

فصل	درس‌نامه	سؤال
<b>فصل ۱ : تابع</b>		
درس (۱) مفهوم تابع	۷	۱۶
درس (۲) تبدیل نمودار توابع	۲۲	۳۰
درس (۳) تابع درجه‌سوم و توابع صعودی و نزولی	۳۵	۴۰
درس (۴) تابع یک‌به‌یک و وارون	۴۳	۵۰
درس (۵) اعمال جبری و ترکیب توابع	۵۵	۶۰
درس (۶) بخش‌پذیری و تقسیم	۶۷	۷۱
<b>فصل ۲ : مثلثات</b>		
درس (۱) زاویه و نسبت‌های مثلثاتی	۷۹	۸۵
درس (۲) دایرهٔ مثلثاتی	۸۸	۹۳
درس (۳) اتحادهای مثلثاتی	۹۶	۱۰۳
درس (۴) توابع مثلثاتی	۱۰۹	۱۱۱
درس (۵) تناوب و تابع تانژانت	۱۱۳	۱۲۰
درس (۶) معادلات مثلثاتی	۱۲۵	۱۳۲
<b>فصل ۳ : حد و پیوستگی</b>		
درس (۱) همسایگی و مفهوم حد	۱۴۰	۱۴۶
درس (۲) محاسبهٔ حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$ )	۱۵۱	۱۵۶
درس (۳) پیوستگی	۱۶۱	۱۶۶
درس (۴) حد بی‌نهایت	۱۷۰	۱۷۸
درس (۵) حد در بی‌نهایت	۱۸۲	۱۸۷
<b>فصل ۴ : مشتق</b>		
درس (۱) آشنایی با مفهوم مشتق	۱۹۶	۲۰۰
درس (۲) مشتق‌پذیری و پیوستگی ۱	۲۰۳	۲۱۳
درس (۳) مشتق‌پذیری و پیوستگی ۲	۲۲۲	۲۳۲
درس (۴) آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای	۲۴۰	۲۴۲
<b>فصل ۵ : کاربرد مشتق</b>		
درس (۱) اکسترم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی ۱	۲۴۸	۲۵۳
درس (۲) اکسترم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی ۲	۲۵۷	۲۶۶
درس (۳) جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطهٔ عطف آن	۲۷۱	۲۸۳
درس (۴) رسم نمودار توابع	۲۸۹	۲۹۸

## سؤال

## درس نامه

## فصل

## فصل ۶: الگو و دنباله

۳۱۳	۳۰۸	درس (۱) الگو و دنباله
۳۲۰	۳۱۶	درس (۲) دنباله حسابی
۳۳۰	۳۲۴	درس (۳) دنباله هندسی

## فصل ۷: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

۳۴۴	۳۳۵	درس (۱) ریشه‌گیری و توان‌های گویا
۳۵۱	۳۴۷	درس (۲) عبارت‌های جبری، اتحادها و تجزیه
۳۵۵	۳۵۴	درس (۳) گویا کردن مخرج کسرها

## فصل ۸: معادله و تابع درجه دوم

۳۶۷	۳۵۹	درس (۱) معادله درجه دو
۳۷۷	۳۷۱	درس (۲) تابع درجه دوم

## فصل ۹: معادله و نامعادله

۳۸۴	۳۸۲	درس (۱) معادلات گویا
۳۹۱	۳۸۶	درس (۲) تعیین علامت و نامعادله گویا
۳۹۶	۳۹۲	درس (۳) معادلات گنگ (رادیکالی)

## فصل ۱۰: قدرمطلق و جزء صحیح

۴۰۶	۳۹۹	درس (۱) قدرمطلق
۴۱۵	۴۱۰	درس (۲) جزء صحیح

## فصل ۱۱: توابع نمایی و لگاریتمی

۴۲۳	۴۱۹	درس (۱) تابع نمایی
۴۳۳	۴۲۶	درس (۲) تابع لگاریتمی

## فصل ۱۲: هندسه تحلیلی

۴۵۰	۴۴۱	درس (۱) معادله خط
-----	-----	-------------------

۴۵۵

پاسخ‌نامه کلیدی

# تبدیل نمودار توابع

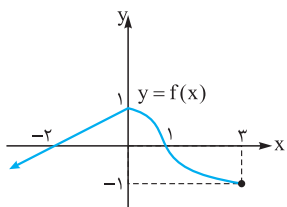


گاهی وقت‌ها در حل مسائل مربوط به معادلات، نامعادلات و ... نیازمند عملیات جبری سنگین هستید، در صورتی که رسم شکل، دید بهتری از مسئله در اختیاران قرار می‌دهد و در اغلب موارد منجر به حل مسئله می‌شود. با این حال خیلی‌ها از رسم فراری هستند، چون برای رسم بسیاری از توابع دنبال روش‌های سخت و پیچیده می‌گردند (ولی اشتباه می‌کنن دیگه!). در این قسمت تکنیک‌هایی را یاد می‌گیریم که رسم بسیاری از توابع براتون گلابی بشه! این تکنیک‌ها «انتقال‌های عمودی و افقی»، «انبساط و انقباض‌های عمودی و افقی» و «قرینه‌یابی» نام دارند. پس شروع کنیم ...

## تکنیک‌های رسم توابع

فرض می‌کنیم نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت مقابل باشد:

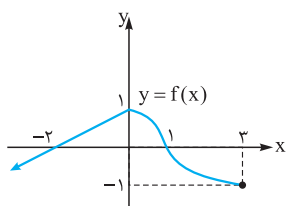
با این نمودار تمام تکنیک‌ها را بررسی می‌کنیم:



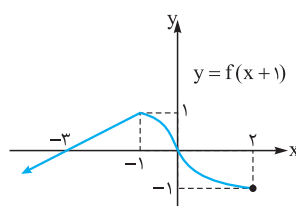
### انتقال‌های افقی و عمودی

#### ۱ رسم نمودار $y = f(x+a)$ و $y = f(x-a)$ ( $a > 0$ )

برای رسم نمودار  $y = f(x+a)$ ، باید نمودار  $f$  را  $a$  واحد به سمت چپ و برای رسم نمودار  $y = f(x-a)$ ، باید نمودار  $f$  را به اندازه  $a$  واحد به سمت راست منتقل کنیم (انتقال افقی). برای مثال نمودار  $y = f(x+1)$  به صورت زیر است:



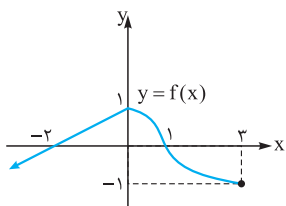
$(x \rightarrow x+1)$   
نمودار  $f$  یک واحد به چپ می‌رود.



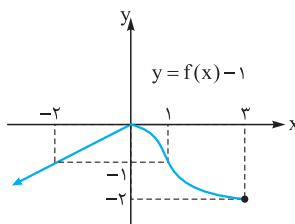
انتقال‌های افقی بر دامنه تابع تأثیر می‌گذارند، اما روی برد تابع بی‌تأثیرند.

#### ۲ رسم نمودار $y = f(x)+a$ و $y = f(x)-a$ ( $a > 0$ )

برای رسم نمودار  $y = f(x)+a$ ، نمودار  $f$  را به اندازه  $a$  واحد به سمت بالا و برای رسم نمودار  $y = f(x)-a$ ، نمودار  $f$  را به اندازه  $a$  واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم (انتقال عمودی). برای مثال نمودار  $y = f(x)-1$  به صورت زیر است:



$(f(x) \rightarrow f(x)-1)$   
نمودار  $f$  یک واحد به پایین می‌رود.



انتقال‌های عمودی روی دامنه بی‌تأثیرند، اما روی برد تابع تأثیر می‌گذارند.

### انبساط و انقباض افقی

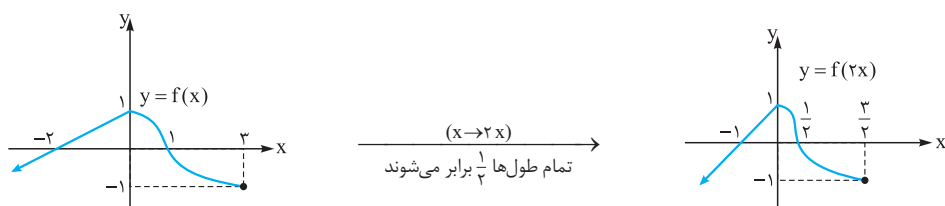
#### ۳ رسم نمودار $y = f(ax)$ ( $a > 0$ )

• اگر  $0 < a < 1$ ، نمودار تابع  $f$  باید در راستای محور افقی و با ضریب  $\frac{1}{a}$  منبسط گردد (انبساط افقی).

• اگر  $a > 1$ ، نمودار تابع  $f$  باید در راستای محور افقی و با ضریب  $\frac{1}{a}$  منقبض گردد (انقباض افقی).

برای مثال نمودار  $y = f(2x)$  به صورت زیر است:

انقباض و انقباض‌های افقی فقط روی دامنه تأثیر گذارند.

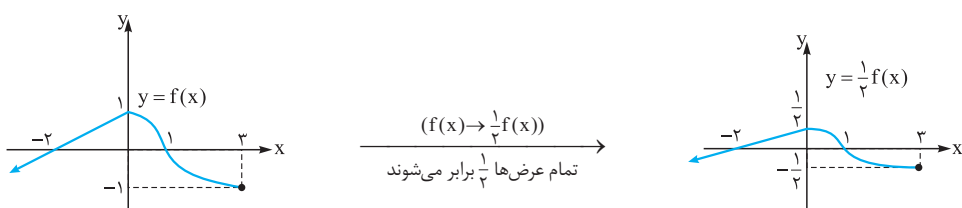


#### ۴ رسم نمودار $y = af(x)$ ( $a > 0$ )

• اگر  $0 < a < 1$ ، نمودار تابع  $f$  در راستای محور عمودی با ضریب  $a$  فشرده می‌شود (انقباض عمودی).

• اگر  $a > 1$ ، نمودار تابع  $f$  در راستای محور عمودی با ضریب  $a$  کشیده می‌شود (انبساط عمودی).

برای مثال نمودار تابع  $y = \frac{1}{3}f(x)$  به صورت زیر است:



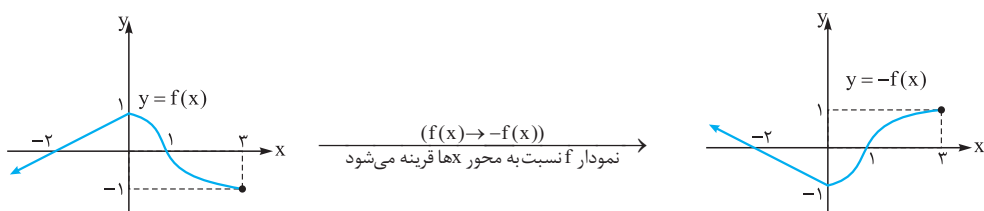
انقباض و انقباض‌های عمودی روی برد تابع تأثیر می‌گذارند. ولی زور شون به تغییر دامنه نمی‌رسه!

#### قرینه‌یابی

#### ۵ رسم نمودار $y = -f(x)$

برای رسم نمودار  $y = -f(x)$ ، باید نمودار  $f$  را نسبت به محور  $x$  قرینه کنیم.

برای مثال نمودار تابع  $y = -f(x)$  به صورت زیر است:

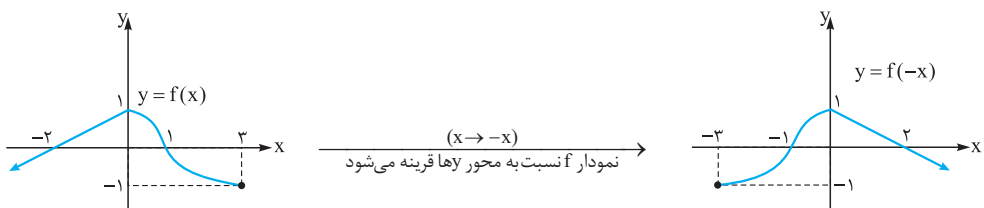


در قرینه نسبت به محور  $x$ ، فقط برد تابع تغییر می‌کند و قرینه می‌شود.

#### ۶ رسم نمودار $y = f(-x)$

برای رسم نمودار  $y = f(-x)$ ، باید نمودار  $f$  را نسبت به محور  $y$  قرینه می‌کنیم.

برای مثال نمودار  $y = f(-x)$  به صورت زیر است:



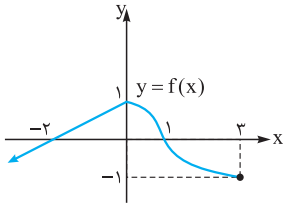
در قرینه نسبت به محور  $y$ ، فقط دامنه تابع تغییر می‌کند و قرینه می‌شود.



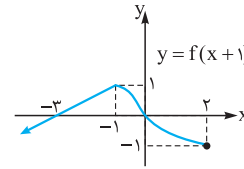
۷ رسم نمودار  $y = f(ax + b)$

برای رسم، ابتدا انتقال عدد ثابت  $b$  را انجام می‌دهیم، سپس تغییرات مربوط به ضریب  $X$  (که همان انبساط یا انقباض افقی هستند و یا قرینه‌یابی نسبت به محور  $Y$ ها) را روی شکل اعمال می‌کنیم.

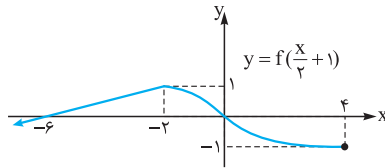
برای مثال نمودار تابع  $y = f(1 - \frac{X}{3})$  به صورت زیر رسم می‌شود:



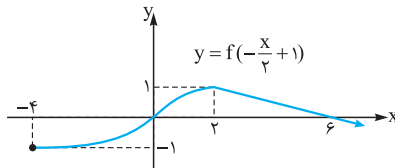
$(x \rightarrow x+1)$   
نمودار  $f$  یک واحد به چپ می‌رود.



$(x \rightarrow \frac{x}{3})$   
تمام طول‌ها دو برابر می‌شوند



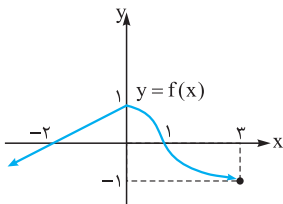
$(x \rightarrow -x)$   
قرینه نسبت به محور  $Y$ ها



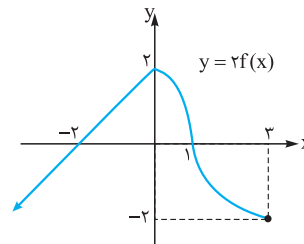
۸ رسم نمودار  $y = af(x) + b$

برای رسم، ابتدا ضریب  $a$  را تأثیر می‌دهیم، (که همان انبساط یا انقباض عمودی هستند و یا قرینه‌یابی نسبت به محور  $X$ ها) بعد انتقال عدد ثابت  $b$  را انجام می‌دهیم.

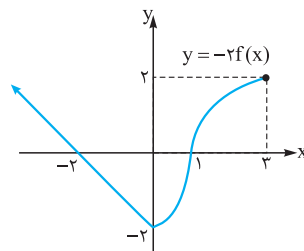
برای مثال نمودار  $y = 1 - 2f(x)$  به صورت زیر رسم می‌شود:



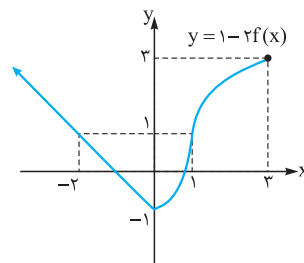
$(f \rightarrow 2f)$   
تمام عرض‌ها دو برابر شوند.



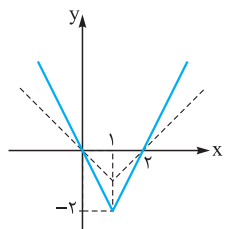
$(f \rightarrow -f)$   
قرینه نسبت به محور  $X$ ها



نمودار یک واحد به بالا برود

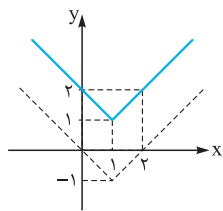


در حالتی که هم تغییرات روی  $X$  داریم و هم روی  $Y$ ، بهتر است ابتدا تغییرات روی  $X$  را اعمال کنید و سپس به سراغ تغییرات  $Y$  بروید.



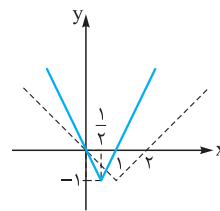
$$y = 2f(x)$$

تمام عرض‌ها دو برابر می‌شوند.



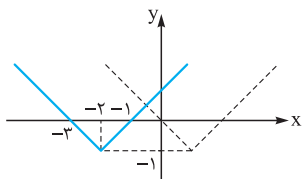
$$y = f(x) + 2$$

دو واحد به سمت بالا می‌رود.



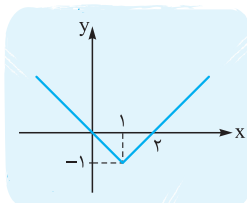
$$y = f(2x)$$

تمام طول‌ها نصف می‌شوند. (انقباض افقی)

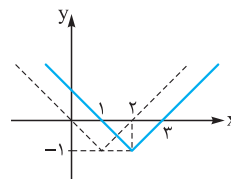


$$y = f(x+2)$$

سه واحد به سمت چپ می‌رود.

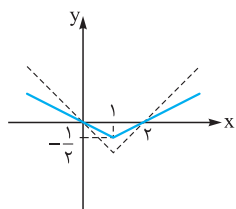


$$y = f(x)$$



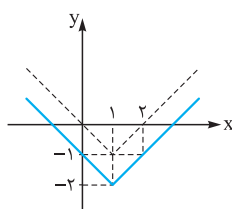
$$y = f(x-1)$$

یک واحد به سمت راست می‌رود.



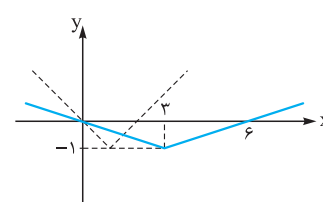
$$y = \frac{1}{2}f(x)$$

تمام عرض‌ها نصف می‌شوند (انقباض عمودی)



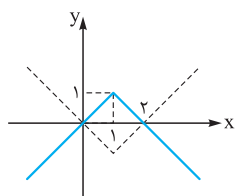
$$y = f(x) - 1$$

یک واحد به سمت پایین می‌رود.



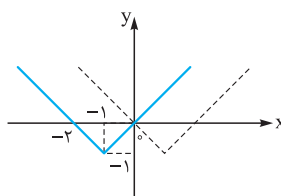
$$y = f\left(\frac{x}{3}\right)$$

تمام طول‌ها سه برابر می‌شوند. (انبساط افقی)



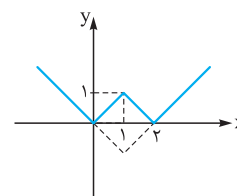
$$y = -f(x)$$

نسبت به محور Xها قرینه می‌شود.



$$y = f(-x)$$

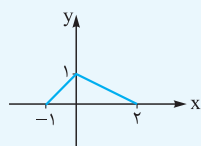
نسبت به محور Yها قرینه می‌شوند.



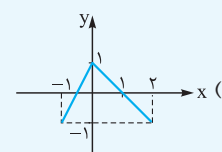
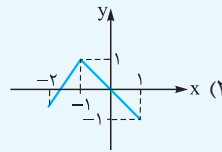
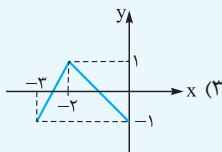
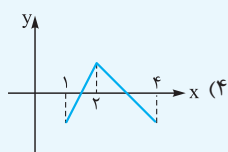
$$y = |f(x)|$$

قسمت‌های زیر محور Xها نسبت به محور Xها قرینه می‌شوند.

فصل اول تابع



**تست** اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت مقابل باشد، نمودار تابع  $y = 2f(x+2) - 1$  کدام است؟



**پاسخ گزینه ۳:** برای رسم، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

جدول زیر در تعیین ضابطه تابع انتقال یافته فیلی به کارتون میاد!

تغییرات ضابطه	انتقال	تغییرات ضابطه	انتقال
$f(x) \rightarrow f(x) + b$	نمودار $b$ واحد به بالا برود.	$x \rightarrow x - a$	نمودار $a$ واحد به راست برود.
$f(x) \rightarrow f(x) - b$	نمودار $b$ واحد به پایین برود.	$x \rightarrow x + a$	نمودار $a$ واحد به چپ برود.
$f(x) \rightarrow af(x)$	تمام عرض‌ها $a$ برابر شوند.	$x \rightarrow \frac{x}{a}$	تمام طول‌ها $a$ برابر شوند.
$f(x) \rightarrow -f(x)$	نمودار نسبت به محور $x$ ها قرینه شود.	$x \rightarrow -x$	نمودار نسبت به محور $y$ ها قرینه شود.

**تست** تابع  $y = x^2 - 2x - 3$  را در نظر بگیرید. ابتدا نمودار آن را یک واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم. بعد آن را نسبت به محور  $x$ ها قرینه می‌کنیم و در آخر، آن را  $2$  واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. ضابطه تابع جدید کدام است؟

(۱)  $y = -x^2 + 6x - 6$  (۲)  $y = -x^2 + 2x + 6$  (۳)  $y = -x^2 - 6x - 6$  (۴)  $y = -x^2 + 2x - 6$

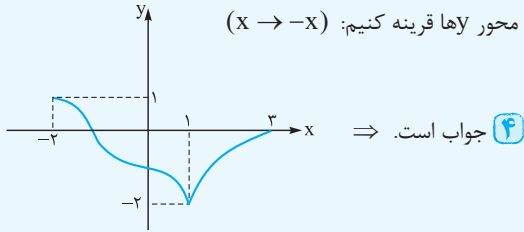
**پاسخ گزینه ۱:** تغییرات را مرحله به مرحله روی تابع  $y = x^2 - 2x - 3$  انجام می‌دهیم:

قرینه نسبت به محور  $x$ ها  $\rightarrow y = -x^2 + 2x + 3$  ضابطه تابع قرینه می‌شود.  
 به ضابطه تابع، یک واحد اضافه می‌کنیم.  $\rightarrow y = -x^2 + 2x + 4$   
 $2$  واحد به راست  $\rightarrow y = -(x-2)^2 + 2(x-2) + 4$  جای  $x$ ها،  $x-2$  قرار دهیم.  
 $y = -(x-2)^2 + 2(x-2) + 4 \Rightarrow y = -x^2 + 4x - 4 + 2x - 4 + 4 \Rightarrow y = -x^2 + 6x - 6$

**تست** اگر نمودار تابع  $y = -f(x-2)$  به صورت مقابل باشد، نمودار تابع  $y = f(-x)$  کدام است؟

**پاسخ گزینه ۴:** راه اول در اینجا باید بر عکس عمل کنیم ابتدا با استفاده از انتقال و قرینه‌یابی از نمودار  $y = -f(x-2)$  به نمودار  $f$  می‌رسیم:

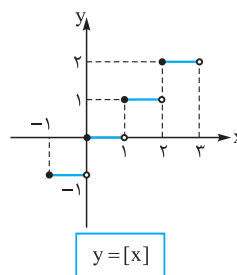
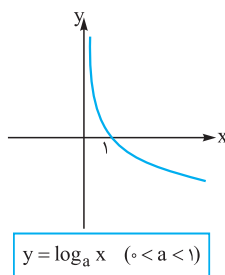
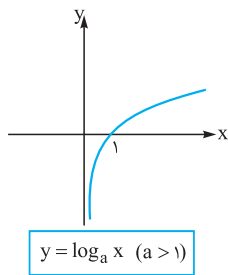
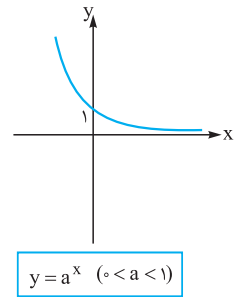
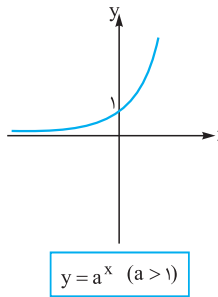
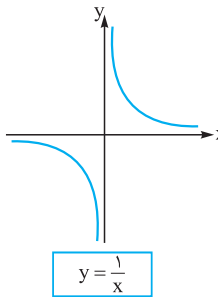
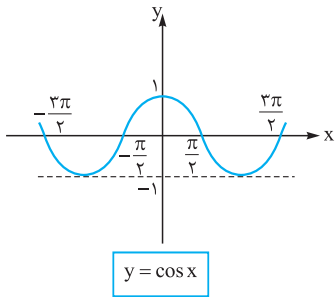
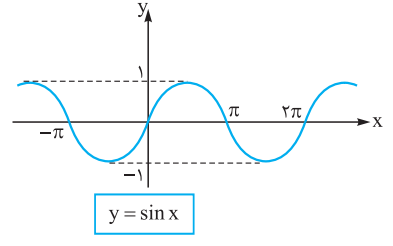
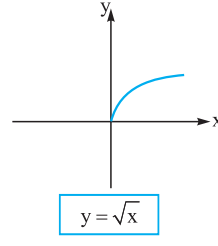
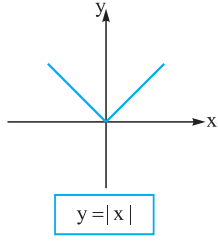
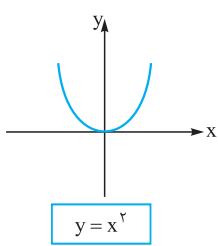
حالا برای رسم نمودار  $y = f(-x)$ ، کافی است نمودار تابع  $y = f(x)$  را نسبت به محور  $y$ ها قرینه کنیم:  $(x \rightarrow -x)$



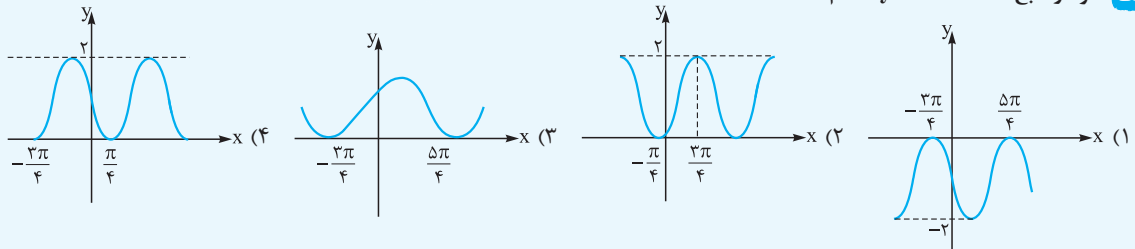
**راه دوم**  $y = -f(x-2)$  (نمودار داده شده) به ازای  $x = -1$  مقدار صفر می دهد. یعنی:

بنابراین تابع اصلی در نقطه  $x = -3$  مقدار صفر را می دهد. پس باید تابع  $y = f(-x)$  در نقطه  $x = 3$  مقدار صفر بدهد در نتیجه **۴** جواب است.

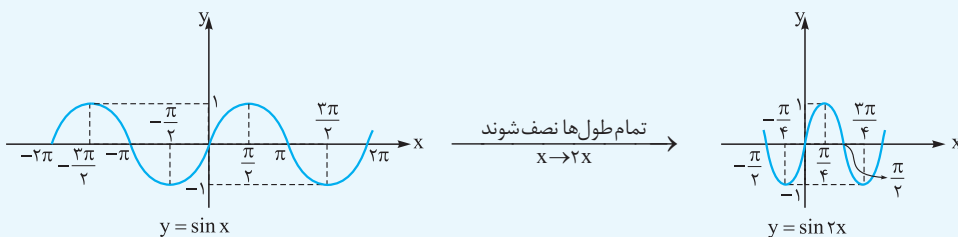
حالا وقتشه که نمودارهای اورپیثالی! که در رسم احتیاج داریم را با هم مرور کنیم. این نمودارها را در زیر می بینید:



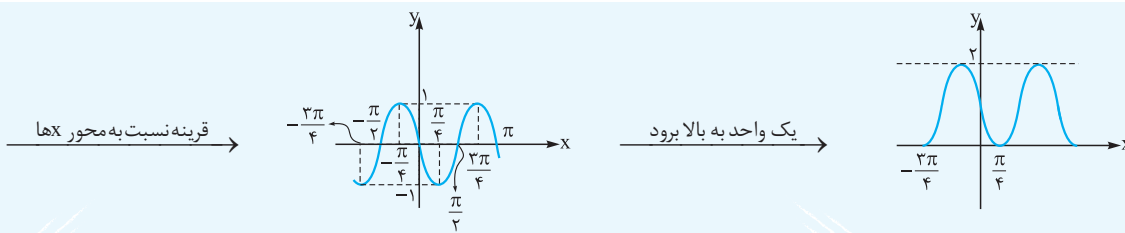
**تست** نمودار تابع  $y = 1 - \sin 2x$  کدام است؟



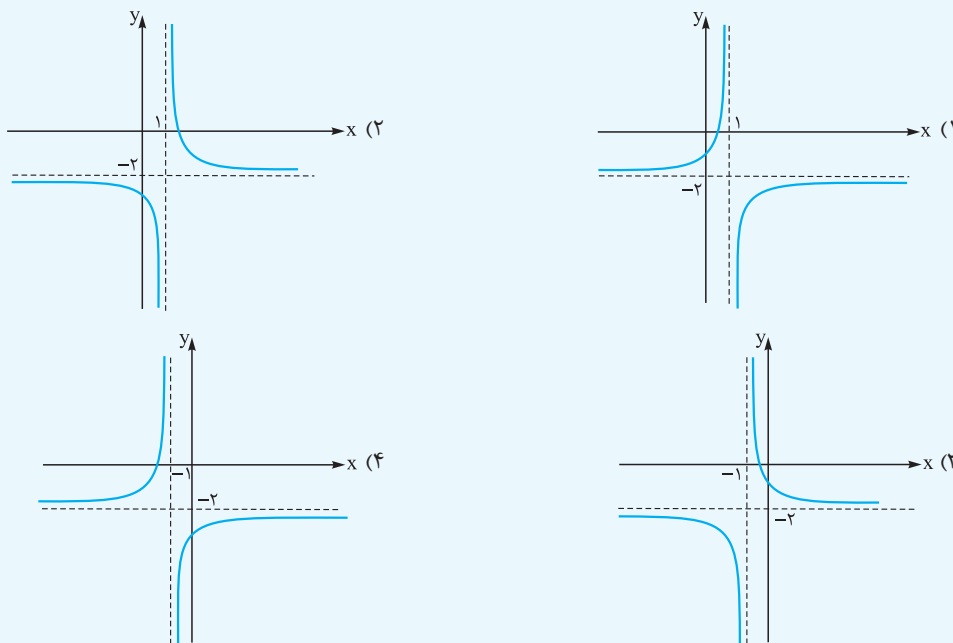
**پاسخ** گزینه ۲ برای رسم نمودار  $y = 1 - \sin 2x$  از نمودار  $y = \sin x$  کمک می گیریم و مراحل زیر را انجام می دهیم:







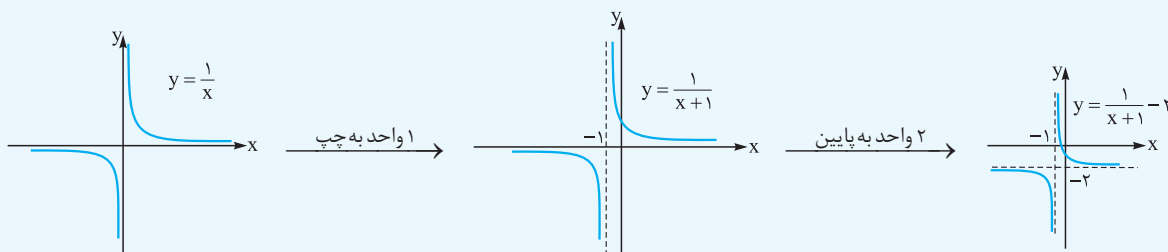
**تست** نمودار تابع  $f(x) = \frac{-2x-1}{x+1}$  در کدام گزینه آمده است؟



$$y = \frac{-2x-1}{x+1} = \frac{-2x-2+1}{x+1} = \frac{-2x-2}{x+1} + \frac{1}{x+1} = -2 + \frac{1}{x+1}$$

**پاسخ** گزینه ۳ **راه اول** ضابطه تابع را ساده تر می نویسیم:

پس ضابطه تابع  $f$  به صورت  $f(x) = \frac{1}{x+1} - 2$  درآمد. می توانیم با انتقال تابع  $y = \frac{1}{x}$ ، آن را رسم کنیم:



**راه دوم** گاهی اوقات با نقطه یابی هم می توانیم سه گزینه را رد کنیم و به جواب برسیم.  $f(0) = -1$  است، پس نقطه  $(0, -1)$  باید روی نمودار باشد، در نتیجه ۲ و ۴ رد می شوند.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x-1}{x+1} = 0 \Rightarrow -2x-1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

حالا محل برخورد تابع با محور  $x$  ها را حساب می کنیم:

یعنی این تابع محور  $x$  ها را در نقطه ای به طول  $-\frac{1}{2}$  قطع می کند، پس ۱ هم رد می شود و فقط ۳ می ماند.

در توابع درجه دوم به فرم کلی  $y = ax^2 + bx + c$  برای رسم نمودار تابع با کمک انتقال تابع  $y = x^2$  باید از مربع کامل کردن استفاده کنیم.

**تست** برای رسم نمودار  $y = 2x^2 - 4x + 3$  با استفاده از نمودار  $y = x^2$ ، به ترتیب چه مراحل باید صورت پذیرد؟

- (۱) دو واحد به راست، انبساط عمودی با ضریب ۲، ۳ واحد به بالا  
 (۲) یک واحد به راست، انبساط عمودی با ضریب ۲، یک واحد به بالا  
 (۳) دو واحد به راست، انبساط افقی با ضریب  $\frac{1}{2}$ ، ۳ واحد به بالا  
 (۴) یک واحد به راست، انبساط افقی با ضریب  $\frac{1}{2}$ ، یک واحد به بالا

**پاسخ گزینه ۲**

اول با استفاده از مربع کامل کردن ضابطه تابع  $y = 2x^2 - 4x + 3$  را جمع و پهنش کنیم!

$$y = 2x^2 - 4x + 3 = 2x^2 - 4x + 2 + 1 = 2(x^2 - 2x + 1) + 1 = 2(x-1)^2 + 1$$

برای رسم نمودار این تابع با استفاده از نمودار  $y = x^2$  به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y = x^2 \xrightarrow[\text{یک واحد به راست}]{x \rightarrow x-1} y = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{انبساط عمودی با ضریب ۲}} y = 2(x-1)^2 \xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} y = 2(x-1)^2 + 1$$

یک موضوع دیگر که حتماً باید بررسی کنیم، تحلیل وضعیت نقاط متناظر تابع و انتقال یافته آن است.

**تست** اگر نقطه  $(2x_0 - 1, -\frac{y_0}{4})$  روی نمودار  $g(x) = k|x+b|$ ، متناظر نقطه  $(x_0, y_0)$  روی نمودار  $f(x) = |x|$  باشد،  $b+k$  کدام است؟

- (۱) صفر      (۲)  $\frac{3}{4}$       (۳)  $\frac{1}{3}$       (۴)  $\frac{1}{4}$

**پاسخ گزینه ۲** نقطه  $(x_0, y_0)$  روی نمودار تابع  $f$  قرار دارد، بنابراین:

$$f(x_0) = y_0 \quad (*)$$

هم‌چنین نقطه  $(2x_0 - 1, -\frac{y_0}{4})$  روی نمودار تابع  $g$  قرار دارد، پس:

$$g(2x_0 - 1) = -\frac{y_0}{4}$$

$$\xrightarrow{(*)} g(2x_0 - 1) = -\frac{1}{4}f(x_0) \quad (**)$$

حالا برای پیدا کردن ضابطه  $g(x)$ ، با فرض  $2x_0 - 1 = x$  داریم:

$$2x_0 = x + 1 \Rightarrow x_0 = \frac{x+1}{2}$$

$$\xrightarrow{(**)} g(x) = -\frac{1}{4}f\left(\frac{x+1}{2}\right) \xrightarrow{f(x)=|x|} g(x) = -\frac{1}{4}\left|\frac{x+1}{2}\right| = -\frac{1}{4}\left|\frac{1}{2}(x+1)\right| = -\frac{1}{4}|x+1| = k|x+b|$$

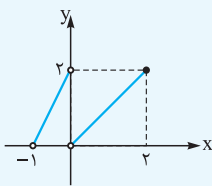
$$k = -\frac{1}{4}, b = 1 \Rightarrow k+b = \frac{3}{4} \quad \text{در نتیجه:}$$

## تأثیر تبدیل نمودار روی دامنه و برد تابع

فرض کنیم  $u$  عبارتی خطی بر حسب  $x$  باشد، در این صورت داریم:

۱ اگر دامنه  $f$  بازه  $[a, b]$  باشد، برای یافتن دامنه  $cf(u) + d$  کافی است نامعادلات مضاعف  $a \leq u \leq b$  را حل کنیم.

**تست** اگر نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل باشد، دامنه تابع  $y = 2f(1 - \frac{x}{3})$  کدام است؟



- (۱)  $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$       (۲)  $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}) - \{3\}$   
 (۳)  $(-6, 3)$       (۴)  $(-3, 6) - \{3\}$

**پاسخ گزینه ۲** با توجه به نمودار، دامنه تابع  $f$  برابر است با:

$$D_f = (-1, 2] - \{3\}$$

بنابراین برای محاسبه دامنه  $y = 2f(1 - \frac{x}{3})$  باید نامعادلات زیر را حل کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 < 1 - \frac{x}{3} \leq 2 \xrightarrow{-(1)} -2 < -\frac{x}{3} \leq 1 \xrightarrow{\times(-3)} -3 \leq x < 6 \\ \text{و} \\ 1 - \frac{x}{3} \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{3} \neq 1 \Rightarrow x \neq 3 \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{دامنه} = [-3, 6) - \{3\}$$

۲ اگر دامنه  $cf(u) + d$  بازه  $[a, b]$  باشد، برای یافتن دامنه تابع  $y = f(x)$ ، با توجه به این که  $a \leq x \leq b$ ، عبارت  $u$  را تشکیل داده، دامنه  $f$  را می‌یابیم.

**تست** اگر دامنه تابع  $y = f(x-2)$  بازه  $[1, 4]$  باشد، دامنه تابع  $g(x) = 1 - f(2x)$  کدام است؟

- (۱)  $[6, 12)$       (۲)  $[\frac{3}{2}, 3)$       (۳)  $[-\frac{1}{2}, 1)$       (۴)  $[-2, 4)$

**پاسخ گزینه ۳** ابتدا با کمک دامنه تابع  $y = f(x-2)$ ، دامنه تابع  $y = f(x)$  را می‌یابیم:

$$1 \leq x < 4 \xrightarrow{-2} -1 \leq x-2 < 2 \Rightarrow D_f = [-1, 2)$$

حالا مسئله مانند مدل ۱ شد. دامنه تابع  $y = f(x)$  برابر  $[-1, 2)$  است. پس برای محاسبه دامنه تابع  $g(x) = 1 - f(2x)$  نامعادلات زیر را حل

$$-1 \leq 2x < 2 \xrightarrow{:\div 2} -\frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow D_g = [-\frac{1}{2}, 1)$$

می‌کنیم:

۳ اگر برد تابع  $f$  بازه  $[a, b]$  باشد، برای یافتن برد  $y = cf(u) + d$  کافی است برد  $f$  را ابتدا در  $C$  ضرب و سپس با  $d$  جمع کنیم.

**تست** اگر برد تابع  $f$  بازه  $(1, 3)$  باشد، برد تابع  $y = 1 - 2f(3x)$  کدام است؟

- (۱)  $[-5, -1]$  (۲)  $[-3, 1]$  (۳)  $(-9, -3]$  (۴)  $(-4, 2]$

**پاسخ گزینه ۱** برد  $f$  بازه  $(1, 3)$  است، پس  $1 < f(x) \leq 3$  و در نتیجه:

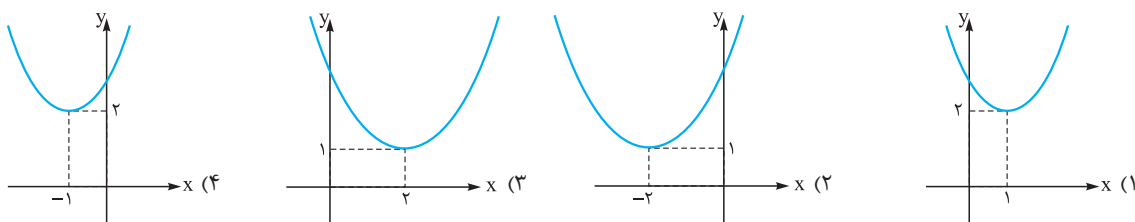
$$1 < f(3x) \leq 3 \xrightarrow{\times(-2)} -6 \leq -2f(3x) < -2 \xrightarrow{+1} -5 \leq 1 - 2f(3x) < -1$$

پس برد تابع داده شده، بازه  $[-5, -1]$  است.

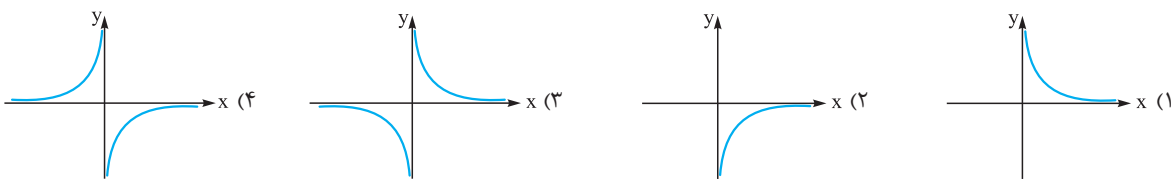
## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

### تبدیل نمودار توابع

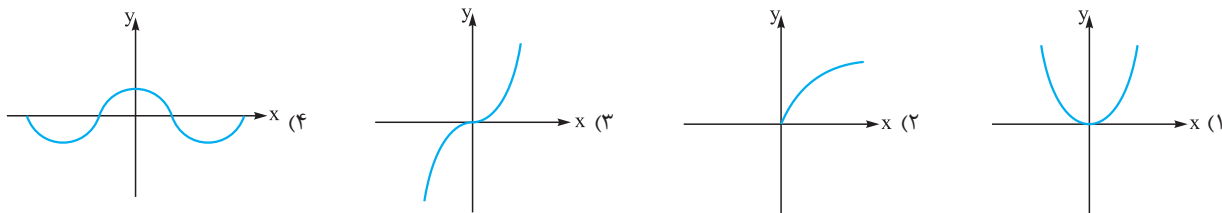
۸۱- نمودار تابع  $y = (x-2)^2 + 1$  کدام است؟



۸۲- نمودار تابع  $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  کدام است؟  
 $h(x) = -\frac{1}{x}$



۸۳- نمودار تابع  $f$  کدام باشد تا تساوی  $f(x) + f(-x) = 0$  به ازای هر  $x$  عضو دامنه تابع برقرار باشد؟



۸۴- تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  با دامنه  $[0, 9]$  مفروض است. اگر مجموعه‌های  $A$  و  $B$  به ترتیب دامنه و برد تابع  $y = f(x-2) + 1$  باشند،  $A \cap B$  کدام است؟

(برگرفته از تمرین کتاب درسی)

- (۱)  $[1, 3]$  (۲)  $[2, 4]$  (۳)  $[2, 11]$  (۴)  $[0, 3]$

۸۵- نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  را نسبت به محور  $x$ ها قرینه کرده و سپس ۲ واحد به طرف چپ و در نهایت ۱ واحد به پایین منتقل می‌کنیم. ضابطه تابع حاصل کدام است؟

- (۱)  $y = \sqrt{x-2} - 1$  (۲)  $y = -\sqrt{x-2} - 1$  (۳)  $y = -\sqrt{x+2} - 1$  (۴)  $y = \sqrt{x+2} - 1$

۸۶- با انتقال نمودار  $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$  به نمودار  $g(x) = 2 + \sqrt{x+1}$  رسیده‌ایم. مراحل انتقال به ترتیب کدام است؟

- (۱) دو واحد به چپ و یک واحد به بالا  
 (۲) دو واحد به راست و یک واحد به بالا  
 (۳) دو واحد به چپ و یک واحد به پایین  
 (۴) دو واحد به راست و یک واحد به پایین

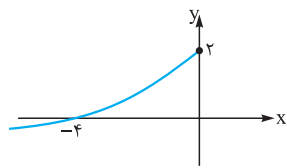
۸۷- اگر نمودار  $f(x) = 1 + \sin(x - \frac{\pi}{4})$  را  $\frac{\pi}{4}$  واحد به ..... و یک واحد به ..... منتقل کنیم، نمودار تابع  $f(x) = \sin x$  حاصل می‌شود.

- (۱) چپ - بالا (۲) چپ - پایین (۳) راست - بالا (۴) راست - پایین

۸۸- نمودار تابع  $y = 1 + \sqrt{x+1}$  را نسبت به محور  $y$  آنها انعکاس داده‌ایم، سپس آن را ۲ واحد به طرف چپ و در نهایت ۲ واحد به پایین منتقل کرده‌ایم. ضابطه تابع حاصل کدام است؟

$y = \sqrt{-x-1}-1$  (۱)       $y = -3 - \sqrt{x+3}$  (۲)       $y = 1 - \sqrt{x+3}$  (۳)       $y = 3 - \sqrt{-x-1}$  (۴)

۸۹- نمودار تابع زیر از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  به دست آمده است. نمودار تابع از کدام نقطه زیر می‌گذرد؟ (برگرفته از تمرین کتاب درسی)



- (۱)  $(-9, -3)$       (۲)  $(-9, -2)$   
 (۳)  $(-16, -3)$       (۴)  $(-16, -2)$

۹۰- قرینه نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را نسبت به محور  $y$  تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف  $x$ های مثبت انتقال می‌دهیم، نمودار حاصل ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی قارج ۹۷)

- (۱)  $-2$       (۲)  $0/5$       (۳)  $1$       (۴)  $1/5$

۹۱- نمودار تابع  $f(x) = |x|$  را یک واحد به طرف  $x$ های مثبت و یک واحد به طرف  $y$ های منفی منتقل می‌کنیم. نمودار جدید و نمودار اولیه در چند نقطه متقاطع خواهند بود؟

- (۱) صفر      (۲)  $1$       (۳)  $2$       (۴) بی‌شمار

۹۲- نمودار تابع  $f(x) = \frac{x}{x-1}$  از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟

- (۱) از هر چهار ناحیه می‌گذرد.      (۲) دوم      (۳) سوم      (۴) چهارم

۹۳- نمودار توابع  $y = -\sqrt{x-1}$  و  $y = \frac{x}{x-1}$  در چند نقطه متقاطع‌اند؟ (کانون فرهنگی آموزش - ۹۸)

- (۱) صفر      (۲)  $1$       (۳)  $2$       (۴)  $3$

۹۴- برای رسم نمودار تابع  $y = \frac{2^x + 4}{2}$ ، با انتقال نمودار تابع  $y = 2^x$  به ترتیب چه مراحل طی می‌شود؟ (برگرفته از تمرین کتاب درسی)

- (۱) یک واحد به راست و دو واحد به بالا      (۲) چهار واحد به چپ و انقباض عمودی با ضریب  $\frac{1}{2}$   
 (۳) یک واحد به راست و چهار واحد به بالا      (۴)  $2$  واحد به بالا و انقباض عمودی با ضریب  $\frac{1}{2}$

۹۵- نمودار تابع  $y = \log_3(x+1)$  را دو واحد به راست انتقال می‌دهیم. سپس شکل حاصل را نسبت به محور  $x$ ها قرینه کرده و یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. نمودار تابع حاصل محور  $x$ ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱)  $2$       (۲)  $4$       (۳)  $7$       (۴)  $10$

۹۶- نمودار یک سهمی پس از انتقال رأس آن به اندازه یک واحد به سمت راست و دو واحد به سمت بالا با ضابطه  $g(x) = (x-2)^2$  مشخص شده است. قبل از انتقال معادله تابع به کدام صورت بوده است؟

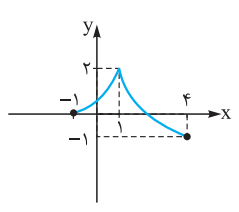
$f(x) = (x-1)^2$  (۱)       $f(x) = x^2 - 2x - 1$  (۲)       $f(x) = x^2 + 6x + 11$  (۳)       $f(x) = (x-3)^2$  (۴)

۹۷- سهمی  $f(x) = ax^2 + bx + 1$  مفروض است. اگر رأس نمودار تابع با ضابطه  $y = f(x+2) - 1$ ، نقطه  $(-1, 1)$  باشد،  $a$  کدام است؟

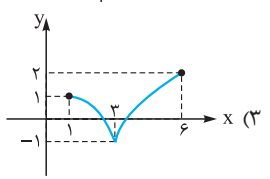
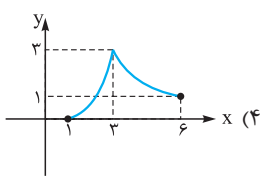
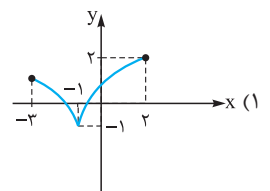
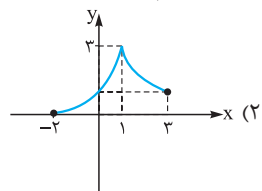
- (۱)  $2$       (۲)  $-2$       (۳)  $1$       (۴)  $-1$

۹۸- نمودار تابع  $y = 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$  را ابتدا دو واحد به چپ و سپس یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم. ضابطه نمودار تابع حاصل کدام است؟

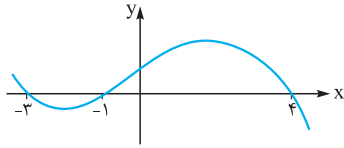
$y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$  (۱)       $y = \sqrt{x^2 - 2x - 1}$  (۲)       $y = |x-1|$  (۳)       $y = |x+1|$  (۴)



۹۹- اگر نمودار تابع  $y = -f(x-2)$  به شکل مقابل باشد، نمودار تابع  $y = 1 + f(x)$  کدام است؟



(تجربی فارغ ۹۴)



۱۰۰- شکل روبه‌رو، نمودار تابع  $y = f(x-2)$  است. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ  $\sqrt{xf(x)}$  کدام است؟

(۱)  $[-1, 1] \cup [0, 6]$

(۲)  $[-3, 1] \cup [0, 2]$

(۳)  $[-5, -3] \cup [-1, 2]$

(۴)  $[-5, -3] \cup [0, 2]$

(ریاضی ۹۳)

۱۰۱- اگر  $f(x) = 1 - (\frac{1}{x})^x$  باشد، دامنهٔ  $y = \sqrt{xf(x)}$  کدام بازه است؟

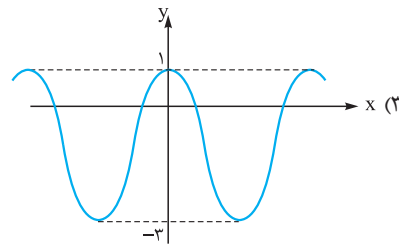
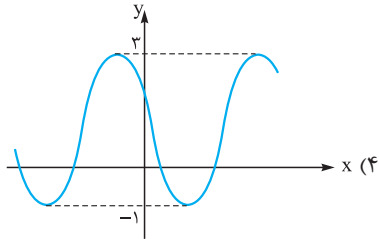
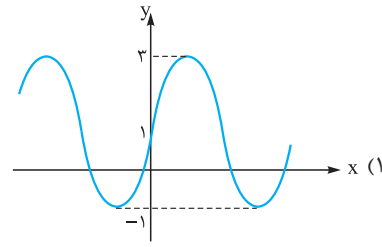
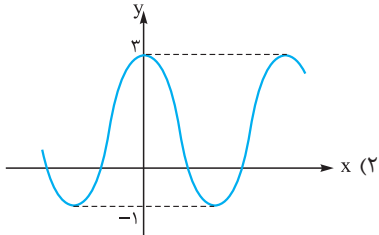
(۴)  $(0, +\infty)$

(۳)  $(-\infty, +\infty)$

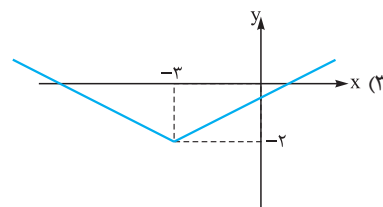
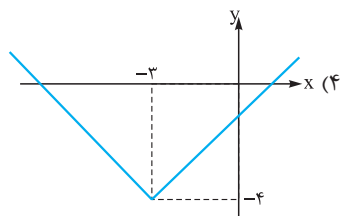
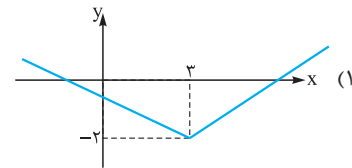
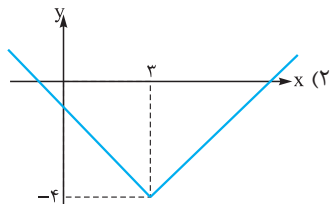
(۲)  $(-\infty, 0)$

(۱)  $[-1, 1]$

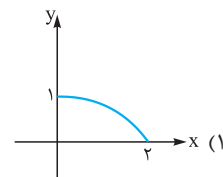
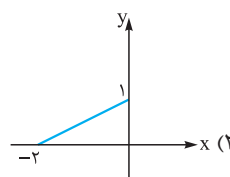
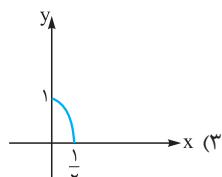
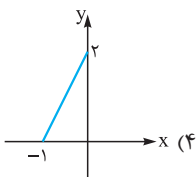
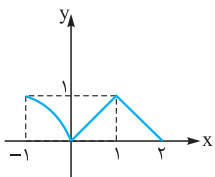
۱۰۲- نمودار تابع  $y = 2\cos x + 1$  کدام است؟



۱۰۳- نمودار تابع  $y = \frac{|3-x|-4}{2}$  کدام است؟



۱۰۴- اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت مقابل باشد، کدام نمودار زیر بخشی از نمودار تابع  $y = 2f(x+1)$  است؟



۱۰۵- برای رسم نمودار تابع  $f(x) = |x|$  با انتقال نمودار تابع  $g(x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$  چه مراحل را می توان طی کرد؟

- (۱) انقباض افقی با ضریب ۲، یک واحد به چپ  
 (۲) انقباض افقی با ضریب  $\frac{1}{4}$ ، یک واحد به چپ  
 (۳) انبساط افقی با ضریب ۲، یک واحد به راست  
 (۴) انقباض افقی با ضریب  $\frac{1}{4}$ ، یک واحد به راست

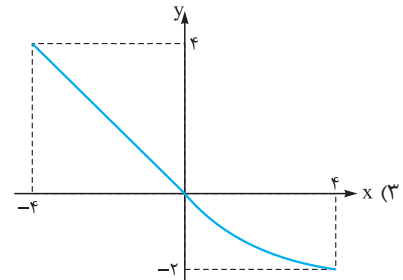
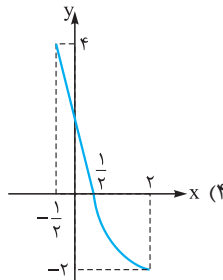
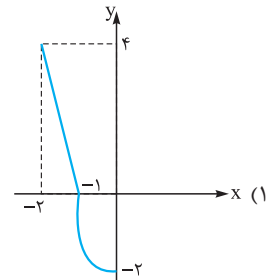
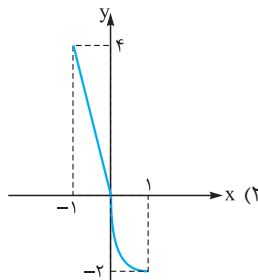
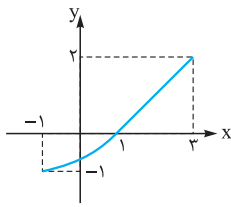
۱۰۶- تابع  $f(x) = \log_2(x+2)$  مفروض است. به ازای کدام مقدار  $a$ ، نمودار تابع  $y = f(2x) + a$  فقط از دو ناحیه عبور می کند؟

- (۱) ۱  
 (۲) ۲  
 (۳) -۱  
 (۴) -۲

۱۰۷- برای رسم نمودار  $y = 2\cos^2 x - 1$  با انتقال نمودار  $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$  چه مراحل را می توان طی کرد؟

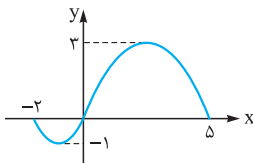
- (۱)  $\frac{\pi}{4}$  واحد به راست، انقباض افقی با ضریب  $\frac{1}{4}$   
 (۲)  $\frac{\pi}{4}$  واحد به راست، انبساط عمودی با ضریب ۲ و یک واحد به پایین  
 (۳)  $\frac{\pi}{4}$  واحد به چپ، انبساط افقی با ضریب ۲  
 (۴)  $\frac{\pi}{4}$  واحد به چپ، انقباض عمودی با ضریب  $\frac{1}{4}$  و یک واحد به پایین

۱۰۸- اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت مقابل باشد، نمودار تابع  $y = 2f(1 - \frac{x}{4})$  کدام است؟



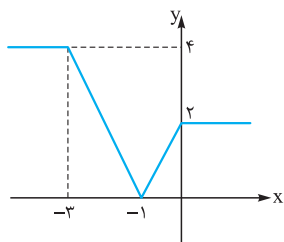
فصل اول تابع

کانون فرهنگی آموزش - ۹۷



۱۰۹- اگر نمودار تابع  $y = f(x+2)$  به صورت روبه رو باشد، دامنه تابع  $y = \sqrt{xf(1 - \frac{x}{4})}$  به کدام صورت است؟

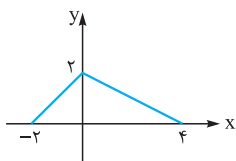
- (۱)  $\{-12, 2\} \cup [-2, 0]$   
 (۲)  $[-12, -2] \cup [0, 2]$   
 (۳)  $\{-12\} \cup [-2, 2]$   
 (۴)  $[-6, -1] \cup [0, 1]$



۱۱۰- اگر نمودار تابع  $y = f(1-x)$  به صورت روبه رو باشد، سطح محصور بین نمودار تابع  $y = f(x-1)$  و محور

xها در فاصله  $[0, 5]$  کدام است؟

- (۱) ۸  
 (۲) ۸/۵  
 (۳) ۹  
 (۴) ۹/۵



۱۱۱- اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت روبه رو باشد، مساحت سطح محصور بین نمودار تابع  $y = f(x - |x|)$ ،

محور xها و خط  $x = 5$  کدام است؟

- (۱) ۸  
 (۲) ۹  
 (۳) ۱۰  
 (۴) ۱۱

۱۱۲- برای رسم نمودار تابع  $g(x) = -2x^2 + 8x - 3$  با استفاده از نمودار  $f(x) = x^2$  چه انتقال‌هایی باید صورت گیرد؟

- (۱) ۲ واحد به چپ، انبساط عمودی با ضریب ۲، قرینه نسبت به محور  $x$ ها، ۵ واحد به بالا  
 (۲) ۲ واحد به چپ، انبساط افقی با ضریب ۲، قرینه نسبت به محور  $y$ ها، ۳ واحد به پایین  
 (۳) ۲ واحد به راست، انبساط افقی با ضریب ۲، قرینه نسبت به محور  $y$ ها، ۳ واحد به پایین  
 (۴) ۲ واحد به راست، انبساط عمودی با ضریب ۲، قرینه نسبت به محور  $x$ ها، ۵ واحد به بالا

۱۱۳- نقطه  $(-8, 6)$  روی نمودار  $y = f(x)$  قرار دارد. کدام نقطه به طور قطع روی نمودار  $y = \frac{1}{4}f(-x) + 1$  قرار دارد؟

- (۱)  $(-8, 4)$  (۲)  $(8, 4)$  (۳)  $(8, 10)$  (۴)  $(-8, -2)$

۱۱۴- نقطه  $A(x_0, y_0)$  روی نمودار  $f$  مفروض است. اگر نمودار تابع  $g$  انتقال‌یافته نمودار تابع  $f$  باشد و نقطه  $A'(\frac{x_0}{4}, 1 - y_0)$  روی نمودار تابع  $g$  متناظر نقطه  $A$  روی  $f$  باشد، با چه انتقالی می‌توان از نمودار  $f$  به نمودار  $g$  رسید؟

- (۱) انقباض افقی با ضریب  $\frac{1}{4}$ ، قرینه نسبت به محور  $y$ ها، یک واحد به پایین  
 (۲) انقباض افقی با ضریب  $\frac{1}{4}$ ، قرینه نسبت به محور  $x$ ها، یک واحد به بالا  
 (۳) انبساط افقی با ضریب ۲، قرینه نسبت به محور  $x$ ها، یک واحد به بالا  
 (۴) انبساط افقی با ضریب ۲، قرینه نسبت به محور  $y$ ها، یک واحد به پایین

۱۱۵- اگر نقطه  $(\frac{1-x_0}{4}, y_0 + 1)$  روی نمودار  $g$  متناظر نقطه  $(x_0, y_0)$  روی نمودار  $f$  باشد، رابطه بین  $f$  و  $g$  به کدام صورت است؟

- (۱)  $f(x) = g(1 - 2x) - 1$  (۲)  $g(x) = f(1 - 2x) + 1$  (۳)  $f(x) = g(\frac{1-x}{4}) + 1$  (۴)  $g(x) = f(\frac{1-x}{4}) - 1$

۱۱۶- اگر  $g(x) = 2f(1 - \frac{x}{4})$  و نقطه  $A(2, 2)$  روی نمودار  $g$  باشد، نقطه متناظر  $A$  روی نمودار  $f$  به کدام صورت است؟

- (۱)  $(-2, 1)$  (۲)  $(-2, 4)$  (۳)  $(0, 1)$  (۴)  $(0, 4)$

۱۱۷- اگر دامنه تابع  $f$  بازه  $[-1, 2]$  باشد، دامنه تابع  $y = -2f(-\frac{x}{4} + 1) + 3$  کدام است؟

- (۱)  $[\frac{3}{4}, 0]$  (۲)  $(\frac{3}{4}, 0]$  (۳)  $(-2, 4]$  (۴)  $[-2, 4]$

۱۱۸- اگر دامنه تابع  $y = 1 - f(1 - 3x)$  بازه  $[-2, 4]$  باشد، دامنه تابع  $y = f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $[-11, 7]$  (۲)  $[-11, 7)$  (۳)  $[-1, 1)$  (۴)  $(-1, 1]$

۱۱۹- اگر دامنه تابع  $y = 3f(2x - 1) + 1$  بازه  $[-1, 2]$  باشد، دامنه تابع  $y = 2f(x + 1) + 1$  کدام است؟

- (۱)  $[-2, 4]$  (۲)  $[-1, \frac{1}{4}]$  (۳)  $[1, \frac{5}{4}]$  (۴)  $[-4, 2]$

۱۲۰- اگر برد تابع  $f$  برابر  $R_f = [-\sqrt{3}, 2]$  باشد، برد تابع  $y = \sqrt{2}f(x - 1) + 1$  شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲۱- اگر برد تابع  $y = 1 - 2f(x - 1)$  بازه  $[-3, 1]$  باشد، برد تابع  $y = \frac{1}{4}f(x + 1)$  کدام است؟

- (۱)  $(0, 1)$  (۲)  $(0, 1)$  (۳)  $[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}]$  (۴)  $(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}]$

(کانون فرهنگی آموزش - ۹۸)

۱۲۲- اگر شکل مقابل نمودار تابع  $y = f(x - 2)$  باشد، آن‌گاه برد تابع  $y = \sqrt{|3f(x) - 1|}$  کدام است؟

- (۱)  $[0, \sqrt{5}]$

- (۲)  $[-2, 3]$

- (۳)  $[0, \sqrt{8}]$

- (۴)  $[0, \sqrt{7}]$

۱۲۳- نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را ابتدا یک واحد به چپ منتقل کرده و سپس با ضریب ۲ در راستای عمودی منبسط می‌کنیم و در نهایت نمودار حاصل را نسبت به خط نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه می‌کنیم. ضابطه تابع حاصل کدام است؟

- (۱)  $4x^2 + 1$  (۲)  $\frac{x^2}{4} - 1$  (۳)  $\frac{(x-1)^2}{4}$  (۴)  $4(x+1)^2$

۱۲۴- تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  مفروض است. اگر نمودار تابع را ابتدا با ضریب ۲ در راستای افقی منبسط کنیم و سپس ۲ واحد به راست منتقل کنیم، تابع  $g$  حاصل می‌شود. خط  $x = 1$  نمودار تابع  $fg$  را با چه عرضی قطع می‌کند؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{4}$  (۳) ۱ (۴) -۱

