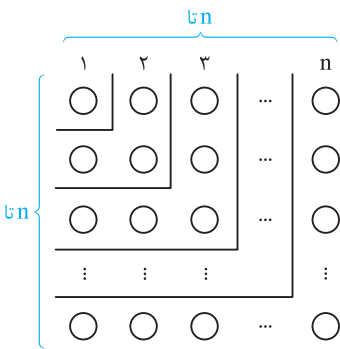
پایه نهم ریاضیات

روش اول: مجموع $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ با جمله اول $a_1 = 1$ و قدرنسبت $d = 2$ است. بنابراین:

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d) = \frac{n}{2} (2(1) + (n - 1)2) = \frac{n}{2} (2n) = n^2$$

روش دوم: چون $a_n = 2n - 1$ را داریم، پس از رابطه $S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$ نیز می‌توان استفاده کرد:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} (1 + (2n - 1)) = \frac{n}{2} (2n) = n^2$$



در این تیپ تست‌ها می‌تونی از عددگذاری هم استفاده کنی، یعنی این‌که می‌دونیم در این‌جا، مجموع یک جمله اول برابر ۱ و مجموع دو جمله اول برابر ۴ هست، حالا اگه توی گزینه‌ها $n = 1$ و $n = 2$ رو بگذاریم، تنها گزینه‌ای که جواب درست می‌ده گزینه یک.

توجه: مطابق آنچه در کتاب درسی به آن اشاره شده، مجموع n جمله اول اعداد فرد را از شکل روبه‌رو نیز می‌توان به‌دست آورد. بدین ترتیب که اگر در n سطر و n ستون، دایره قرار دهیم، بدیهی است که تعداد دایره‌ها برابر n^2 می‌شود. حال به‌صورتی که در شکل، مشخص است کل دایره‌ها را n قسمت می‌کنیم، طوری که در قسمت اول ۱ دایره، در قسمت دوم ۳ دایره، در قسمت سوم ۵ دایره و به همین صورت در قسمت n ام، $2n - 1$ دایره وجود دارد. می‌دانیم مجموع تعداد آن‌ها باید برابر n^2 باشد، پس:

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

نقطه اول را به هریک از نقاط دیگر وصل می‌کنیم، در این صورت ۱۹ وتر پدید می‌آید. با وصل نقطه دوم به نقاط دیگر (به غیر از نقطه اول) ۱۸

وتر به‌دست می‌آید. سپس نقطه سوم را به نقاط دیگر غیر از نقاط اول و دوم وصل می‌کنیم تا ۱۷ وتر حاصل شود. با ادامه این عمل، تعداد وترهای حاصل برابر $1 + 2 + \dots + n$ می‌شود. می‌دانیم $1 + 2 + \dots + n$ مجموع جملات یک دنباله حسابی با جمله اول ۱ و قدرنسبت ۱ می‌باشد که بعد از

ساده کردن به رابطه $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ می‌رسیم. بنابراین داریم:

$$1 + 2 + \dots + 17 + 18 + 19 = \frac{19(19+1)}{2} = 190$$

با توجه به سؤال $a_1 = 1$ و $a_4 = \frac{5}{4}$ است. بنابراین:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow a_4 = 1 + 3d = \frac{5}{4} \Rightarrow 3d = \frac{1}{4} \Rightarrow d = \frac{1}{12}$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d) \Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2} (2 + 14(\frac{1}{12})) = 67\frac{5}{4}$$

روش اول:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow a_{19} = a_1 + 18d = 10 \quad (*)$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d) \Rightarrow S_{37} = \frac{37}{2} (2a_1 + 36d) = \frac{37}{2} (2(a_1 + 18d)) = 37(a_1 + 18d) \stackrel{\text{رابطه } (*)}{=} 37(10) = 370$$

روش دوم: از رابطه $S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$ استفاده می‌کنیم:

$$S_{37} = \frac{37}{2} (a_1 + a_{37}) \stackrel{\text{رابطه اندیس‌ها}}{=} \frac{37}{2} (2a_{19}) = 37a_{19} = 37(10) = 370$$

۴ ۵

$$a_7 = \frac{1}{4} a_3 \Rightarrow 2a_7 = a_3 \Rightarrow 2(a_1 + 6d) = a_1 + 2d \Rightarrow 2a_1 + 12d = a_1 + 2d \Rightarrow a_1 = -10d$$

$$S_n = 0 \Rightarrow \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d) = 0 \stackrel{a_1 = -10d}{\Rightarrow} \frac{n}{2} (-20d + (n - 1)d) = 0 \Rightarrow \frac{n}{2} (d(-20 + n - 1)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{nd}{2} (n - 21) = 0 \stackrel{nd \neq 0}{\Rightarrow} n - 21 = 0 \Rightarrow n = 21$$

روش اول: با توجه به این‌که $S_7 = a_1 + a_7$ و $S_1 = a_1$ است، داریم:

$$\begin{cases} S_1 = 4 + 3 = 7 \Rightarrow a_1 = 7 \quad (*) \\ S_7 = 4(7) + 3(7) = 22 \Rightarrow a_1 + a_7 = 22 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} 7 + a_7 = 22 \Rightarrow a_7 = 15 \end{cases} \Rightarrow d = a_7 - a_1 = 15 - 7 = 8$$

$$\text{جمله عمومی: } a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow a_n = 7 + (n - 1)(8) = 8n - 1$$

توجه: برای تعیین d می‌تونستی از این نکته استفاده کنی که فریب n^2 برابر نصف قدرنسبت، پس $\frac{d}{4} = 8$ و در نتیجه $d = 32$ می‌شه.

روش دوم: از رابطه $a_n = S_n - S_{n-1}$ استفاده می‌کنیم:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 4n^2 + 3n - (4(n-1)^2 + 3(n-1)) = 4n^2 + 3n - (4n^2 - 8n + 4 + 3n - 3) = 8n - 1$$

ابتدا با تشکیل a_4 و a_{16} و محاسبه تفاضل آن‌ها مقدار قدرنسبت را تعیین کرده و سپس S_{13} را به دست می‌آوریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow \begin{cases} a_4 = a_1 + 3d \\ a_{16} = a_1 + 15d \end{cases} \Rightarrow a_{16} - a_4 = (a_1 + 15d) - (a_1 + 3d) = 12d$$

$$\Rightarrow 17 - 1 = 12d \Rightarrow 16 = 12d \Rightarrow d = \frac{4}{3}$$

$$a_4 = a_1 + 3d = 1 \xrightarrow{d=\frac{4}{3}} a_1 + 3\left(\frac{4}{3}\right) = 1 \Rightarrow a_1 + 4 = 1 \Rightarrow a_1 = -3$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{13} = \frac{13}{2}\left(2(-3) + 12\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{13}{2}(-6 + 16) = \frac{13}{2}(10) = 13 \times 5 = 65$$

البته می‌توان در قسمت اول راه‌حل از رابطه $a_m - a_n = (m-n)d$ استفاده کرد.

چون $1, 8, 21, X, 27, -$ سه جمله متوالی دنباله حسابی هستند، داریم:

$$2X = (-27) + (-21) \Rightarrow 2X = -48 \Rightarrow X = -24$$

پس جملات دنباله حسابی به صورت $1, -24, -24, -21, \dots$ در می‌آیند و در نتیجه $a_1 = -27$ و $d = -24 - (-27) = 3$ می‌شود. حال جمله عمومی دنباله را

تعیین می‌کنیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = -27 + (n-1)(3) = 3n - 30$$

برای یافتن تعداد جملات منفی، نامعادله $a_n < 0$ را حل می‌کنیم:

$$3n - 30 < 0 \Rightarrow 3n < 30 \Rightarrow n < 10 \Rightarrow n \leq 9$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_9 = \frac{9}{2}(2(-27) + 8(3)) = \frac{9}{2}(-54 + 24) = \frac{9}{2}(-30) = 9(-15) = -135$$

۲ ۹

$$5, 8, 11, \dots \Rightarrow a_1 = 5, d = a_2 - a_1 = 8 - 5 = 3$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2(5) + (n-1)3) = \frac{n}{2}(10 + 3n - 3) = \frac{n}{2}(3n + 7)$$

برای این که $S_n > 500$ شود، به جای حل نامعادله $\frac{n}{2}(3n + 7) > 500$ که وقت‌گیر است، بهتر است از اعداد گزینیه‌ها استفاده کنیم:

$$n = 17 \Rightarrow \frac{n}{2}(3n + 7) = \frac{17}{2}(58) = 493 < 500$$

$$n = 18 \Rightarrow \frac{n}{2}(3n + 7) = \frac{18}{2}(61) = 549 > 500$$

بنابراین اگر حداقل ۱۸ جمله را با هم جمع کنیم، حاصل بیشتر از ۵۰۰ می‌شود.

چون ۲۰ واسطه درج می‌کنیم، پس دنباله حاصل ۲۲ جمله دارد که جمله اول برابر ۱۳- و جمله بیست و دوم برابر ۷۱ است. برای پیدا کردن

مجموع ۲۰ واسطه حسابی، ابتدا مجموع کل اعداد را حساب کرده و حاصل را منهای اعداد ۱۳- و ۷۱ می‌کنیم:

$$\underbrace{-13, 0, 0, \dots, 0, 71}_{\substack{a_1 \quad \text{جمله } 20 \quad a_{22}}}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{22} = \frac{22}{2}(a_1 + a_{22}) = 11(-13 + 71) = 11(58) = 638$$

$$\text{مجموع } 20 \text{ واسطه} = 638 - (-13 + 71) = 638 - 58 = 580$$

حال برای تعیین قدرنسبت، کافی است a_{22} را تشکیل دهیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{22} = a_1 + 21d \Rightarrow 71 = -13 + 21d \Rightarrow 84 = 21d \Rightarrow d = 4$$

تذکره: برای این که مجموع بیست واسطه رو حساب کنی، این طوری هم می‌شود:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(a_2 + a_{21}) = 10(a_1 + a_{22}) = 10(-13 + 71) = 10(58) = 580$$

با توجه به رابطه $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ داریم:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = 20a_1 + 190d \quad ; \quad S_{22} = \frac{22}{2}(2a_1 + 21d) = 22a_1 + 231d$$

$$S_{20} = 3S_{22} \Rightarrow 20a_1 + 190d = 3(22a_1 + 231d) \Rightarrow -8d = 16a_1 \Rightarrow d = -2a_1$$

از طرفی جمله سوم برابر ۶ می‌باشد، پس $a_1 + 2d = 6$ ، در نتیجه داریم:

$$a_1 + 2d = 6 \xrightarrow{d=-2a_1} a_1 - 4a_1 = 6 \Rightarrow -3a_1 = 6 \Rightarrow a_1 = -2 \xrightarrow{d=-2a_1} d = 4$$

$$a_{20} = a_1 + 19d = -2 + 19(4) = -2 + 76 = 74$$

۱۲ ۴ مجموع ۲۰ جمله اول دنباله حسابی با جمله اول a و قدرنسبت d برابر است با:

$$S_{20} = \frac{20}{1} (2a + 19d) = 20a + 190d \quad (*)$$

حال مجموع ۲۰ جمله اول دنباله با جمله اول a و قدرنسبت $d+1$ را حساب می‌کنیم:

$$S'_{20} = \frac{20}{1} (2a + 19(d+1)) = 20a + 190(d+1) = (20a + 190d) + 190 \stackrel{(*)}{=} S_{20} + 190$$

بنابراین اگر یک واحد به قدرنسبت اضافه شود، به مجموع ۲۰ جمله اول، ۱۹۰ واحد افزوده خواهد شد.

۱۳ ۳ روش اول: اولین عدد طبیعی فرد مضرب ۳ برابر خود عدد ۳ و آخرین آن که کوچک‌تر از ۱۰۱ باشد، عدد ۹۹ است. بنابراین اعداد فرد مضرب ۳ کوچک‌تر از ۱۰۱ به صورت ۳، ۹، ۱۵، ...، ۹۹ هستند که دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۶ را تشکیل می‌دهند. ابتدا تعداد جملات این دنباله و سپس مجموع آن را تعیین می‌کنیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 99 = 3 + (n-1)(6) \Rightarrow 96 = 6n - 6 \Rightarrow 6n = 102 \Rightarrow n = 17$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \Rightarrow S_{17} = \frac{17}{2} (3 + 99) = \frac{17}{2} (102) = 17 \times 51 = 867$$

روش دوم: با توجه به صورت سؤال این اعداد تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۶ و جمله اول ۳ می‌دهند. ابتدا جمله عمومی دنباله را تعیین می‌کنیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 3 + (n-1)(6) \Rightarrow a_n = 6n - 3$$

با حل نامعادله $a_n < 101$ تعداد جملات فرد مضرب ۳، کم‌تر از ۱۰۱ به دست می‌آید:

$$6n - 3 < 101 \Rightarrow 6n < 104 \Rightarrow n < \frac{104}{6} = \frac{52}{3} \approx 17.3 \Rightarrow n \leq 17$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{17} = \frac{17}{2} (2(3) + 16(6)) = \frac{17}{2} (6 + 96) = \frac{17}{2} (102) = 867$$

۱۴ ۲ کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عدد دو رقمی مضرب ۷ به ترتیب $14 \times 7 = 98$ و $14 \times 7 = 98$ است. اعداد دو رقمی مضرب ۷ تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۱۴ و قدرنسبت ۷ می‌دهند که با نوشتن جمله عمومی، تعداد جملات آن را تعیین می‌کنیم:

$$14, 21, \dots, 98$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 98 = 14 + (n-1)(7) \Rightarrow 84 = 7(n-1) \Rightarrow n-1 = 12 \Rightarrow n = 13$$

پس این دنباله، ۱۳ جمله دارد، حال مجموع این جملات را حساب می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \Rightarrow S_{13} = \frac{13}{2} (14 + 98) = 13(7 + 49) = 728$$

تذکره: برای تعیین تعداد جملات، چون دنباله به صورت $14 \times 7, 3 \times 7, \dots, 2 \times 7$ است، پس می‌توان گفت $n = 14 - 2 + 1 = 13$.

۱۵ ۴ کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عدد سه رقمی مضرب ۷ به ترتیب برابر $105 = 15 \times 7$ و $994 = 142 \times 7$ است. بنابراین تعداد جملات دنباله برابر $142 - 15 + 1 = 128$ می‌باشد. اعداد سه رقمی مضرب ۷ تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۷ می‌دهند که مجموع جملات آن را حساب می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \Rightarrow S_{128} = \frac{128}{2} (105 + 994) = 64(1099) = 70336$$

به پای این‌که ۶۴ رو در ۱۰۹۹ ضرب کنی می‌تونی بگی یکان عدد حاصل برابر ۶ می‌شه، پس گزینه (۴) درسته.

۱۶ ۳ کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عدد بین ۲۰ تا ۲۰۰ که باقی‌مانده تقسیم آن بر عدد ۴ برابر ۲ است، برابر ۲۲ و ۱۹۸ می‌باشد. پس اعداد مورد نظر، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۲۲ و قدرنسبت ۴ می‌دهند که با نوشتن جمله عمومی، تعداد جملات آن را تعیین می‌کنیم:

$$22, 26, \dots, 198$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 198 = 22 + (n-1)(4) \Rightarrow 176 = 4(n-1) \Rightarrow n-1 = 44 \Rightarrow n = 45$$

بنابراین این دنباله ۴۵ جمله دارد، حال مجموع این اعداد را حساب می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \Rightarrow S_{45} = \frac{45}{2} (22 + 198) = \frac{45}{2} (220) = 45(110) = 4950$$

۱۷ ۳ دونه برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد، باید مسافت $2(3) = 6$ متر را طی کند، برای توپ دوم باید $2(3+3) = 12$ متر و برای

توپ سوم $2(3+3+3) = 18$ متر و ...، بنابراین مسافت‌های طی شده در هر مرحله، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۶ و قدرنسبت ۶ می‌دهند. اگر

n ، تعداد توپ‌های انداخته شده در سبد باشد، از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی، داریم:

$$6, 12, 18, \dots$$

$$S = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow 918 = \frac{n}{2} (12 + (n-1)6) \Rightarrow 918 = \frac{n}{2} (6n + 6) \Rightarrow 918 = 3n(n+1) \Rightarrow 306 = n(n+1)$$

برای حل معادله $n(n+1) = 306$ به جای استفاده از دلتا بهتر است، بگوییم ضرب دو عدد طبیعی متوالی 306 شده و چون $17 \times 18 = 306$ ، پس $n = 17$ می‌باشد.

۱۸ ۴ چون رابطه S_n را داریم، برای محاسبه $a_7 + a_8 + \dots + a_{18}$ کافی است، مجموع هجده جمله اول را منهای مجموع شش جمله اول کنیم:

$$S_n = \frac{n(n-15)}{6} \Rightarrow S_{18} = \frac{18(18-15)}{6} = 9; S_6 = \frac{6(6-15)}{6} = -9$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_6 \\ a_7 + a_8 + \dots + a_{18} = \underbrace{S_{18}}_{a_1 + a_2 + \dots + a_{18}} - S_6 = 9 - (-9) = 18$$

نتیجه: با در اختیار داشتن S_n ، برای تعیین مجموع جملات m تا n ($n > m$) داریم:

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_n = S_n - S_{m-1}$$

۱۹ ۲ چون a_n یک عبارت درجه اول بر حسب n می‌باشد، پس این دنباله، حسابی است. (با نوشتن چند جمله اول دنباله هم می‌توان فهمید که دنباله

حسابی است.)

روش اول: می‌خواهیم مجموع جملات $a_3, a_4, \dots, a_{29}, a_{30}$ را تعیین کنیم، این دنباله ۲۱ جمله دارد (زیرا $21 = (30 - 10) + 1$). حال با توجه به

$$\text{این که } a_n = \frac{n}{3} - 1, \text{ پس } a_{10} = \frac{10}{3} - 1 = 4 \text{ و } a_{30} = \frac{30}{3} - 1 = 14 \text{ و بنابراین داریم:}$$

$$S_n = \frac{n}{3} (\text{جمله آخر} + \text{جمله اول}) \Rightarrow S_{21} = \frac{21}{3} (4 + 14) = \frac{21}{3} (18) = 21 \times 9 = 189$$

روش دوم:

$$a_n = \frac{n}{3} - 1 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{1}{3} \\ a_r = 0 \end{cases} \Rightarrow d = a_r - a_1 = \frac{1}{3}$$

مجموع جملات با شروع از جمله دهم و ختم به جمله سی‌ام، برابر است با $S_{30} - S_9$ ، بنابراین:

$$S_{30} - S_9 = \frac{30}{3} (2(-\frac{1}{3}) + 29(\frac{1}{3})) - \frac{9}{3} (2(-\frac{1}{3}) + 8(\frac{1}{3})) = 15(-1 + \frac{29}{3}) - \frac{9}{3}(-1 + 4) = 15(\frac{27}{3}) - \frac{9}{3}(3) = \frac{405}{3} - \frac{27}{3} = 189$$

۲۰ ۲ مجموع ۴ جمله اول، برابر ۱۵ ($S_4 = 15$) و مجموع ۵ جمله بعدی برابر ۳۰ است. پس نتیجه می‌گیریم مجموع ۹ جمله اول آن برابر $30 + 15 = 45$ می‌باشد ($S_9 = 45$). بنابراین داریم:

$$\begin{cases} S_4 = 15 \Rightarrow \frac{4}{3} (2a_1 + 3d) = 15 \Rightarrow 2a_1 + 3d = \frac{15}{2} \\ S_9 = 45 \Rightarrow \frac{9}{3} (2a_1 + 8d) = 45 \Rightarrow \frac{1}{3} (2(a_1 + 4d)) = 5 \Rightarrow a_1 + 4d = 5 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 3, d = \frac{1}{3}$$

$$\text{جمله یازدهم: } a_{11} = a_1 + 10d = 3 + 10(\frac{1}{3}) = 3 + 5 = 8$$

۲۱ ۳ مجموع پنج جمله اول S_5 و مجموع پنج جمله بعدی $S_{10} - S_5$ است. بنابراین طبق فرض مسئله داریم:

$$S_5 = \frac{1}{3} (S_{10} - S_5) \xrightarrow{\times 3} 3S_5 = S_{10} - S_5 \Rightarrow 4S_5 = S_{10} \Rightarrow 4 \times \frac{5}{3} (2a_1 + 4d) = \frac{5}{3} (2a_1 + 9d) \Rightarrow 10(2a_1 + 4d) = 5(2a_1 + 9d)$$

$$\Rightarrow 4a_1 + 8d = 2a_1 + 9d \Rightarrow d = 2a_1 \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 + d}{a_1} = \frac{d=2a_1}{a_1} = \frac{a_1 + 2a_1}{a_1} = \frac{3a_1}{a_1} = 3$$

۲۲ ۲ چون دنباله، ۴۱ جمله دارد، پس جمله وسط، جمله ۲۱ ام است (زیرا $\frac{41+1}{2}$). بنابراین:

$$\text{رابطه اندیس‌ها} \quad a_{19} + a_{20} + a_{21} + a_{22} + a_{23} = 20 \xrightarrow{\quad} 5a_{21} = 20 \Rightarrow a_{21} = 4$$

$$S_n = \frac{n}{3} (a_1 + a_n) \Rightarrow S_{41} = \frac{41}{3} (a_1 + a_{41}) \xrightarrow{\text{رابطه اندیس‌ها}} \frac{41}{3} (2a_{21}) = 41(a_{21}) = 41(4) = 164$$

برای تعیین مجموع جملات از نکته زیر نیز می‌توان استفاده کرد:

نکته: اگر در یک دنباله حسابی تعداد جملات فرد باشد، مجموع جملات آن برابر است با تعداد جملات ضرب در جمله وسط.

$$S_{41} = 41(a_{21}) = 41(4) = 164$$

بنابراین در این تست می‌توان نوشت:

۲۳ ۱ می‌دانیم $S_{10} = a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$ و $S_7 = a_1 + a_2 + \dots + a_7$ ، پس نتیجه می‌گیریم:

$$S_{10} - S_7 = a_8 + a_9 + a_{10} = 6 \xrightarrow{\text{رابطه اندیس‌ها}} 3a_9 = 6 \Rightarrow a_9 = 2$$

$$a_6 + a_7 + \dots + a_{12} = (a_6 + a_{12}) + (a_7 + a_{11}) + (a_8 + a_{10}) + a_9 = 2a_9 + 2a_9 + 2a_9 + a_9 = 7a_9 = 7(2) = 14$$

۱ ۲۴ مجموع جملات زوج و فرد را نوشته و از هم کم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} = 150 \\ & a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} = 135 \end{aligned}$$

$$(a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + (a_6 - a_5) + \dots + (a_{20} - a_{19}) = 15 \Rightarrow \underbrace{d + d + \dots + d}_{10} = 15 \Rightarrow 10d = 15 \Rightarrow d = 1.5$$

می‌دانیم $S_{20} = 150 + 135 = 285$ ، بنابراین:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = 285 \xrightarrow{d=1.5} 10(2a_1 + 19 \times 1.5) = 285 \Rightarrow 285 = 20a_1 + 285 \Rightarrow a_1 = 0$$

۱ ۲۵

نکته: اگر دو دنباله حسابی با قدرنسبت‌های d_1 و d_2 دارای جملات مشترک باشند، این جملات مشترک، با یکدیگر تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبتی برابر ک.م.م d_1 و d_2 خواهند داد.

$$\begin{cases} \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots \Rightarrow \text{قدرنسبت} = 2 \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ 5, 8, 11, 14, 17, \dots \Rightarrow \text{قدرنسبت} = 3 \end{cases}$$

دنباله جملات مشترک به صورت $8, 14, 20, \dots$ می‌باشد که جمله اول آن برابر ۸ و قدرنسبت آن برابر ۶ است (ک.م.م اعداد ۲ و ۳ برابر عدد ۶ می‌باشد). حال تعداد جملات کم‌تر از ۱۰۰ این دنباله را تعیین می‌کنیم:

$$a_1 = 8, d = 6; a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 8 + (n-1)6 \Rightarrow a_n = 6n + 2$$

$$6n + 2 < 100 \Rightarrow 6n < 98 \Rightarrow n < \frac{98}{6} = 16.3 \Rightarrow n = 1, 2, \dots, 16$$

این دنباله ۱۶ جمله دارد، بنابراین داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{16} = \frac{16}{2}(2 \times 8 + 15 \times 6) = 8(16 + 90) = 8 \times 106 = 848$$

۲ ۲۶

$$\begin{array}{cccc} \underbrace{a_1, \dots, a_4}_{\text{جمله اول}} & \underbrace{a_5, \dots, a_8}_{\text{جمله دوم}} & \underbrace{a_9, \dots, a_{12}}_{\text{جمله سوم}} & \underbrace{a_{13}, \dots, a_{16}}_{\text{جمله چهارم}} \end{array}$$

مجموع چهار جمله چهارم را منهای مجموع چهار جمله دوم می‌کنیم. با توجه به رابطه $a_m - a_n = (m-n)d$ داریم:

$$\begin{aligned} & a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} \\ & a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \end{aligned}$$

$$(a_{13} - a_5) + (a_{14} - a_6) + (a_{15} - a_7) + (a_{16} - a_8) = 8d + 8d + 8d + 8d = 32d$$

$$d = a_7 - a_1 = (5 + \sqrt{2}) - (3 + \sqrt{2}) = 2 \Rightarrow 32d = 64$$

آه، رابطه $a_m - a_n = (m-n)d$ ، رو یادت نیور، کافیه جمله عمومی هر کدوم رو بنویسی و از هم کم کنی. مثلاً: $a_{13} - a_5 = (13-5)d = 8d$

با توجه به رابطه $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$ داریم:

$$S_8 = S_{16} \Rightarrow \frac{8}{2}(2a + 7d) = \frac{16}{2}(2a + 15d) \Rightarrow 8a + 28d = 16a + 120d \Rightarrow 8a + 63d = 0$$

$$\Rightarrow 3(2a + 21d) = 0 \Rightarrow 2a + 21d = 0 \quad (*)$$

$$S_{22} = \frac{22}{2}(2a + 21d) \xrightarrow{(*)} S_{22} = 11 \times 0 = 0$$

تذکره: به طور کلی می‌توان گفت در هر دنباله حسابی، اگر $S_m = S_n$ ($m \neq n$) باشد، آن‌گاه S_{m+n} برابر صفر است. اثبات این موضوع را در تست‌های یک گام فراتر خواهید دید.

۴ ۲۸

دنباله $1, 4, 7, 10, \dots$ یک دنباله حسابی با قدرنسبت $d = 3$ می‌باشد، پس:

$$a_8 = a_1 + 7d = 1 + 21 = 22, a_{10} = a_1 + 9d = 1 + 27 = 28$$

بنابراین جملات $a_4, a_8, a_{12}, \dots, a_{100}$ به صورت $10, 22, \dots, 178$ درمی‌آیند که خود یک دنباله عددی با جمله اول ۱۰ و قدرنسبت ۱۲ را تشکیل می‌دهند.

$$178 = 10 + (n-1)(12) \Rightarrow 12(n-1) = 168 \Rightarrow 12n = 180 \Rightarrow n = 15$$

در نتیجه داریم:

$$S_{15} = \frac{15}{2}(2(10) + (15-1)(12)) = \frac{15}{2}(188) = 15 \times 94 = 1410$$

برای تعیین قدرنسبت دنباله جدید از نکته زیر نیز می‌توان استفاده کرد:

نکته: اگر در دنباله حسابی $\{a_n\}$ با قدرنسبت d ، جملات آن را با فاصله k از هم انتخاب کنیم، جملات حاصل، تشکیل یک دنباله حسابی جدید با قدرنسبت kd می‌دهند.

در این تست چون جملات چهارم، هشتم، دوازدهم و ... با فاصله ۴ تا از هم هستند، پس قدرنسبت برابر $4 \times 3 = 12$ است.

با توجه به مطالب درسنامه، a_n باید یک عبارت درجه اول بر حسب n و S_n یک عبارت درجه دوم بدون عدد ثابت باشد که فقط گزینه (۱) این شرایط را دارد. ۱ ۲۹

با توجه به مطالب درسنامه می‌دانیم جمله عمومی یک دنباله حسابی، عبارتی درجه اول بر حسب n است و ضریب n برابر قدرنسبت می‌باشد. ۳ ۳۰

پس برای این که a_n عبارت درجه دوم نباشد، باید ضریب n^2 را صفر بگیریم:

$$p - 2 = 0 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow a_n = 2n - 5 \Rightarrow d = 2, a_1 = -3$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}(2(-3) + 9(2)) = 5(-6 + 18) = 115$$

می‌دانیم زمانی $S_n = (2p-1)n^2 + qn^2 + pn + q + 1$ می‌تواند مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی باشد که جمله درجه سوم و جمله ۴ ۳۱

مستقل از n نداشته باشد. بنابراین:

$$2p - 1 = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{2}, q + 1 = 0 \Rightarrow q = -1 \Rightarrow S_n = -n^2 + \frac{n}{2}$$

$$2p - 1 = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{2}, q + 1 = 0 \Rightarrow q = -1 \Rightarrow S_n = -n^2 + \frac{n}{2}$$

$$\text{مجموع } 5 \text{ جمله دوم} = S_{10} - S_5 = (-100 + 5) - (-25 + \frac{5}{2}) = -72\frac{5}{2}$$

۲ ۳۲

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} + a_{11} = 70; \quad a_{60} + a_{59} + \dots + a_{51} + a_{50} = 51$$

ابتدا دو رابطه بالا را با هم جمع می‌کنیم:

$$(a_1 + a_{60}) + (a_2 + a_{59}) + \dots + (a_{10} + a_{51}) + (a_{11} + a_{50}) = 121 \quad (*)$$

طبق رابطه اندیس‌ها داریم:

$$a_1 + a_{60} = a_2 + a_{59} = \dots = a_{11} + a_{50} \stackrel{(*)}{\Rightarrow} 11(a_1 + a_{60}) = 121 \Rightarrow a_1 + a_{60} = 11$$

مجموع n جمله اول دنباله حسابی به فرم $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ می‌باشد، بنابراین:

$$S_{60} = \frac{60}{2}(a_1 + a_{60}) = 30 \times 11 = 330$$

فرض می‌کنیم دنباله، n جمله دارد. بنابراین با جمع سه جمله اول و سه جمله آخر داریم: ۲ ۳۳

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 15 \\ a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 69 \end{cases} \Rightarrow (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) = 84$$

با توجه به رابطه اندیس‌ها $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2}$ است، بنابراین:

$$3(a_1 + a_n) = 84 \Rightarrow a_1 + a_n = 28$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow 168 = \frac{n}{2}(28) \Rightarrow 168 = 14n \Rightarrow n = 12$$

در دسته اول، یک عدد فرد، در دسته دوم، دو عدد فرد، در دسته سوم، سه عدد فرد و به همین ترتیب در دسته بیستم، بیست عدد فرد وجود ۲ ۳۴

دارد. ابتدا تعداد کل جملات را از دسته اول تا دسته بیستم تعیین می‌کنیم:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 1 + 2 + \dots + 20 = \frac{20 \times 21}{2} = 210$$

بنابراین آخرین جمله دسته بیستم، ۲۱۰ امین جمله دنباله اعداد فرد می‌باشد:

$$1, 3, 5, 7, \dots$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \stackrel{a_1=1}{d=2} \rightarrow a_{210} = 1 + 209 \times 2 = 419$$

با توجه به فرض سوال، جمله آخر دسته n ام برابر n^2 است. پس آخرین عدد دسته نهم و دهم به ترتیب ۸۱ و ۱۰۰ هستند و در نتیجه دسته دهم ۳ ۳۵

به صورت (۱۰۰، ۸۳، ۸۲) خواهد بود، بنابراین دنباله دسته دهم، ۱۹ جمله دارد (زیرا $19 = 100 - 82 + 1$) که S_{19} را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{19} = \frac{19}{2}(82 + 100) = 1729$$

۵ جمله متوالی دنباله حسابی را به صورت $a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$ نمایش می‌دهیم، بنابراین: ۴ ۳۶

$$a - 2d + a - d + a + a + d + a + 2d = 5a = 5 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \text{جمله وسط} = 1$$

$$\text{مجموع مربعات } 5 \text{ جمله} = (1-2d)^2 + (1-d)^2 + 1^2 + (1+d)^2 + (1+2d)^2 = 45$$

$$\Rightarrow 1 + 4d^2 - 4d + 1 + d^2 - 2d + 1 + 1 + d^2 + 2d + 1 + 4d^2 + 4d = 45 \Rightarrow 5 + 10d^2 = 45 \Rightarrow d^2 = 4$$

جمله وسط برابر ۱ و $d^2 = 4$ است، بنابراین جمله وسط، $\frac{1}{4}$ مجذور قدرنسبت می‌باشد.

هریک از کسرها را گویا می‌کنیم. تفاضل جملات متوالی برابر قدرنسبت d است: ۴ ۳۷

$$\frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} + \dots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{a_n - a_{n-1}} = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1} + \sqrt{a_3} - \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{d}$$

$$= \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{d} = \frac{a_n - a_1}{d(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1})} = \frac{a_1 + (n-1)d - a_1}{d(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1})} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}} = \frac{n-1}{\sqrt{169} + \sqrt{4}} = \frac{n-1}{15}$$

$$a_n = a_{n+3} + 9 \Rightarrow a_1 + (n-1)d = a_1 + (n+2)d + 9 \Rightarrow 3d = -9 \Rightarrow d = -3$$

۱ ۳۸

$$a_r = 3a_r \Rightarrow a_1 + d = 3(a_1 + 2d) \xrightarrow{d=-3} a_1 - 3 = 3a_1 - 18 \Rightarrow a_1 = \frac{15}{2}$$

برای تعیین مجموع چهار جمله سوم، دو روش وجود دارد:

روش اول:

$$\text{مجموع ۴ جمله سوم} = a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} = a_1 + 8d + a_1 + 9d + a_1 + 10d + a_1 + 11d = 4a_1 + 38d = 30 - 114 = -84$$

روش دوم:

$$\text{مجموع ۴ جمله سوم} = S_{12} - S_8 = \frac{12}{2}(2a_1 + 11d) - \frac{8}{2}(2a_1 + 7d) = 6(15 - 33) - 4(15 - 21) = -84$$

۴ ۳۹ با فرض $a_1 = 5$ و $a_n = 53$ داریم:

$$\Delta, a_r, \dots, a_{n-1}, \Delta \Rightarrow a_{n-1} - a_r = 36 \Rightarrow a_1 + (n-2)d - (a_1 + d) = 36 \Rightarrow (n-3)d = 36 \quad (1)$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 53 = 5 + (n-1)d \Rightarrow (n-1)d = 48 \quad (2)$$

از تقسیم دو رابطه (۱) و (۲)، تعداد جملات و قدرنسبت را به دست می‌آوریم:

$$\frac{(n-3)d}{(n-1)d} = \frac{36}{48} \Rightarrow \frac{n-3}{n-1} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4n - 12 = 3n - 3 \Rightarrow n = 9 \xrightarrow{(n-3)d=36} d = 6$$

بنابراین واسطه‌های عددی به صورت ۱۱، ۱۷، ۰۰۰، ۴۷ می‌باشند که شامل ۷ جمله هستند. در نتیجه:

$$S_7 = \frac{7}{2}(11 + 47) = 7 \times 29 = 203$$

۳ ۴۰ در دنباله $a_n = 2n - 1$ جمله اول برابر ۱ و جمله دوم برابر ۳ است، پس قدرنسبت دنباله ۲ می‌شود. از طرفی می‌دانیم اگر هر جمله را از جمله

بعدی کم کنیم، قدرنسبت به دست می‌آید، بنابراین:

$$\begin{aligned} \frac{2}{a_1 a_2} + \frac{2}{a_2 a_3} + \frac{2}{a_3 a_4} + \dots + \frac{2}{a_{12} a_{13}} &= \frac{d}{a_1 a_2} + \frac{d}{a_2 a_3} + \frac{d}{a_3 a_4} + \dots + \frac{d}{a_{12} a_{13}} \\ &= \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} + \frac{a_3 - a_2}{a_2 a_3} + \frac{a_4 - a_3}{a_3 a_4} + \dots + \frac{a_{13} - a_{12}}{a_{12} a_{13}} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_{12}} - \frac{1}{a_{13}} \\ &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{13}} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2(13) - 1} = 1 - \frac{1}{25} = 1 - \frac{4}{100} = 0.96 \end{aligned}$$

۴ ۴۱ دو مرحله که شامل یک حرکت افقی و یک حرکت عمودی است $\frac{3}{25}$ دقیقه $(\frac{1}{5} + \frac{1}{75} = \frac{3}{25})$ طول می‌کشد. پس اگر n تعداد مرحله‌ها

باشد $n = \frac{65}{3/25} = 20$ می‌شود. یعنی کوهنورد بعد از ۲۰ مرحله حرکت افقی و عمودی به قله می‌رسد. حال اگر S_1 و S_2 به ترتیب مجموع فواصل افقی و عمودی باشد، با توجه به رابطه $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ داریم:

$$S_1 = \frac{20}{2}(2(5/9) + 19(-2/9)) = 10(10/9 - 38/9) = 10(-28/9) = -311.11$$

$$S_2 = \frac{20}{2}(2(43/8) + 19(-7/8)) = 10(87/8 - 133/8) = 10(-23) = -230$$

$$AB = \sqrt{S_1^2 + S_2^2} = \sqrt{(-311.11)^2 + (-230)^2} = \sqrt{96788.89 + 52900} = \sqrt{149688.89} = \sqrt{149688.89} = 386.9$$

۲ ۴۲ می‌دانیم $a_n = a_1 q^{n-1}$ است، پس با توجه به $a_6 - a_1 = 24$ داریم:

$$a_6 - a_1 = 24 \Rightarrow a_1 q^5 - a_1 = 24 \Rightarrow a_1 (q^5 - 1) = 24$$

از طرفی $S_5 = 12$ است، بنابراین:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{a_1(q^5-1)=24}{1-q} = 12 \Rightarrow \frac{-24}{1-q} = 12 \Rightarrow 1-q = -2 \Rightarrow q = 3$$

۲ ۴۳ می‌دانیم اگر a, b, c سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند، آنگاه $b^2 = ac$. پس ابتدا مقدار x را به دست می‌آوریم و به کمک آن q را تعیین می‌کنیم:

$$x^2 = 2\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow 2, 1, \frac{1}{2}, \dots \Rightarrow \text{دنباله نزولی} \\ x = -1 \Rightarrow 2, -1, \frac{1}{2}, \dots \Rightarrow \text{دنباله غیرنزولی} \Rightarrow q = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{2(1-(-\frac{1}{2})^6)}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2(1-\frac{1}{64})}{\frac{3}{2}} = \frac{2(\frac{63}{64})}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \times \frac{63}{64} = \frac{21}{16}$$

۴۴ طبق واسطه هندسی بین سه جمله متوالی دنباله هندسی داریم:

$$a^2 = 4 \times 9 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = \pm 6 \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \Rightarrow 4, 6, 9, \dots \Rightarrow \text{دنباله صعودی است.} \\ a = -6 \Rightarrow 4, -6, 9, \dots \Rightarrow \text{دنباله نه صعودی و نه نزولی است.} \end{cases}$$

پس $a = 6$ قابل قبول است و در نتیجه $q = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ می‌شود. بنابراین:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_6 = \frac{4(1-(\frac{3}{2})^6)}{1-\frac{3}{2}} = \frac{4(1-\frac{729}{64})}{-\frac{1}{2}} = -8(1-\frac{729}{64}) = -8(-\frac{665}{64}) = \frac{665}{8} = 83\frac{1}{8}$$

۴۵ با توجه به رابطه $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ ($q \neq 1$) داریم:

$$\begin{cases} S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 153 \\ S_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 136 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم دو رابطه}} \frac{\cancel{a_1}(1-q^6)}{\cancel{1-q}} = \frac{153}{136} \Rightarrow \frac{1-q^6}{1-q^3} = \frac{153}{136}$$

$$\xrightarrow{\text{مزدوج}} \frac{(1-q^3)(1+q^3)}{\cancel{1-q^3}} = \frac{153}{136} \Rightarrow 1+q^3 = \frac{153}{136} \Rightarrow q^3 = \frac{17}{136} = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_1}{a_5} = \frac{\cancel{a_1}}{\cancel{a_1}q^4} = \frac{1}{q^4} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^4} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16$$

حال نسبت $\frac{a_1}{a_5}$ را تعیین می‌کنیم:

یادت باشه در تست‌های این بخش، هر جا در معادله‌ای $(1-q)$ رو با هم ساده کردیم، با فرض $q \neq 1$ این کار رو انجام دادیم.

تذکره: با توجه به درسنامه بین مجموع n جمله اول و مجموع $2n$ جمله اول، رابطه $\frac{S_{2n}}{S_n} = q^n + 1$ ($q \neq \pm 1$) برقرار است، بنابراین در این تست از همان ابتدا می‌توانستیم بگوییم $1 + q^3 = \frac{S_6}{S_3}$ تا محاسبات ما بسیار کوتاه‌تر شود. در تست‌های بعد هم می‌توانید در صورت امکان این کار را انجام دهید.

۴۶ از معادله $S_{10} = (4\sqrt{2} + 1)S_5$ مقدار قدرنسبت را تعیین کرده و سپس حاصل $\frac{S_8}{S_6}$ را به دست می‌آوریم:

$$S_{10} = (4\sqrt{2} + 1)S_5 \Rightarrow \frac{\cancel{a_1}(1-q^{10})}{\cancel{1-q}} = (4\sqrt{2} + 1) \left(\frac{\cancel{a_1}(1-q^5)}{\cancel{1-q}} \right) \xrightarrow{\text{مزدوج}} (1-q^5)(1+q^5) = (4\sqrt{2} + 1)(1-q^5)$$

$$1+q^5 = 4\sqrt{2} + 1 \Rightarrow q^5 = 4\sqrt{2} = \sqrt{32} = \sqrt{2^5} = (\sqrt{2})^5 \Rightarrow q = \sqrt{2} \quad (*)$$

$$\frac{S_8}{S_6} = \frac{\cancel{a_1}(1-q^8)}{\cancel{1-q}} = \frac{1-q^8}{1-q^6} \xrightarrow{\text{مزدوج}} \frac{(1-q^4)(1+q^4)}{\cancel{1-q^4}} = 1+q^4 \stackrel{(*)}{=} 1+(\sqrt{2})^4 = 1+2^2 = 5$$

۴۷

$$\frac{a_1 a_2 a_3}{(a_4)^3} = \frac{a_1 \times a_1 q \times a_1 q^2}{(a_1 q^3)^3} = 64 \Rightarrow \frac{\cancel{a_1}^3 q^3}{\cancel{a_1}^3 q^9} = 64 \Rightarrow q^6 = \frac{1}{64} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{دنباله نزولی با جمله اول مثبت}} q = \frac{1}{4}$$

باز هم یادآور می‌شویم که اگر $q < 0$ باشد، دنباله نه صعودی و نه نزولی است. حال $\frac{S_6}{a_1}$ را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{S_6}{a_1} = \frac{\cancel{a_1}(1-q^6)}{\cancel{a_1}} = \frac{1-q^6}{1-q} = \frac{1-\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{63}{64}}{\frac{3}{4}} = \frac{63}{48} = \frac{21}{16}$$

۴۸ چون شش جمله درج می‌کنیم، پس دنباله حاصل ۸ جمله دارد که جمله اول ۲ و جمله هشتم برابر $16\sqrt{2}$ است:

$$a_8 = a_1 q^7 \Rightarrow 16\sqrt{2} = 2q^7 \Rightarrow 8\sqrt{2} = q^7 \Rightarrow 2^3 \times 2^{\frac{1}{2}} = q^7 \Rightarrow 2^{\frac{7}{2}} = q^7 \Rightarrow (2^{\frac{1}{2}})^7 = q^7 \Rightarrow (\sqrt{2})^7 = q^7 \Rightarrow q = \sqrt{2}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_8 = \frac{2(1-(\sqrt{2})^8)}{1-\sqrt{2}} = \frac{2(1-16)}{1-\sqrt{2}} = \frac{-30}{1-\sqrt{2}} = \frac{30}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = 30(\sqrt{2}+1)$$

۳ ۴۹

$$S_f = r \Rightarrow \frac{a_1(1-q^f)}{1-q} = r \Rightarrow \frac{a_1(1-q)(1+q)(1+q^2)}{1-q} = r \Rightarrow a_1(1+q)(1+q^2) = r$$

$$a_1 + a_3 = 1 \Rightarrow a_1 + a_1 q^2 = 1 \Rightarrow a_1(1+q^2) = 1$$

از تقسیم دو رابطه بالا داریم:

$$\frac{a_1(1+q)(1+q^2)}{a_1(1+q^2)} = r \Rightarrow 1+q = r \Rightarrow q = r \xrightarrow{a_1(1+q^2)=1} a_1 = \frac{1}{5} \Rightarrow S_f = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{\frac{1}{5}(1-6^6)}{-1} = \frac{1}{5}(6^6) = 12/6$$

روش اول: هر لایه، مقداری از مواد، مضر را جذب و مقداری را رد می‌کند. در این روش معلوم می‌کنیم که چند لایه قرار دهیم تا مجموع جذب

لایه‌ها بیشتر از ۹۷ درصد شود.

اولین لایه، نصف مواد مضر را جذب و نصف آن را رد می‌کند، دومین لایه از نیم باقی مانده، یعنی از مواد مضر یعنی $\frac{1}{4}$ آن را جذب می‌کند و به همین

ترتیب مقداری که هر لایه، مواد مضر را جذب می‌کند به صورت دنباله زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

این دنباله یک دنباله هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{2}$ می‌باشد. حال می‌خواهیم بدانیم چند جمله از جملات این دنباله جمع شود تا حاصل، حداقل ۹۷ درصد شود:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100} \Rightarrow \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} \geq \frac{97}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{3}{100} \Rightarrow 2^n \geq \frac{100}{3} \approx 33.3 \Rightarrow n \geq 6$$

توجه کنید که با آزمایش اعداد طبیعی در نامعادله $2^n \geq 33.3$ و این که $2^6 = 64$ ، در می‌یابیم که حداقل مقدار n برابر ۶ خواهد بود. پس تعداد لایه‌ها باید حداقل ۶ تا باشد.

روش دوم: وقتی می‌گوییم ۹۷ درصد مواد، جذب لایه‌های محافظتی شده، بدین معنی است که ۳ درصد مواد مضر از لایه‌ها رد شده‌اند. در این روش معلوم می‌کنیم

که چند لایه قرار دهیم تا کم‌تر از ۳ درصد مواد از لایه‌ها خارج شوند. اولین لایه شدت تابش را $\frac{1}{2}$ می‌کند، یعنی نصف مواد مضر از آن رد می‌شوند، لایه دوم از

نیم باقی مانده، یعنی از مواد مضر یعنی $\frac{1}{4}$ را رد می‌کند و به همین ترتیب در لایه n ام $\frac{1}{2^n}$ از مواد مضر از آن خارج می‌شود. بنابراین:

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{3}{100} \Rightarrow 2^n \geq \frac{100}{3} \Rightarrow n \geq 6$$

روش اول، روش کتاب درسیه، اما روش دوم، سریع‌تر و کوتاه‌تره. سعی کن مفهوم هر دو روش رو خوب یاد بگیری.

روش اول: مساحت مربع اولیه برابر ۱ است. در مرحله اول $\frac{1}{2}$ ، مرحله دوم $\frac{1}{4}$ ، مرحله سوم $\frac{1}{8}$ و به همین ترتیب، قسمتی از مربع که در هر مرحله رنگ

می‌شود، تشکیل یک دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = \frac{1}{2}$ و قدرنسبت $q = \frac{1}{2}$ می‌دهند:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

حال باید مجموع این مساحت‌های رنگ شده، بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{99}{100}$ باشد:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^n$$

$$S_n \geq \frac{99}{100} \Rightarrow 1 - (\frac{1}{2})^n \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n \geq 100 \Rightarrow n \geq 7$$

یعنی بعد از مرحله هفتم، حداقل ۹۹ درصد مربع رنگ شده است.

روش دوم: به جای این که بگوییم، مجموع مساحت‌های رنگ شده بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{99}{100}$ باشد، می‌گوییم باید مساحت قسمت رنگ نشده کم‌تر یا مساوی $\frac{1}{100}$

باشد. در مرحله اول $\frac{1}{2}$ ، مرحله دوم $\frac{1}{4}$ ، مرحله سوم $\frac{1}{8}$ و به همین ترتیب در مرحله n ام، $\frac{1}{2^n}$ از مساحت مربع رنگ نشده است. پس داریم:

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n \geq 100 \Rightarrow n \geq 7$$

می‌دانیم اگر جمله اول یک دنباله هندسی a_1 ، قدرنسبت آن q و تعداد جملات آن n باشد، آن‌گاه مجموع تمام جملات برابر است با:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

دنباله جملات ردیف فرد، یک دنباله هندسی است که جمله اول آن a_1 ، قدرنسبت آن q^2 و تعداد جملات آن $\frac{n}{2}$ می‌باشد. پس مجموع جملات ردیف فرد برابر است با:

$$S_{\frac{n}{2}} = \frac{a_1(1-(q^2)^{\frac{n}{2}})}{1-q^2} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q^2}$$

۳ ۵۲

در نتیجه داریم:

$$S_n = r S_{\frac{n}{r}} \Rightarrow \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = r \times \frac{a_1(1-q^n)}{1-q^r} \Rightarrow \frac{1}{1-q} = \frac{r}{1-q^r} \Rightarrow \frac{1}{1-q} = \frac{r}{(1-q)(1+q)} \Rightarrow \frac{r}{1+q} = 1 \Rightarrow q+1=r \Rightarrow q=2$$

جملات اول، دوم و ششم دنباله حسابی به صورت a ، $a+d$ و $a+\delta d$ هستند. چون این جملات، تشکیل دنباله هندسی می‌دهند، پس می‌توان نوشت:

$$a(a+\delta d) = (a+d)^2 \Rightarrow a^2 + \delta ad = a^2 + d^2 + 2ad \Rightarrow \delta ad = d^2 \xrightarrow{d \neq 0} d = \delta a$$

$$S_n = \frac{n}{r}(ra + (n-1)d) \Rightarrow S_1 = \frac{1}{r}(ra + rd) \xrightarrow{d=\delta a} S_1 = \delta(ra + r\delta a) = \delta(2ra) = 14\delta a$$

روش اول: جملات اول، پنجم و هفدهم دنباله حسابی به صورت a ، $a+4d$ و $a+16d$ هستند. چون این جملات، تشکیل دنباله هندسی

$$a(a+16d) = (a+4d)^2 \Rightarrow a^2 + 16ad = a^2 + 16d^2 + 8ad \Rightarrow 8ad = 16d^2 \xrightarrow{d \neq 0} a = 2d$$

می‌دهند پس می‌توان نوشت:

با جایگزینی $a = 2d$ جملات a ، $a+4d$ و $a+16d$ به صورت $2d$ ، $6d$ و $18d$ در می‌آیند. چون این اعداد، جملات متوالی دنباله هندسی‌اند،

پس $q = 3$ می‌شود. حال مجموع چهار جمله اول دنباله هندسی را به دست می‌آوریم:

$$S_4 = \frac{a(1-q^4)}{1-q} = \frac{a(1-3^4)}{1-3} = \frac{a(-80)}{-2} = 40a$$

یادآوری: اگر در یک دنباله حسابی غیر ثابت جملات m ام، n ام و p ام ($p > n > m$) به ترتیب جملات متوالی از یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه

$$\text{قدرنسبت دنباله هندسی از رابطه } q = \frac{p-n}{n-m} \text{ به دست می‌آید.}$$

روش دوم: با توجه به مطلب بالا $q = \frac{17-5}{5-1} = \frac{12}{4} = 3$ می‌باشد و در ادامه مانند راه حل اول $S_4 = 40a$ به دست می‌آید.

روش اول: عبارت $1+x+x^2+\dots+x^8$ ، مجموع ۹ جمله اول دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = 1$ و قدرنسبت $q = x$ و

عبارت $1-x+x^2-\dots+x^8$ ، مجموع ۹ جمله اول دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = 1$ و قدرنسبت $q = -x$ می‌باشد. بنابراین با توجه به رابطه $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$

$$A = \frac{1(1-x^9)}{1-x} \times \frac{1-(-x)^9}{1+x} = \frac{(1-x^9)(1+x^9)}{(1-x)(1+x)} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{1-x^{18}}{1-x^2}$$

$$\frac{x=\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2})^2} = \frac{1-(\sqrt{2})^{18}}{1-2} = \frac{1-512}{-1} = 511$$

روش دوم: از اتحادهایی که در درسنامه به آن‌ها اشاره شد استفاده می‌کنیم:

$$(x^n - y^n) = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1}) \Rightarrow x^9 - 1 = (x-1)(x^8 + x^7 + \dots + 1)$$

$$(x^n + y^n) = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots + y^{n-1}) \Rightarrow x^9 + 1 = (x+1)(x^8 - x^7 + \dots + 1)$$

$$\Rightarrow A = (1+x+x^2+\dots+x^8)(1-x+x^2-\dots+x^8) = \frac{x^9-1}{x-1} \times \frac{x^9+1}{x+1} = \frac{x^{18}-1}{x^2-1} \xrightarrow{\text{مانند روش اول}} 511$$

روش اول: عبارت $A = 1+t+t^2+\dots+t^{11}+t^{11}$ ، مجموع ۱۲ جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = 1$ و قدرنسبت $q = t$ می‌باشد. هم‌چنین

عبارت $B = 1+t^3+t^6+t^9$ مجموع ۴ جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = 1$ و قدرنسبت $q = t^3$ می‌باشد، بنابراین:

$$A = S_{12} = \frac{1(1-t^{12})}{1-t}$$

$$B = S_4 = \frac{1(1-t^{12})}{1-t^3} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{1-t^3}{1-t} = \frac{(1-t)(1+t+t^2)}{1-t} = 1+t+t^2 = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = 1 + \frac{2\sqrt{5}-2+6-2\sqrt{5}}{4} = 1 + 1 = 2$$

روش اول: می‌دانیم حاصل تقسیم دو جمله متوالی یک دنباله هندسی برابر قدرنسبت است:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[4]{3^5}}{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{27}$$

در نتیجه نسبت مجموع چهار جمله اول به مجموع چهار جمله دوم برابر است با:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{a_5+a_6+a_7+a_8} = \frac{a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3}{a_1q^4+a_1q^5+a_1q^6+a_1q^7} = \frac{a_1(1+q+q^2+q^3)}{q^4(a_1(1+q+q^2+q^3))} = \frac{1}{q^4} = \frac{1}{(\sqrt[4]{27})^4} = \frac{1}{27}$$

روش دوم: قدرنسبت مانند روش اول برابر $q = \sqrt[4]{27}$ است.

مجموع چهار جمله اول S_4 و مجموع چهار جمله دوم $S_8 - S_4$ می‌باشد. حال می‌خواهیم $\frac{S_4}{S_8 - S_4}$ را تعیین کنیم. برای راحتی کار ابتدا $\frac{S_8 - S_4}{S_4}$ را به دست آورده و جواب حاصل را معکوس می‌کنیم:

$$\frac{S_8 - S_4}{S_4} = \frac{S_8}{S_4} - 1 = \frac{a(1-q^8)}{a(1-q^4)} - 1 = \frac{1-q^8}{1-q^4} - 1 = \frac{(1-q^4)(1+q^4)}{1-q^4} - 1 = 1+q^4 - 1 = q^4 = (\sqrt[4]{27})^4 = 27 \Rightarrow \frac{S_4}{S_8 - S_4} = \frac{1}{27}$$

۴ ۵۸ می‌دانیم اگر a, b و c دنباله‌ای هندسی تشکیل دهند، آن‌گاه $b^2 = ac$ است، بنابراین:

$$(2x)^2 = (x^2 - 2)(x^2 + 4) \Rightarrow 4x^2 = x^4 + 2x^2 - 8 \Rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow (x^2)^2 - 2(x^2) - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2 \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

از جواب $x = -2$ دنباله هندسی $8, -4, 2, \dots$ به دست می‌آید که نزولی نیست، اما از جواب $x = 2$ دنباله هندسی نزولی $8, 4, 2, \dots$ به دست می‌آید که قدرنسبت آن برابر $q = \frac{1}{2}$ و $a_1 = 8$ است. در نتیجه داریم:

$$S_7 = \frac{8(1 - (\frac{1}{2})^7)}{1 - \frac{1}{2}} = 16(1 - (\frac{1}{2})^7) = 16 - 16 \times \frac{1}{2^7} = 16 - \frac{2^4}{2^7} = 16 - \frac{1}{8} = \frac{127}{8}$$

اگره نوع حل معادله $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ رو فوب نفهمیدی، در بخش بعدی این نوع معادلات رو توضیح می‌دیم.

۳ ۵۹ تعداد گندم‌های موجود در هر خانه تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند که جمله اول آن ۱، قدرنسبت آن ۲ و تعداد جمله‌ها ۶۴ می‌باشد. تعداد کل گندم‌ها حاصل جمع جملات این دنباله است:

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{1(1-2^{64})}{1-2} = 2^{64} - 1 = (2^4)^{16} - 1 = 16^{16} - 1$$

حال $16^{16} - 1$ گرم را با ۱۰۰۰ میلیارد تن مقایسه می‌کنیم. (با صرف نظر کردن از یک گرم عدد $16^{16} - 1$ به صورت ساده‌تر 2^{64} می‌نویسیم) می‌دانیم هزار میلیارد برابر 10^{12} و هر یک تن برابر 10^6 گرم است، پس هزار میلیارد تن برابر 10^{18} گرم می‌باشد. از طرفی $(10^3)^6 = (10^3)^6 \times 2^4 = (2^{10})^6 = 2^{60}$ است. بنابراین داریم:

$$2^{64} > 10^{18} \Rightarrow (2^{10})^6 > (10^3)^6 \Rightarrow 2^4 (2^{10})^6 > (10^3)^6 \Rightarrow 2^{64} > 10^{18}$$

پس وزن کل گندم‌ها از ۱۰۰۰ میلیارد تن بیشتر است. (البته با مقایسه بالا حتی می‌توان گفت از ۱۶۰۰۰ میلیارد تن هم بیشتر است.)

این مسئله به نام مسئله شطرنج معروفه که اپوریان بیرونی، ریاضی‌دان برجسته ایرانی به روش فاص فودش اون رو حل کرده. عدد حاصل، این قدر زیاده که اگر کل مساحت کره زمین رو هم گندم بکاریم باز پاسخ‌گوی این میزان گندم نیست.

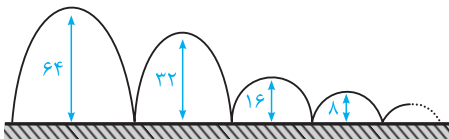
۴ ۶۰ جملات دنباله به صورت $1, 2, 4, 8, \dots$ است که باید $S_n \geq 64(1000)$ باشد. (هر کیلوگرم برابر ۱۰۰۰ گرم است). در نتیجه داریم:

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{1-2^n}{1-2} \geq 64(1000) \Rightarrow 2^n - 1 \geq 64(1000) \Rightarrow 2^n \geq 64(1000) + 1$$

برای حل ساده‌تر نامعادله بالا ابتدا از عدد ۱ صرف نظر می‌کنیم:

$$2^n \geq 64(1000) \Rightarrow 2^n \geq 2^6(1000) \Rightarrow \frac{2^n}{2^6} \geq 1000 \Rightarrow 2^{n-6} \geq 1000$$

می‌دانیم $2^{10} = 1024$ و $2^9 = 512$ می‌باشد، بنابراین نامعادله بالا زمانی برقرار است که $n - 6 \geq 10$ و در نتیجه $n \geq 16$ باشد.



۳ ۶۱ وقتی توپ را پرتاب می‌کنیم، ۶۴ متر بالا می‌رود و بعد ۶۴ متر پایین می‌آید، یعنی از لحظه پرتاب تا برخورد اول $2 \times 64 = 128$ متر مسافت طی می‌کند، سپس ۳۲ متر بالا و ۳۲ متر پایین می‌آید، یعنی در مرحله دوم ۶۴ متر طی می‌کند. بنابراین دنباله مسافت‌های طی شده (برحسب متر) در هر مرحله به صورت مقابل است:

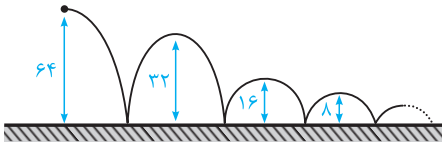
$128, 64, 32, \dots$

این دنباله، یک دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = 128$ و قدرنسبت $q = \frac{1}{2}$ است.

برای این‌که کل مسافت پیموده شده در لحظه‌ای که توپ برای بار دهم به زمین برخورد می‌کند را حساب کنیم، کافی است S_{10} را به دست آوریم:

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10} = \frac{128(1 - (\frac{1}{2})^{10})}{1 - \frac{1}{2}} = 256(1 - \frac{1}{2^{10}}) = 256(\frac{2^{10} - 1}{2^{10}}) = 256 \times (\frac{1024 - 1}{1024}) = \frac{1023}{4} = 255.75 \text{ متر}$$

سؤال ۱؟ در شرایط این تست اگر توپ را از ارتفاع ۶۴ متری رها کنیم چه مسافتی را طی خواهد کرد؟



در این حالت توپ فقط در مرتبه اول برخورد به زمین، یک مسافت از بالا به پایین را طی می‌کند. اما در مراتب بعدی یک مسافت پایین به بالا و یک مسافت بالا به پایین را طی می‌کند. یعنی در اولین برخورد ۶۴ متر، دومین برخورد ۶۴ = ۳۲ × ۲ متر و سومین برخورد ۳۲ = ۱۶ × ۲ متر را می‌پیماید که به همین ترتیب ادامه پیدا می‌کند. یعنی کل مسافت حاصل $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 64 + 64 + 32 + 16 + \dots$ می‌باشد که ۶۴ متر کم‌تر از حاصل این تست می‌باشد، بنابراین: $191/75 - 64 = 255/75$.

۶۲ ۴ اگر موجودی اولیه را m در نظر بگیریم، بعد از یک سال، سود آن برابر $m = \frac{2}{10}m$ است. پس در پایان سال اول، موجودی برابر $a_1 = m + \frac{2}{10}m = m(1 + \frac{2}{10})$ می‌شود، در نتیجه در پایان سال دوم، موجودی برابر است با:

$$a_2 = a_1 + \frac{2}{10}a_1 = a_1(1 + \frac{2}{10}) = m(1 + \frac{2}{10})(1 + \frac{2}{10}) = m(1 + \frac{2}{10})^2$$

به همین ترتیب مقدار موجودی در هر سال، جملات یک دنباله هندسی با قدرنسبت $1 + \frac{2}{10} = \frac{12}{10}$ می‌باشد. بنابراین مقدار موجودی بعد از n سال به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a_n = m(1 + \frac{2}{10})^n \Rightarrow a_5 = 200000(1 + \frac{2}{10})^5 = 2 \times 10^6 (\frac{12}{10})^5 = 2 \times 10^6 \times \frac{12^5}{10^5} = 20(250000) = 5000000$$

۶۳ ۱ محیط دایره به قطر d برابر است با $P = \pi d$ ، پس محیط نیم‌دایره $\frac{\pi d}{2}$ می‌باشد.

در این سؤال هر بار که موج به محور برخورد می‌کند، ۲۰ درصد از طول قطر آن کم می‌شود، یعنی ۸۰ درصد از طول قطر آن باقی می‌ماند، بنابراین داریم:

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}(\frac{8}{10}), \frac{\pi}{2}(\frac{8}{10})^2, \dots \quad \text{دنباله محیط نیم‌دایره‌ها} \quad , \dots, (\frac{8}{10})^2, (\frac{8}{10}), \frac{1}{2} \quad \text{دنباله طول قطرها}$$

ملاحظه می‌شود که محیط نیم‌دایره‌ها تشکیل یک دنباله هندسی با جمله اول $\frac{\pi}{2}$ و قدرنسبت $\frac{8}{10}$ می‌دهند، در نتیجه:

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} \Rightarrow S_5 = \frac{\frac{\pi}{2}(1 - (\frac{4}{5})^5)}{1 - \frac{4}{5}} \Rightarrow S_5 = \frac{5\pi}{2}(1 - (\frac{4}{5})^5)$$

۶۴ ۱ کافی است هر یک از کسرها را به صورت زیر تفکیک کنیم:

$$\frac{1}{2 \times 5} = \frac{1}{3}(\frac{5-2}{2 \times 5}) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) ; \frac{1}{5 \times 8} = \frac{1}{3}(\frac{8-5}{5 \times 8}) = \frac{1}{3}(\frac{1}{5} - \frac{1}{8})$$

به همین ترتیب همه کسرها را تفکیک کرده و از $\frac{1}{3}$ فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{5 \times 8} + \dots + \frac{1}{17 \times 20} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{17} + \frac{1}{17} - \frac{1}{20}) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - \frac{1}{20}) = \frac{3}{20} = \frac{15}{100} = 0.15$$

معمولاً بررسی این نوع سؤال‌ها در کتاب *نظام قدیم بخش سری مطرح می‌شود* و همیشه گفت به دنباله مسابی فیلی ربط ندارد! پس آه راهل این تست به زهدت نرسید نگران نباش.

۶۵ ۴ ابتدا از x^3 فاکتور می‌گیریم و بعد از اتحاد چاق و لاغر $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ استفاده می‌کنیم:

$$x^9 + x^3y^3 = x^3(x^6 + y^3) = x^3((x^2)^3 + y^3) = x^3(x^2 + y)(x^4 - x^2y + y^2)$$

۶۶ ۱ می‌دانیم اگر n فرد باشد $x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})$ ، یعنی $x^n + y^n$ بر $x + y$ بخش پذیر است، بنابراین عبارت

$$x^3 + x^2 + 1 + x^3 - x^2 + 3 = 2(x^3 + 2) + (x^3 + x^2 + 1) + (x^3 - x^2 + 3)^2$$

۶۷ ۱ با استفاده از اتحاد $x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})$ (n طبیعی و فرد) عبارت $x^5 + 1$ را تجزیه می‌کنیم:

$$A = \frac{(x+1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} + x^5 + x^3 + x = x^5 + x^3 + x^2 + 1$$

$$\frac{x = \sqrt{3}}{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^5 + (\sqrt{3})^4 + (\sqrt{3})^2 + 1 = 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = 40$$