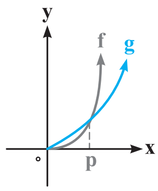
درس اول: توابع چندجمله‌ای ـ توابع صعودی و نزولی

توابع چند جمله‌ای

iQ در شروع فصل، تابع‌های چندجمله‌ای رو معرفی می‌کنیم. بریم ببینیم چه خبره.

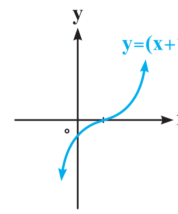
۱- با توجه به نمودار توابع $f(x) = x^n$ و $g(x) = x^m$ در شکل مقابل، کدام گزینه می‌تواند درست باشد؟ برگرفته از کتاب درسی



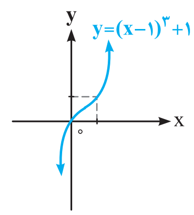
۱) $m = ۳$، $n = ۲$ و $p = ۱$
۲) $m = ۳$، $n = ۲$ و $p = ۲$
۳) $m = ۲$، $n = ۳$ و $p = ۲$
۴) $m = ۲$، $n = ۳$ و $p = ۱$

۲- نمودار چه تعداد از توابع زیر، درست رسم شده است؟

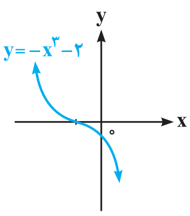
الف)



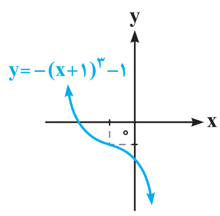
ب)



پ)



ت)



۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

توابع صعودی و نزولی

iQ بعضی تابع‌ها هستن که بین مقدار x و y اونا رابطهٔ مستقیم وجود داره. یعنی x که زیاد می‌شه، y هم زیاد می‌شه. بعضی هم رابطهٔ برعکس دارن. یه سری هم هستن که هر چی مقدار x در اونا زیاد می‌شه، مقدار y اصلاً تغییر نمی‌کنه. این‌جا می‌خوایم در مورد این تابع‌ها بیشتر باهاتون حرف بزنیم.

۳- چه تعداد از توابع زیر، اکیداً نزولی هستند؟

الف) $f(x) = ۲x - ۳$
ب) $g(x) = ۱ - x^۳$
پ) $h(x) = -۱ - \sqrt{x+۱}$
ت) $t(x) = (x+۲)^۳$

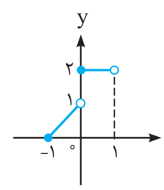
۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۴- اگر $f(x) = x^۲ + \frac{۱}{x^۲}$ باشد، تابع $(f(\sqrt{x}))^۲ - f(x)$ چگونه است؟

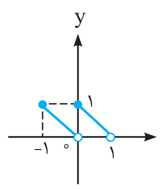
۱) هم صعودی و هم نزولی
۲) نزولی
۳) صعودی
۴) نه صعودی و نه نزولی

۵- کدام تابع در بازه‌های $(-۱,۰]$ و $[۰,۱)$، صعودی است، ولی در بازهٔ $(-۱,۱)$، صعودی نیست؟

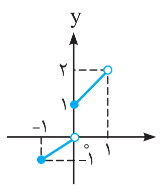
۱)



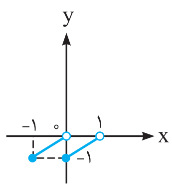
۲)



۳)



۴)



۶- تابع $f(x) = |x-۱| + |x+۳|$ در چه تعداد از بازه‌های زیر، اکیداًصعودی است؟

الف) $I_۱ = (-\infty,-۳]$
ب) $I_۲ = (۱,۱۰]$
پ) $I_۳ = (۰,+\infty)$
ت) $I_۴ = [\frac{۵}{۲},\frac{۹}{۲})$

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

۷- در بازه‌ای که تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x-۲| + |x-۳|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x) = ۲x^۲ - x - ۱۰$، در چند نقطه مشترک هستند؟ تجربی داخل ۹۷

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) فاقد نقطهٔ مشترک

۸- بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ ; & x^۲ \geq ۹ \\ ۹ ; & x^۲ < ۹ \end{cases}$ روی آن صعودی است، کدام است؟ + توابع چندضابطه‌ای

۱) $(-\infty,۳]$
۲) $(-\infty,-۳]$
۳) $[۳,+\infty)$
۴) $[-۳,+\infty)$

gajmarket.com

۹- کدام گزینه دربارهٔ تابع $f(x)=\begin{cases}(x-۲)^۲-۱ & ; \quad x>۲\\ -۲-\sqrt{۲-x} & ; \quad x\leq ۲\end{cases}$ در دامنه‌اش درست است؟

۱) نزولی است. ۲) اکیداً صعودی است. ۳) اکیداً نزولی است. ۴) صعودی است.

۱۰- چه تعداد از توابع زیر، اکیداً صعودی هستند؟ + مثلثات

الف) $y=x\cos x$ ب) $y=x^۳-۳x^۲+۳x$ پ) $y=\frac{۲x^۲}{x^۲+۱}$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱- حدود a برای آن که تابع $y=(a-۲)x^۲-x$ در فاصلهٔ $[۱,+\infty)$ صعودی باشد، کدام است؟

۱) $a\geq\frac{۵}{۲}$ ۲) $۲<a\leq\frac{۵}{۲}$ ۳) $a<\frac{۵}{۲}$ ۴) $a>۲$

۱۲- به ازای چه مقادیری از k، تابع $f(x)=\begin{cases}x+۲ & ; \ x\geq ۱\\ ۳x-k & ; \ x<۱\end{cases}$ صعودی است؟ + توابع چندضابطه‌ای

۱) $k\leq ۰$ ۲) $k\geq ۰$ ۳) $k\in\mathbb{R}$ ۴) هیچ مقدار k

۱۳- فرض کنید f تابعی اکیداً نزولی بوده و مقدار $f(۲a-۳)-f(a^۲-۲a)$ برابر عددی مثبت است. در این شرایط، حدود تغییرات a کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-[۱,۳]$ ۲) $(۱,۳)$ ۳) $(-\infty,۱)$ ۴) $(۱,+\infty)$

۱۴- اگر g تابعی اکیداً صعودی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{g(|x-۲|)-g(|x+۳|)}}$ باشد، دامنهٔ تابع f کدام است؟

۱) $(-\infty,-۰/۵)$ ۲) $(۰/۵,+\infty)$ ۳) $(-\infty,۰/۵)$ ۴) $(-۰/۵,۰/۵)$

۱۵-به ازای چه مقادیری از b تابع $f=\{(a^۲+۲,۳b-۱),(-۱-c^۴,b+۶)\}$ صعودی است؟

۱) $[-۳/۵,۳/۵]$ ۲) $(-\infty,۳/۵]$ ۳) $[۰,۳/۵]$ ۴) $[۳/۵,+\infty)$

۱۶- اگر f و g دو تابع صعودی اکید روی $\mathbb{R}$ باشند، آن‌گاه توابع $f+g$ و $f-g$ به‌ترتیب از راست به چپ چگونه‌اند؟

۱) اکیداً صعودی، اکیداً نزولی ۲) اکیداً نزولی، اکیداً صعودی ۳) اکیداً صعودی، نامشخص ۴) اکیداً نزولی، اکیداً نزولی

۱۷- اگر تابع f اکیداً صعودی و $f(-۱)=۰$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{xf(x)}{-۱-x^۲}}$ کدام است؟

۱) $[-۱,۰]$ ۲) $[-۱,+\infty)$ ۳) $(-۱,۰)$ ۴) $\mathbb{R}-(-۱,۰)$

درس دوم: ترکیب توابع

یکی از موضوع‌های مهم توی فصل تابع، همین بحث ترکیب توابع هستش. این‌که چه جوری با هم ترکیب می‌شن یا مقدارشون در یه نقطهٔ خاص، چند می‌شه. تستای این قسمت به شما کمک می‌کنه تا تسلطتون روی این موارد بالا بره.

۱۸- یک مادهٔ غذایی را با دمای ۴ درجهٔ سانتی‌گراد از یخچال بیرون آورده‌ایم. اگر تعداد باکتری‌هایی که در آن با افزایش دما رشد می‌کنند از رابطهٔ $N(d)=۱۰d^۲-۲۰d+۳۰۰$ $(۴\leq d\leq ۲۰)$ به دست آید و $d(t)=۶t+۲$ $(۰\leq t\leq ۳)$ باشد، آن‌گاه تعداد باکتری‌های موجود در این مادهٔ غذایی که ۲ ساعت قبل، از یخچال بیرون آورده‌شده، چه‌قدر است؟ (d دمای مادهٔ غذایی پس از خروج از یخچال برحسب درجه و t، زمان برحسب ساعت است.) فعالیت کتاب درسی

۱) ۱۹۶۰ ۲) ۱۹۸۰ ۳) ۱۹۹۰ ۴) ۲۰۱۰

۱۹- با توجه به جدول‌های مقابل، حاصل $(fog)(۲)-(gog)(-۱)$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

x	-۱	۰	۱	۲
f (x)	۰	$\frac{۱}{۴}$	-۲	۱

x	-۱	۰	۱	۲
g (x)	۱	۲	$\frac{۱}{۲}$	۱

۱) -۲/۵
۲) -۱/۵
۳) -۳/۵
۴) -۴/۵

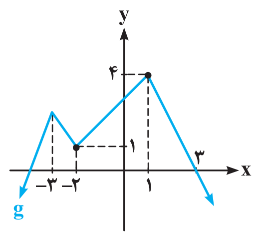
۲۰- اگر $f(x)=\sqrt{۲-x-x^۲}$ باشد، مقدار $f(f(-۱))$ کدام است؟ تجربی خارج ۸۸

۱) تعریف‌نشده ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۲}$

۲۱- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x-\sqrt{x+۴} & ;\ x>۳ \\ ۲x+۳ & ;\ x\leq ۳ \end{cases}$، مقدار $f(f(۵))+f(f(۱))$ کدام است؟ تجربی داخل ۹۰

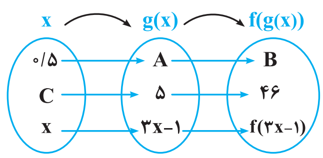
۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۲۲- اگر $f=\{(۳,-۲),(-۱,۲),(۱,۰),(۲,۱)\}$ و $h(x)=۲-۳x$ و نمودار تابع g به صورت زیر باشد، حاصل $۲(gof)(۱)-(fohog)(-۲)$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۶

۲۳- اگر $f(g(x))=۲g^۲(x)-g(x)+۱$ باشد، با توجه به شکل مقابل، حاصل $\frac{A-B}{C}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

۲۴- چه تعداد از موارد زیر، نادرست است؟ تمرین کتاب درسی

الف) اگر $f(x)=x^۲-۹$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۹}$ باشند، آن‌گاه $(fog)(۴)=۲$ است.

ب) برای دو تابع f و g که $f\neq g$، تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ‌وقت برقرار نیست.

پ) اگر $f(۳)=۶$ و $g(۴)=۳$ باشند، آن‌گاه $(fog)(۴)=۱۸$ است.

ت) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۳x+۱$ باشند، آن‌گاه $(fog)(۵)=g(۱)$ است.

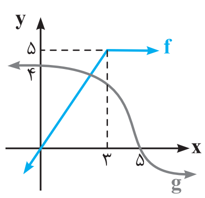
۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

۲۵- اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^۲+۲x+۱$، آن‌گاه حاصل $(fog)(۱-\sqrt{۲})-(gof)(۱-\sqrt{۲})$ کدام است؟ تجربی داخل ۸۹

۱) $۴(۱-\sqrt{۲})$ ۲) $۴(\sqrt{۲}-۱)$ ۳) ۴ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۲۶- اگر $f(x)=\sin(\frac{\pi x}{۶})$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲+۲x-۴}$ باشند، آن‌گاه حاصل $\frac{۱-(gof)(۳)}{(fog)(۱)}$ کدام است؟ + مثلثات

۱) -۶ ۲) -۲ ۳) -۸ ۴) -۴



۲۷- با توجه به نمودار توابع f و g در شکل روبه‌رو، حاصل $g(g(f(۳)))$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۱

۲۸- دو تابع $f(x)=x^۲+ax-۳b$ و $g(x)=b-x$ روی محور xها در نقطه‌ای به طول یک، متقاطع هستند. مقدار $(fog)(۲)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۲۹- فرض کنید f تابعی خطی و غیرثابت باشد و $f(۰)=-۱$ و $f(f(-۲))=-۱$. حاصل $f(f(-۱))$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

۳۰- اگر f تابعی چندجمله‌ای باشد، به‌طوری‌که $fof(x)=۹x+۱۰$، آن‌گاه حاصل $f(-۱)$ کدام عدد زیر می‌تواند باشد؟

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۳۱- اگر خروجی از ماشین شکل مقابل، $\frac{۴}{۳}$ باشد، ورودی کدام است؟

ورودی $\rightarrow \boxed{۲x-۲} \rightarrow \boxed{\frac{x}{۱+\sqrt{x}}} \rightarrow$ خروجی

۱) $\frac{۱۱}{۹}$ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۲- اگر خروجی ماشین مقابل، به ازای ورودی ۲، برابر ۵- باشد، A کدام است؟

ورودی $\rightarrow \boxed{۲x+A} \rightarrow \boxed{\sqrt{x}-۲x-۴} \rightarrow$ خروجی

۱) $-\frac{۱۵}{۴}$ ۲) -۳ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱۵}{۴}$

gajmarket.com

۳۳- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2[x]$، مقدار $f\left(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3})\right)$ کدام است؟ ([ ] نماد جزءصحیح است.) تجربی خارج ۹۰ + جزءصحیح

۱) ۱/۷۵ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۲/۷۵

۳۴- اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$، $g=\{(1,2),(5,4),(6,5),(2,3)\}$ و $g(f(a))=5$ باشد، عدد a کدام است؟ تجربی داخل ۹۱

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۵- اگر $f(x)=\begin{cases} 2 & ; x\geq 0 \\ -2 & ; x<0 \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x+1 & ; x\geq 0 \\ x-1 & ; x<0 \end{cases}$ باشند، حاصل $g(f(\tan 200^\circ+\cot 200^\circ))$ کدام است؟ + مثلثات

۱) -3 ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) -1

۳۶- اگر $g(x)=\frac{2x-a}{x+3}$ و $(gog)(x)=\frac{3x-5}{5x+8}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -1 ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -2

۳۷- اگر $f(x)=\frac{x}{x-1}$، مقدار $\underbrace{fofo\cdots of}_{\text{۱۳۹۷مرتبه}}(\sqrt{2})$ کدام است؟

۱) $2+\sqrt{2}$ ۲) $2-\sqrt{2}$ ۳) $2(\sqrt{2}+1)$ ۴) $2(\sqrt{2}-1)$

۳۸- دو تابع f و g به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بیان شده‌اند. در حالت کلی، کدام رابطه ممکن است تابع نباشد؟ ریاضی خارج ۸۵

۱) $f\cup g$ ۲) $f\cap g$ ۳) $f-g$ ۴) fog

۳۹- اگر $f(x)=2x-2$ و $g(x)=x^2-1$ باشند، جواب معادلهٔ $(fog)(x)=0$ کدام است؟

۱) $\pm\sqrt{2}$ ۲) ± 2 ۳) $\pm\sqrt{3}$ ۴) ± 3

۴۰- اگر $h(x)=\sqrt{x}$، $g(x)=\frac{x}{8}+1$ و $f(x)=8x-2$ باشند، آن‌گاه ضابطهٔ تابع $(fogoh)(x)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{x}$ ۲) $\sqrt{x}+1$ ۳) $\sqrt{x}+6$ ۴) $\sqrt{x}+8$

۴۱- اگر $f(x)=[x]$ باشد، مجموعهٔ مقادیر $f(x-f(x))$ کدام است؟ ([ ] علامت جزءصحیح است.) تجربی خارج ۸۵ + جزءصحیح

۱) $\{0\}$ ۲) $\{1\}$ ۳) $\{0,1\}$ ۴) $\{-1,0,1\}$

۴۲- اگر $y=f(x)$ یک تابع خطی گذرنده از نقاط $(0,a)$ و $(a,0)$ باشد، ضابطهٔ $(fof)(x)$ کدام است؟ $(a\neq 0)$

۱) صفر ۲) x ۳) $f(x)$ ۴) $x+2a$

۴۳- اگر $f(x)=(2x-3)^2$ و $g(x)=x+2$ باشند، نمودارهای دو تابع f و fog با کدام طول، متقاطع‌اند؟ تجربی داخل ۹۲

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{2}$

۴۴- اگر $f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x)=x+4$ باشند، جواب معادلهٔ $(gof)(x)=(fog)(x)$ کدام است؟ تجربی خارج ۹۷

۱) $-1,-7$ ۲) $1,-7$ ۳) $-1,7$ ۴) $1,7$

۴۵- اگر $g(x)=3x+1$ و $f=(3g+g)og$ باشند، آن‌گاه ضابطهٔ تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) $18x+12$ ۲) $18x+16$ ۳) $36x+12$ ۴) $36x+16$

۴۶- اگر $f(x)=\frac{4-x}{x+3}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ باشند، برد تابع fog شامل چند عدد صحیح است؟

۱) بی‌شمار ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۷- اگر $f(x)=x-[x]$ و $g(x)=\frac{1-x}{x}$ باشند، برد تابع gof کدام بازه است؟([ ] علامت جزءصحیح است.) ریاضی خارج ۸۶ + جزءصحیح

۱) $(0,+\infty)$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $(1,+\infty)$ ۴) $[1,+\infty)$

۴۸- تابع با ضابطهٔ $g(x)=x-\sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f، محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع کند، آن‌گاه نمودار تابع fog، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟ ریاضی خارج ۹۴

۱) $\frac{1}{9},4$ ۲) $\frac{1}{4},9$ ۳) $4,\frac{1}{4}$ ۴) $4,9$

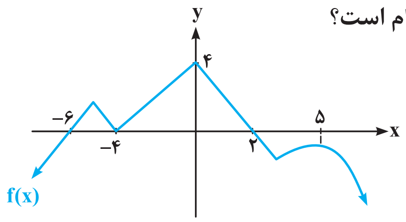
۴۹- اگر $f(x)=x^2+x-2$ و $g(x)=\frac{1}{2}(x-3)$، مجموعهٔ طول نقاطی از منحنی تابع fog که در زیر محور xها قرار می‌گیرند، برابر کدام بازه است؟ تجربی خارج ۹۱ و مشابه تجربی داخل ۹۱

۱) $(-5,1)$ ۲) $(-1,5)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(1,5)$

۵۰- اگر $f(x)=x^۲+x$ و $g(x)=\sqrt{۴x+۱}$ باشند، آن‌گاه مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع gof و خط به معادلهٔ $y=۳$ کدام است؟ تجربی داخل ۹۵

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۶

۵۱- با توجه به نمودار تابع f در شکل مقابل، حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $(fof)(x+۲)=۴$ کدام است؟



۱) ۱۲

۲) ۲۴

۳) صفر

۴) ۴۸

۵۲- اگر $f(x)=۲-|x-۲|$، ضابطهٔ تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟ ریاضی خارج ۹۰ + قدرمطلق

۱) x ۲) $۴-x$ ۳) $f(x)$ ۴) $۲-f(x)$

۵۳- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}|x+۱| & ; x>۰\\ ۳ & ; x\leq ۰\end{cases}$، حاصل $f(f(-f(x)))$ کدام است؟ + قدرمطلق

۱) $۳x+۳$ ۲) ۳ ۳) $x+۱$ ۴) ۴

۵۴- اگر $f(x)=|x|-x$ باشد، ضابطهٔ $(fof)(x)$ کدام است؟ + قدرمطلق

۱) x ۲) $|x|$ ۳) $x+|x|$ ۴) صفر

۵۵- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$ و $g(x)=\tan x$ باشند، ضابطهٔ تابع $(fog)(x)$ در بازهٔ $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ برابر کدام است؟ + مثلثات

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $-\sin x$ ۴) $-\cos x$

۵۶- اگر $f(x)=\begin{cases}x+۳ & ; x \text{ گنگ}\\ \sqrt{۵}+۲ & ; x \text{ گویا}\end{cases}$ باشد، آن‌گاه حاصل $(fof)(x)$ کدام است؟

۱) $f(x)+\sqrt{۵}+۵$ ۲) $f(x)+۳$ ۳) $\sqrt{۵}+۲$ ۴) $f(x)$

۵۷- اگر $f(x)=\begin{cases}x+۱ & ; x\geq ۱\\ x+۲ & ; x<۱\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x^۲ & ; x\geq ۱\\ x^۳ & ; x<۱\end{cases}$ باشند، ضابطهٔ تابع gof کدام است؟

۱) $\begin{cases}(x+۱)^۲ ; x\geq ۱\\ (x+۱)^۳ ; x<۱\end{cases}$

۲) $\begin{cases}(x+۲)^۲ ; x\geq ۱\\ (x+۱)^۳ ; x<۱\end{cases}$

۳) $\begin{cases}(x+۱)^۲ ; x\geq ۱\\ (x+۲)^۲ ; -۱\leq x<۱\\ (x+۲)^۳ ; x<-۱\end{cases}$

۴) $\begin{cases}(x+۱)^۲ ; x\geq ۱\\ (x+۱)^۳ ; -۱\leq x<۱\\ (x+۲)^۳ ; x<-۱\end{cases}$

۵۸- اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $x\to\boxed{f}\to\boxed{g}\to ۲x$ باشند و $g(x)=۳x+۴$، مقدار $f(۵)$ کدام است؟ تجربی خارج ۹۱

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۹- اگر $(fog)(x)=-f(x)$ و $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ باشند، آن‌گاه $g(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{x}$ ۲) $\frac{۲}{x}$ ۳) x ۴) $۲x$

۶۰- اگر $f(x)=x^۲-x-۲$ و $f(g(x))=x^۲+x-۲$ باشند، آن‌گاه $(f+g)(x)$، کدام گزینه می‌تواند باشد؟ تجربی خارج ۹۰

۱) $x^۲-۱$ ۲) $x^۲+۱$ ۳) $x^۲-۲x$ ۴) $x^۲+۲x$

۶۱- اگر $f(۲x-۳)=۴x^۲-۱۴x+۱۳$ باشد، ضابطهٔ $f(x)$ برابر کدام است؟ تجربی داخل ۹۷

۱) $x^۲-x+۳$ ۲) $x^۲-۲x-۱$ ۳) $x^۲-۲x+۱$ ۴) $x^۲-x+۱$

۶۲- اگر $f(x)=۲x+۳$ و $g(f(x))=۸x^۲+۲۲x+۲۰$ باشند، ضابطهٔ تابع fog کدام است؟ ریاضی داخل ۹۲

۱) $۲x^۲-۳x+۷$ ۲) $۲x^۲-۷x+۳$ ۳) $۴x^۲-۲x+۱۳$ ۴) $۴x^۲-۴x+۱۱$

۶۳- اگر $g(x)=۲x-۱$ و $(fog)(x)=\frac{x}{x-۳}$، مقدار $f(۳)$ کدام است؟ ریاضی داخل ۹۱

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

۶۴- اگر $f(x^۲+x)=x^۴+۲x^۳+x^۲$ باشد، آن گاه $f(\sqrt{۳})$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۳ ۳) $(۳+\sqrt{۳})^۲$ ۴) $\sqrt{۳}$

gajmarket.com

۶۵- اگر برای هر x حقیقی و مخالف صفر داشته باشیم $f(x+\frac{۱}{x})=x^۳+\frac{۱}{x^۳}$، ضابطهٔ $f(x)$ برابر کدام است؟

۱) $x^۳$ ۲) $x^۳-۳x+۱$ ۳) $x^۳+۳x$ ۴) $x^۳-۳x$

۶۶- اگر $f(x-\frac{۱}{x})=x+\frac{۱}{x}+۸$، آن‌گاه $f(\sqrt{۵})$ برابر کدام عدد زیر می‌تواند باشد؟ $(x\neq ۰)$

۱) -۱۱ ۲) -۷ ۳) ۱۳ ۴) ۵

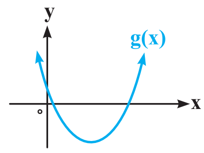
۶۷- فرض کنید $(fog)(x)=۳-x$ و $g(x)=\log_۳ x$، در این صورت ضابطهٔ $f(۲x)$ کدام است؟ + لگاریتم

۱) $۳^x-۹$ ۲) $۳-۹^x$ ۳) $۹^x-۳$ ۴) $۳^x-۳$

۶۸- اگر $f(۱-|x|)=\sqrt{x^۲-۴}$ باشد، دامنهٔ تابع f کدام است؟

۱) $(-۱,۳)$ ۲) $\mathbb{R}-(-۱,۳)$ ۳) $[-۱,+\infty)$ ۴) $(-\infty,۳]$

۶۹- اگر نمودار تابع $f(x)$ فقط در یک نقطه با طول مثبت، محور xها را قطع نماید و نمودار تابع $g(x)$ به صورت زیر باشد، معادلهٔ $f(g(x))=۰$ چند جواب دارد؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۷۰- اگر $f=\{(۳,۴),(۴,۳),(۵,۴)\}$ و $g=\{(۳,۶),(۶,۴),(۵,۴)\}$ باشند، تابع fog کدام است؟

۱) $\{\ \}$ ۲) $\{(۶,۳)\}$ ۳) $\{(۶,۳),(۵,۳)\}$ ۴) $\{(۵,۳)\}$

۷۱- اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $f=\{(x,۲x-۱),x\in A\}$ باشند، تابع $f(f(x))$ چند عضو دوتایی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۲- تابع $f=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۵),(۱,۷)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۳,۱),(a,۳),(b,۱)\}$ مفروض‌اند. اگر $(۴,۲)\in fog$ و $(۴,۱)\in gof$ باشند، دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟ ریاضی داخل ۹۰

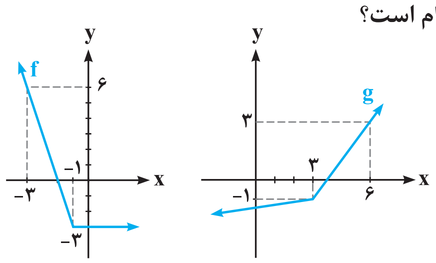
۱) $(۳,۴)$ ۲) $(۴,۳)$ ۳) $(۴,۵)$ ۴) $(۵,۴)$

۷۳- اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۲,۵),(۴,۳),(۵,۱)\}$ باشند، تابع $(f+g)o(f-g)$ کدام است؟

۱) $\{(۴,۸)\}$ ۲) $\{(-۲,۵)\}$ ۳) $\{(۲,۳)\}$ ۴) $\{(۱,۴)\}$

۷۴- با توجه به نمودار توابع f و g در شکل مقابل و تابع $y=\sqrt{۳-(gof)(x)}$، دامنهٔ y کدام است؟

۱) $(-\infty,-۳]$
۲) $[-۳,+\infty)$
۳) $[-۳,۶]$
۴) $(-\infty,۶]$



دامنهٔ توابع مرکب

IQ ترکیب کردن دو تابع رو یاد گرفتین. حالا بریم سراغ این‌که چه‌جوری دامنهٔ اونارو به دست بیاریم.

۷۵- اگر $f(x)=۲x-۱$ و $g(x)=x^۲+۳$ باشند، دامنهٔ تعریف $(gof)(x)$ کدام است؟

۱) $[\frac{۱}{۲},+\infty)$ ۲) $(-\infty,۰]$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $[۰,+\infty)$

۷۶- اگر $f(x)=\sqrt{x^۲+۵}$ و $g(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ باشند، کدام گزینه درست است؟

۱) $D_{fog}=\mathbb{R}$ ۲) $D_{fog}=[-۲,۲]$ ۳) $D_{gof}=\mathbb{R}$ ۴) $D_{gof}=[-۱,۱]$

۷۷- اگر $f(x)=\sqrt{x-۴}$ و $g(x)=\sqrt{۴-x}$ باشند، آن‌گاه دامنهٔ تعریف $(fog)(x)$ چند عدد صحیح منفی را شامل نمی‌شود؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) بی‌شمار

۷۸- اگر $f(x)=\frac{۳}{x-۲}$ و $g(x)=\frac{۱}{x}$ باشند، دامنهٔ تعریف $(fog)(x)$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{۰,\frac{۱}{۲}\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{\frac{۱}{۲}\}$ ۴) $\mathbb{R}$

۷۹- اگر $f(x)=\frac{۱}{۲+x}$ باشد، دامنهٔ تعریف تابع $(fof)(x)$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{-۲,۰\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{-\frac{۵}{۲}\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{-۲\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{-\frac{۵}{۲},-۲\}$

۸۰- اگر $f(x)=۴x^۲-۱$ و $g(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ باشند، دامنهٔ تعریف $(gof)(x)$ کدام است؟

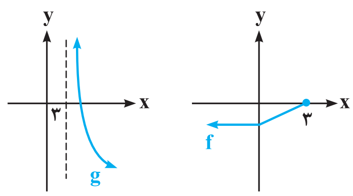
۱) $[-\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲}]$ ۲) $[-۱,۱]$ ۳) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۴) $[-۱,۱)$

۸۱- اگر $f(x)=\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^۲}$ باشند، دامنهٔ تابع gof کدام است؟ ریاضی داخل ۹۶

۱) $[۰,۱)$ ۲) $\{۰\}$

۳) $(-۱,۱)$ ۴) $\mathbb{R}-\{-۱,۱\}$

۸۲- با توجه به نمودارهای f و g، دامنهٔ gof کدام است؟



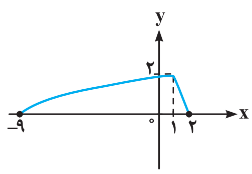
۱) $(۳,+\infty)$ ۲) $\varnothing$

۳) $(-\infty,۰]$ ۴) $(-\infty,۳]$

۸۳- برای تابع $f(x)=۱-\sqrt{x+۱}$ چه دامنه‌ای را انتخاب کنیم تا ترکیب fof قابل انجام باشد؟ تمرین کتاب درسی با تغییر

۱) $(-\infty,۱]$ ۲) $[-۱,+\infty)$ ۳) $[-۱,۳]$ ۴) $[-۱,۱]$

۸۴- اگر نمودار تابع g به صورت مقابل و $f(x)=\frac{\sqrt{۱-x}}{\sqrt{۱-x}}-۲x^۲$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ تابع $(gof)(x)$ شامل چند عدد صحیح می‌باشد؟



۱) بی‌شمار ۲) ۴

۳) ۳ ۴) ۲

۸۵- اگر $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲-۴x}$ باشند، دامنهٔ تابع gof کدام است؟ تجربی خارج ۸۵ + قدرمطلق

۱) $(۰,۸)\cup(۸,+\infty)$ ۲) $\mathbb{R}-\{۰,۸\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ۴) $(۰,+\infty)$

۸۶- اگر $f(x)=\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x}$ و $g(x)=\tan x\ ;\ |x|<\frac{\pi}{۲}$ باشند، دامنهٔ تابع $(fog)(x)$ کدام است؟ تجربی داخل ۸۷ + مثلثات

۱) $[-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴}]$ ۲) $[\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲})$ ۳) $[-\frac{\pi}{۴},۰)\cup(۰,\frac{\pi}{۴}]$ ۴) $[-۱,۰)\cup(۰,۱]$

۸۷- اگر $(fof)(x)=۳\sqrt{f(x)}-۲$ و $(gof)(x)=\frac{f(x)+۱}{f(x)-۱}$ باشند، دامنهٔ تابع $(gof)(x)$ کدام است؟

۱) $[۰,+\infty)$ ۲) $\mathbb{R}-\{۱\}$ ۳) $[۰,+\infty)-\{۱\}$ ۴) $(۰,+\infty)$

۸۸- اگر $f(x)=\begin{cases}۳+x^۲ & ;\ |x|<۴\\ ۴ & ;\ |x|>۴\end{cases}$ باشد، دامنهٔ تابع $(fof)(x)$ کدام است؟

۱) $(-۴,۴)-\{\pm۱\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{\pm۱,\pm۴\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{\pm۴\}$ ۴) $\mathbb{R}-[-۴,۴]$

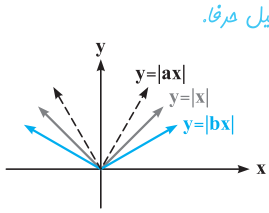
۸۹- اگر $f=\{(۱,۵),(۲,۳),(۳,۷)\}$ و $g=\{(۲,۱),(۳,۲),(۵,۱)\}$ باشند، آن‌گاه تابع $((f-۲g)oh)(x)$ با فرض $h(x)=x^۲-۲x+۴$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴

تبدیل نمودار توابع

IQ رسیدیم به یکی از بخش‌های بسیار مهم تابع که مربوط به آشنایی با قوانین انتقال و انعکاس نمودارهاس. یعنی این‌که بدونین کی باید نمودار رو به سمت راست، کی به چپ یا چه موقع‌هایی اونو به بالا یا پایین ببرین. چه وقتایی نسبت به محورهای مختصات قرینه بشه و از این قبیل حرفا.

۹۰- با توجه به شکل مقابل، کدام گزینه می‌تواند درست باشد؟



۱) $a=۳\ ,\ b=۲$ ۲) $a=-\frac{۱}{۲}\ ,\ b=\frac{۱}{۳}$

۳) $a=-۲\ ,\ b=\frac{۱}{۲}$ ۴) $a=\frac{۱}{۲}\ ,\ b=۲$

۹۱- تابع f را با ضابطهٔ $f(x)=|x-۱|+۳$ و دامنهٔ $[-۴,-۱)$ در نظر بگیرید. در این صورت برد تابع کدام است؟

۱) $[-۵,۸)$ ۲) $[-۴,-۱)$ ۳) $[۳,۸]$ ۴) $(۵,۸]$

۹۲- مساحت زیر نمودار تابع $f(x)=|x|+۲$ با دامنهٔ $[-۱,۳]$ و بالای محور طول‌ها کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

gajmarket.com

پاسخ‌های تشریحی

۱ **۴** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

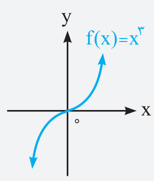
توابع چند جمله‌ای

تعریف: هر تابع به فرم $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ را که در آن $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1$ و a_0 اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ باشد، یک **تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n** می‌نامند.

- دامنهٔ توابع چندجمله‌ای، مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

به عنوان مثال توابعی مانند $y=2x+4$ ، $y=-4x^2+x-\frac{1}{3}$ ، $y=\sqrt{3}x^3-\frac{2}{5}x$ و $y=10x^5-2x^3+\sqrt{2}x^2$ توابع چندجمله‌ای هستند که به ترتیب از درجهٔ ۱، ۲، ۳ و ۵ می‌باشند.

- در سال‌های گذشته با توابع خطی $(y=ax+b)$ و توابع درجه دوم $(y=ax^2+bx+c\,(a\neq 0))$ آشنا شدید که هر یک از آن‌ها تابع چندجمله‌ای هستند.



- حال با تابع چندجمله‌ای با ضابطهٔ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d;(a\neq 0)$ که یک تابع درجه ۳ است، آشنا می‌شوید.

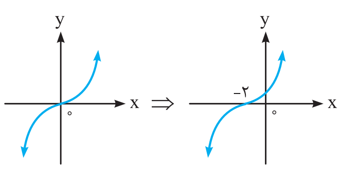
در این‌جا به‌طور خاص، نمودار تابع $f(x)=x^3$ را نشان می‌دهیم:

$$D_f=\mathbb{R} \quad , \quad R_f=\mathbb{R}$$

می‌دانیم اعداد بین صفر و یک، هرچه‌قدر توانشان بزرگ‌تر شود، کوچک‌تر می‌شوند، یعنی اگر $0<x<1$ باشد، آن‌گاه $x^3<x^2$ است. حال با توجه به نمودار، چون در بازهٔ $0<x<p$ ، نمودار تابع f پایین‌تر از نمودار تابع g قرار گرفته است، پس با توجه به ضابطه‌های آن‌ها یعنی $f(x)=x^n$ و $g(x)=x^m$ ، نتیجه می‌گیریم گزینهٔ (۴) می‌تواند درست باشد، یعنی: $m=2 \ , \ n=3 \ , \ p=1$

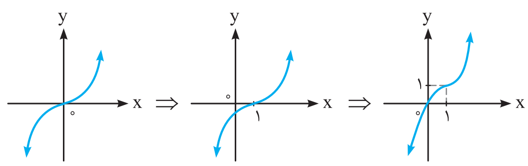
۲ **۳** همهٔ موارد را بررسی می‌کنیم:

الف)



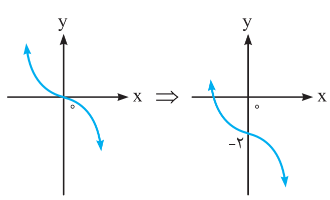
$y=x^3 \Rightarrow y=(x+2)^3$

ب)



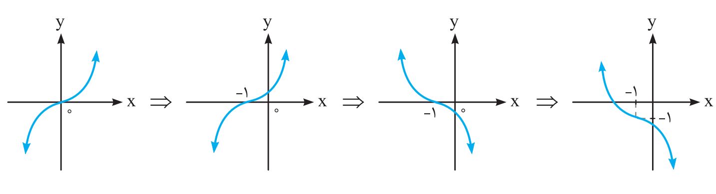
$y=x^3 \Rightarrow y=(x-1)^3 \Rightarrow y=(x-1)^3+1$

پ)



$y=-x^3 \Rightarrow y=-x^3-2$

ت)

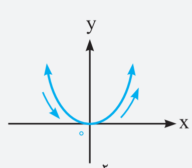


$y=x^3 \Rightarrow y=(x+1)^3 \Rightarrow y=-(x+1)^3 \Rightarrow y=-(x+1)^3-1$

همان‌طور که می‌بینید موارد (ب) و (ت) درست هستند.

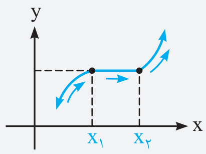
۳ **۳** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

توابع صعودی و نزولی



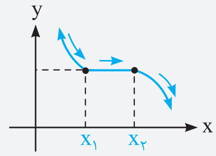
نمودار تابع $f(x)=x^2$ را ببینید. در بازهٔ $[0,+\infty)$ با افزایش مقادیر x ، مقادیر $f(x)$ هم افزایش می‌یابند. در این حالت می‌گوییم تابع در حال صعود است. اما حالا این تابع را روی بازهٔ $(-\infty,0]$ در نظر بگیرید. در این حالت با افزایش مقادیر x ، مقادیر $f(x)$ کاهش می‌یابند. در این حالت می‌گوییم تابع در حال نزول است.

- بـه‌طور کلـی، اگـر D بـازه‌ای در دامنـهٔ تـابع f باشـد، می‌گـوییم تـابع f در بـازهٔ D **صـعودی** اسـت، هرگـاه بـرای هر $x_۱, x_۲ \in D$:



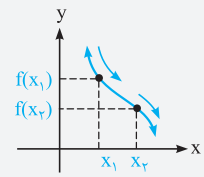
$$\boxed{x_۲ > x_۱ \Rightarrow f(x_۲) \geq f(x_۱)}$$

هم‌چنین می‌گوییم تابع f در بازهٔ D **نزولی** است، هرگاه برای هر $x_۱, x_۲ \in D$:

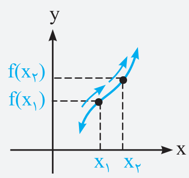


$$\boxed{x_۲ > x_۱ \Rightarrow f(x_۲) \leq f(x_۱)}$$

در دو شکل بالا می‌بینید که تابع صعودی یا تابع نزولی می‌تواند نقاطی داشته باشد که y های یکسانی دارند. حالا اگر نمودار تـابع، طـوری باشـد کـه بـا افزایش x، مقادیر $f(x)$ مدام در حال افزایش یا مدام در حال کاهش باشند، در این صورت می‌گوییم **تابع اکیداً صعودی** یا **اکیداً نزولی** است. ببینید:



f اکیداً نزولی : $\boxed{x_۲ > x_۱ \Rightarrow f(x_۲) < f(x_۱)}$

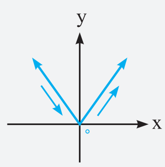


f اکیداً صعودی : $\boxed{x_۲ > x_۱ \Rightarrow f(x_۲) > f(x_۱)}$

- توابع **ثابت**، هم صعودی‌اند و هم نزولی (آن‌ها جزء توابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی نیستند.).
- توابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی را توابع **اکیداً یکنوا** و توابع صعودی و نزولی را توابع **یکنوا** می‌نامند.
- اگر تابع f، نه صعودی باشد و نه نزولی، می‌گوییم تابع **غیریکنوا** است.

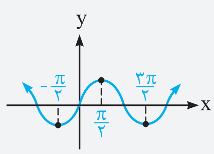
چندمثال

① تابع $y = |x|$ روی بازهٔ $(-\infty, ۰]$ اکیداً نزولی و روی بازهٔ $[۰, +\infty)$ اکیداً صعودی است.



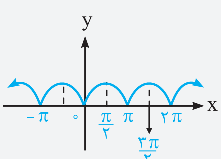
$y=|x|$

② تـابع $y = \sin x$ روی بـازهٔ $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ اکیـداً صـعودی و روی بـازهٔ $[\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}]$ اکیـداً نزولی است.



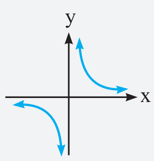
$y=\sin x$

③ تابع $y = |\sin x|$ روی بازهٔ $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ اکیداً صعودی و روی بازهٔ $[\frac{\pi}{۲}, \pi]$ اکیداً نزولـی و روی بازهٔ $[۰, \pi]$ نه صعودی است و نه نزولی.



$y=|\sin x|$

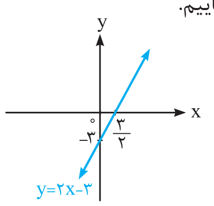
④ تابع $y = \frac{۱}{x}$ روی بازه‌های $(-\infty, ۰)$ و $(۰, +\infty)$ اکیداً نزولی است اما روی دامنـه‌اش، یعنی $\mathbb{R} - \{۰\}$ نه صعودی است و نه نزولی.



$y=\frac{۱}{x}$

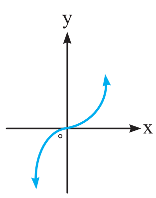
نمودار تابع داده‌شده در هر مورد را رسم می‌کنیم و از روی نمودار، وضعیت یکنوایی تابع را مشخص می‌نماییم.

الف) $f(x) = ۲x - ۳$:



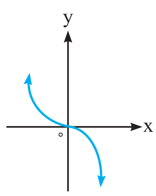
$\Rightarrow$ تابع f اکیداً صعودی است.

ب) $g(x) = ۱ - x^۳$:



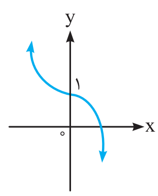
$y=x^۳$

$\Rightarrow$



$y=-x^۳$

$\Rightarrow$

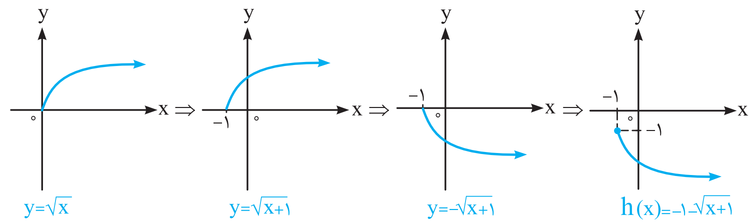


$g(x)=۱-x^۳$

تابع g اکیداً نزولی است.

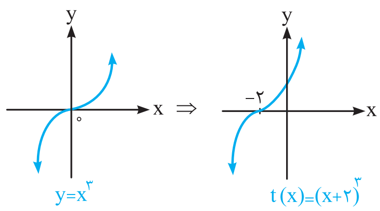
gajmarket.com

پ) $h(x)=-۱-\sqrt{x+۱}$:



تابع h اکیداً نزولی است.

ت) $t(x)=(x+۲)^۳$:



$\Rightarrow$ تابع t اکیداً صعودی است.

همان‌طور که مشاهده می‌کنید توابع $g(x)$ و $h(x)$ اکیداً نزولی هستند.

۴ | ۱ از روی $f(x)=x^۲+\frac{۱}{x^۲}$، ضابطهٔ $f(\sqrt{x})$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^۲+\frac{۱}{(\sqrt{x})^۲}\Rightarrow f(\sqrt{x})=x+\frac{۱}{x}\Rightarrow (f(\sqrt{x}))^۲=\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۲=x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۲$$

بنابراین $(f(\sqrt{x}))^۲-f(x)$ برابر با ۲ می‌شود، یعنی تابع ثابت است، پس هم صعودی و هم نزولی است.

۵ | ۴ همان‌طور که می‌بینید در گزینهٔ (۴)، وقتی $x\in[-۱,۰)$ است، نمودار تابع در حال صعود است و بعد در $x=۰$ یک نزول رخ می‌دهد و y به ۱- می‌رسد و وقتی $x\in[۰,۱)$ است، دوباره شاهد روند صعود نمودار تابع هستیم.

۶ | ۳ نمودار تابع $f(x)=|x-۱|+|x+۳|$ را رسم می‌کنیم:

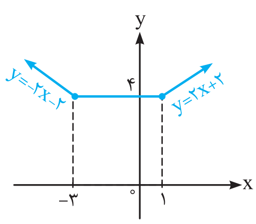
اگر $x<-۳$ باشد، آن‌گاه: $f(x)=(-x+۱)+(-x-۳)=-۲x-۲$

اگر $-۳\le x\le ۱$ باشد، آن‌گاه: $f(x)=(-x+۱)+(x+۳)=۴$

اگر $x>۱$ باشد، آن‌گاه: $f(x)=(x-۱)+(x+۳)=۲x+۲$

بنابراین داریم:

$$f(x)=\begin{cases}-۲x-۲ & ; \ x<-۳\\ ۴ & ; \ -۳\le x\le ۱\\ ۲x+۲ & ; \ x>۱\end{cases}\Rightarrow$$



حال برویم سراغ موارد داده‌شده:

الف) تابع f در بازهٔ $I_۱=(-\infty,-۳]$، اکیداً نزولی است.

ب) تابع f در بازهٔ $I_۲=(۱,۱۰]$، اکیداً صعودی است.

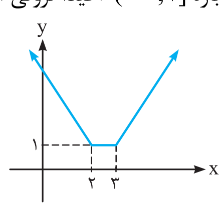
پ) تابع f در بازهٔ $I_۳=(۰,+\infty)$، صعودی است.

ت) تابع f در بازهٔ $I_۴=\left[\frac{۵}{۲},\frac{۹}{۲}\right)$، اکیداً صعودی است.

همان‌طور که می‌بینید تابع f در بازه‌های $I_۲$ و $I_۴$ اکیداً صعودی است.

۷ | ۱ با رسم نمودار تابع f متوجه می‌شویم که این تابع در بازهٔ $(-\infty,۲]$ اکیداً نزولی است و ضابطهٔ آن به صورت $f(x)=-۲x+۵$ است. ببینید:

$$f(x)=\begin{cases}-(x-۲)-(x-۳)=-۲x+۵ & ; \ x\le ۲\\ (x-۲)-(x-۳)=۱ & ; \ ۲<x<۳\\ (x-۲)+(x-۳)=۲x-۵ & ; \ x\ge ۳\end{cases}\Rightarrow$$



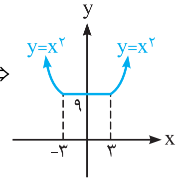
حال برای تعیین تعداد نقاط مشترک تابع f و تابع $g(x)=۲x^۲-x-۱۰$ می‌توان نوشت:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow -۲x+۵=۲x^۲-x-۱۰\Rightarrow ۲x^۲+x-۱۵=۰\xrightarrow{\Delta=۱۲۱}\begin{cases}x_۱=\frac{-۱+\sqrt{۱۲۱}}{۴}=\frac{۵}{۲}\notin(-\infty,۲] \ \text{غیرقابل قبول}\\ x_۲=\frac{-۱-\sqrt{۱۲۱}}{۴}=-۳\in(-\infty,۲] \ \text{قابل قبول}\end{cases}$$

در نتیجه یک نقطهٔ مشترک دارند.

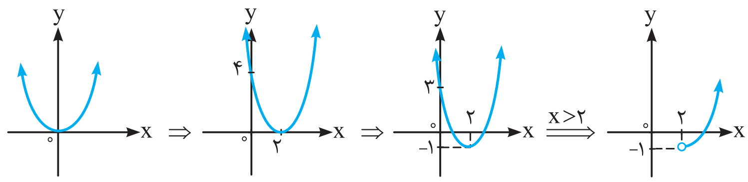
۸ **۴** ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}x^۲ & ; x^۲\geq ۹\\ ۹ & ; x^۲<۹\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^۲ & ; |x|\geq ۳\\ ۹ & ; |x|<۳\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^۲ & ; x\leq -۳ \text{ یا } x\geq ۳\\ ۹ & ; -۳<x<۳\end{cases}\Rightarrow$$

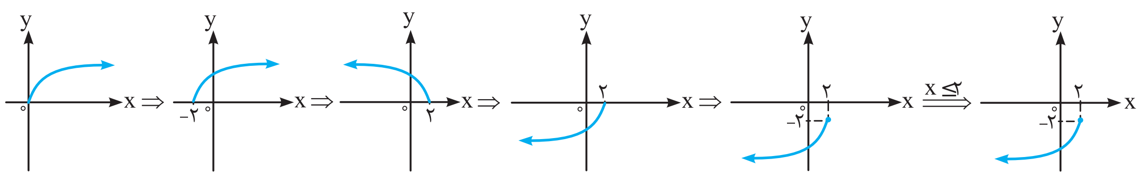


در نتیجه بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع روی آن صعودی است، بازهٔ $[-۳,+\infty)$ است (حواستان باشد که تابع در بازهٔ $[۳,+\infty)$، اکیداً صعودی است.).

۹ **۲** نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}(x-۲)^۲-۱ & ; x>۲\\ -۲-\sqrt{۲-x} & ; x\leq ۲\end{cases}$ را رسم می‌کنیم:

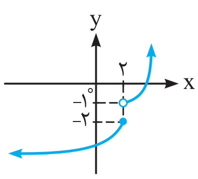


$y=x^۲$ $\quad$ $y=(x-۲)^۲$ $\quad$ $y=(x-۲)^۲-۱$ $\quad$ نمودار ضابطهٔ بالایی تابع f



$y=\sqrt{x}$ $\quad$ $y=\sqrt{۲+x}$ $\quad$ $y=\sqrt{۲-x}$ $\quad$ $y=-\sqrt{۲-x}$ $\quad$ $y=-۲-\sqrt{۲-x}$ $\quad$ نمودار ضابطهٔ پایینی تابع f

بنابراین نمودار تابع f، مطابق شکل مقابل می‌باشد و همان‌طور که می‌بینید این تابع در دامنه‌اش، اکیداًصعودی است.



۱۰ **۲** همهٔ موارد را بررسی می‌کنیم:

الف) تابع $y=x\cos x$ اکیداً صعودی نیست، زیرا با انتخاب $x=۰$ و $x=\frac{\pi}{۲}$ نتیجه می‌گیریم:

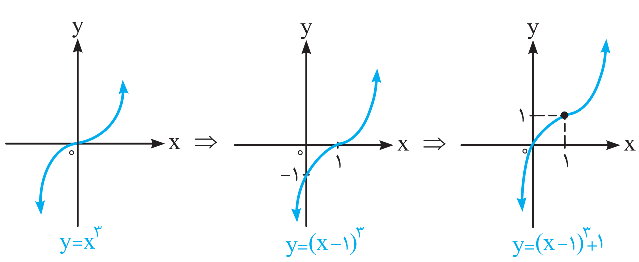
$$\begin{cases}y(۰)=۰\times\cos(۰)=۰\times ۱=۰\\ y(\frac{\pi}{۲})=\frac{\pi}{۲}\times\cos\frac{\pi}{۲}=\frac{\pi}{۲}\times ۰=۰\end{cases}$$

همان‌طور که می‌بینید با وجود این‌که $\frac{\pi}{۲}>۰$ است، اما $y(۰)=y(\frac{\pi}{۲})$ می‌باشد و در نتیجه تابع فوق، اکیداً صعودی نیست.

ب) در مورد تابع $y=x^۳-۳x^۲+۳x$ می‌توان نوشت:

$$y=\underbrace{x^۳-۳x^۲+۳x-۱}+۱=(x-۱)^۳+۱$$

حال نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



همان‌طور که می‌بینید این تابع، اکیداً صعودی است.

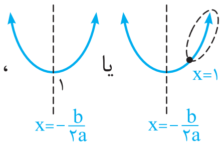
پ) در مورد تابع $y=\frac{۲x^۲}{x^۲+۱}$ هم می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}x=-۱ \Rightarrow y(-۱)=\frac{۲(-۱)^۲}{(-۱)^۲+۱}=\frac{۲}{۲}=۱\\ x=۱ \Rightarrow y(۱)=\frac{۲(۱)^۲}{(۱)^۲+۱}=\frac{۲}{۲}=۱\end{cases}$$

در این‌جا هم با وجود این‌که $۱>-۱$ است، اما $y(-۱)=y(۱)$ می‌باشد و در نتیجه تابع مورد نظر، اکیداً صعودی نیست.

gajmarket.com

۱۱ | ۱ اول این‌که باید ضریب x^2 مثبت باشد تا تابع بتواند در بازهٔ $[1,+\infty)$ صعودی باشد، پس $a-2>0$ یا $a>2$. بعد باید محور تقارن سهمی (یعنی $x=-\frac{b}{2a}$)، سمت چپ نقطه به طول $x=1$ و یا روی آن قرار گیرد، یعنی



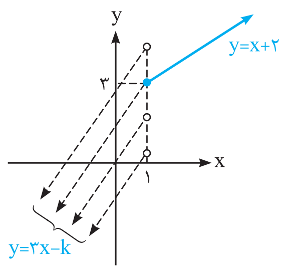
، پس:

$$x=\frac{-(-1)}{2(a-2)}=\frac{1}{2a-4}\le 1 \xRightarrow{a>2} 2a-4\ge 1 \Rightarrow 2a\ge 5\Rightarrow a\ge \frac{5}{2}$$

در نتیجه اشتراک بین دو محدودهٔ به‌دست آمده برابر $a\ge\frac{5}{2}$ است.

۱۲ | ۲ با رسم تقریبی نمودار تابع، می‌توانیم به خوبی آن را تحلیل کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}x+2 \ ; \ x\ge 1\\ 3x-k \ ; \ x<1\end{cases}\Rightarrow$$



همان‌طور که می‌بینید به ازای kهای مختلف، نمودار خط $y=3x-k$ بالا یا پایین می‌رود. حال برای این‌که f، تابعی صعودی باشد، باید در $x=1$ مقدار $3x-k$ کوچک‌تر یا مساوی با مقدار $x+2$ در همین نقطه شود، یعنی این‌که $3(1)-k\le 1+2$، پس $k\ge 0$.

۱۳ | ۱ داریم $f(2a-3)-f(a^2-2a)>0$، پس $f(2a-3)>f(a^2-2a)$ و چون f تابعی اکیداً نزولی است، داریم: $2a-3<a^2-2a$، بنابراین:

$$a^2-4a+3>0\Rightarrow (a-3)(a-1)>0 \xRightarrow{\text{تعیین علامت}} a<1 \ \text{یا}\ a>3 \Rightarrow a\in\mathbb{R}-[1,3]$$

۱۴ | ۱ با توجه به این‌که $f(x)=\frac{1}{\sqrt{g(|x-2|)-g(|x+3|)}}$ است، پس باید:

$$g(|x-2|)-g(|x+3|)>0\Rightarrow g(|x-2|)>g(|x+3|) \quad (*)$$

از آن‌جا که g تابعی اکیداً صعودی است، پس از نامساوی (*) نتیجه می‌گیریم:

$$|x-2|>|x+3| \xRightarrow{\text{توان ۲}} (x-2)^2>(x+3)^2 \Rightarrow \cancel{x^2}-4x+4>\cancel{x^2}+6x+9\Rightarrow 10x<-5\Rightarrow x<-\frac{1}{2}\Rightarrow D_f=(-\infty,-0.5)$$

۱۵ | ۴ در یک تابع صعودی، اگر $x_2>x_1$ باشد، آن‌گاه $f(x_2)\ge f(x_1)$ می‌شود. در این‌جا چون $\underbrace{a^2+2}_{\text{مثبت}}>\underbrace{-1-c^4}_{\text{منفی}}$، پس برای صعودی بودن تابع f، لازم است که $f(a^2+2)\ge f(-1-c^4)$. بنابراین:

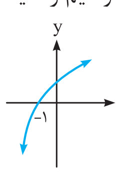
$$3b-1\ge b+6\Rightarrow 2b\ge 7\Rightarrow b\ge\frac{7}{2}\ \text{یا}\ b\in[3.5,+\infty)$$

۱۶ | ۳ با حرف‌هایی که زده‌شده، می‌توان نتیجه گرفت f + g اکیداً صعودی است، زیرا:

$$x_1<x_2:\begin{cases} f\ \text{اکیداً صعودی} \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\\ g\ \text{اکیداً صعودی} \Rightarrow g(x_1)<g(x_2)\end{cases} \xRightarrow{\text{جمع}} f(x_1)+g(x_1)<f(x_2)+g(x_2)$$

اما در مورد f − g وضعیت یکنوایی نامشخص می‌ماند، زیرا اگر از روش بالا عمل کنیم به نتیجهٔ خاصی نخواهیم رسید! (طرفین دو نامساوی هم‌جهت را نمی‌توان از هم کم کرد.)

۱۷ | ۱ از آن‌جا که $f(-1)=0$ و f تابعی اکیداً صعودی است، می‌توانیم نمودار آن را به صورت کلی



درنظر بگیریم. بنابراین برای تعیین دامنهٔ تابع داده‌شده، باید $\frac{xf(x)}{-1-x^2}\ge 0$، در نتیجه:

$$\frac{xf(x)}{-1-x^2}\ge 0 \xRightarrow{-1-x^2<0} xf(x)\le 0$$

با توجه به نمودار کلی تابع f، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x<-1\Rightarrow f(x)<0\Rightarrow xf(x)>0 & \text{غیرقابل قبول}\\ -1\le x\le 0\Rightarrow f(x)\ge 0\Rightarrow xf(x)\le 0 & \text{قابل قبول}\\ x>0\Rightarrow f(x)>0\Rightarrow xf(x)>0 & \text{غیرقابل قبول}\end{cases}\Rightarrow D_y=[-1,0]$$

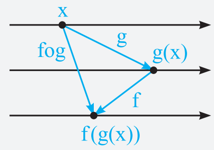
۱۸ | **۲** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

ترکیب توابع

ترکیب دو تابع f و g، تابعی است که آن را با نماد fog یا gof نشان می‌دهیم و به صورت $(fog)(x)=f(g(x))$ یا $fog:x\to f(g(x))$ تعریف می‌کنیم. (همچنین $(gof)(x)=g(f(x))$ یا $gof:x\to g(f(x))$) در مورد تابع $f(g(x))$ می‌توان گفت که x را به عنوان ورودی به تابع g می‌دهیم تا خروجی $g(x)$ تولید شود و بعد $g(x)$ را به عنوان ورودی به تابع f می‌دهیم تا خروجی $f(g(x))$ به دست آید، ببینید:

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$$

$$f(g(x))=(fog)(x)$$



توجه ترکیب fog زمانی امکان‌پذیر است که $D_f\bigcap R_g\neq\varnothing$ باشد و ترکیب gof زمانی امکان‌پذیر است که $D_g\bigcap R_f\neq\varnothing$، مثلاً در مورد دو تابع $g(x)=\sqrt{x}$ و $f(x)=-x^{۲}-۲$، ترکیب gof امکان‌پذیر نیست، به این خاطر که R_f با D_g هیچ اشتراکی ندارد. $R_f=(-\infty,-۲]$ و $D_g=[۰,+\infty)$ می‌باشد، پس $R_f\bigcap D_g$ تهی است.

نکته در حالت کلی، ترکیب توابع، خاصیت جابه‌جایی ندارد، یعنی $fog\neq gof$.

مثال **در هریک از موارد زیر، ضابطه‌های $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$ و در صورت امکان $(fog)(۰)$ را به دست آورید.**

الف) $f(x)=\cos x$ و $g(x)=\sqrt{x+۱}$ **ب) $f(x)=x^{۲}-۳$ و $g(x)=\sqrt{x-۱}$**

پاسخ

الف)
$$\begin{cases}f(x)=\cos x\\ g(x)=\sqrt{x+۱}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x+۱})=\cos\sqrt{x+۱}\Rightarrow(fog)(۰)=f(g(۰))=\cos(۱)\\ (gof)(x)=g(f(x))=g(\cos x)=\sqrt{\cos x+۱}\end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases}f(x)=x^{۲}-۳\\ g(x)=\sqrt{x-۱}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x-۱})=(\sqrt{x-۱})^{۲}-۳\Rightarrow f(g(۰))\ \text{تعریف‌نشده:}\\ (gof)(x)=g(f(x))=g(x^{۲}-۳)=\sqrt{(x^{۲}-۳)-۱}=\sqrt{x^{۲}-۴}\end{cases}$$

مثال **اگر $f(x)=x^{۲}+۴x+۱$ و $g(x)=\left[\frac{x}{۲}\right]$ باشند، حاصل $(gof)(-۲+\sqrt{۵})$ کدام است؟ ([ ] علامت جزءصحیح است.)**

۱) ۴   ۲) ۳   ۳) ۲   ۴) ۱

پاسخ می‌توان نوشت:

$$f(x)=x^{۲}+۴x+۱=(x+۲)^{۲}-۳\Rightarrow f(-۲+\sqrt{۵})=((-۲+\sqrt{۵})+۲)^{۲}-۳=(\sqrt{۵})^{۲}-۳=۵-۳=۲\quad(*)$$

$$\Rightarrow(gof)(-۲+\sqrt{۵})=g(f(-۲+\sqrt{۵}))\xrightarrow{(*)}g(۲)=\left[\frac{۲}{۲}\right]=[۱]=۱\Rightarrow$$ (گزینهٔ ۴)

مثال **اگر $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ و $fog(x)=\frac{x^{۲}+۲}{x^{۲}+۱}$ باشند، آن‌گاه مقدار $g(۱)$ کدام است؟**

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

پاسخ با توجه به معلومات مسأله، داریم:

$$f(g(x))=\frac{g(x)+۱}{g(x)-۱}=\frac{x^{۲}+۲}{x^{۲}+۱}\xrightarrow{x=۱}\frac{g(۱)+۱}{g(۱)-۱}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۲g(۱)+۲=۳g(۱)-۳\Rightarrow g(۱)=۵\Rightarrow$$ (گزینهٔ ۴)

مثال **اگر $f=\{(-۱,۲),(۲,۳),(۳,۳)\}$ و $g=\{(۲,۴),(۳,۰),(-۱,۲)\}$ باشند، آن‌گاه حاصل $f+(fog)$ کدام است؟**

۱) $\{(-۱,۵)\}$ ۲) $\{(۱,۴)\}$ ۳) $\{(-۱,۵),(۳,۴)\}$ ۴) $\{(-۱,۴),(۳,۲)\}$

پاسخ برای این‌که تابع fog را بسازیم، باید xهای g را برداریم و مقدار $g(x)$ را به ازای آن‌ها تعیین کنیم و بعد مقدار f را به ازای $g(x)$های پیداشده، حساب کنیم:

$x=۲\Rightarrow g(۲)=۴\Rightarrow f(g(۲))=f(۴)\Rightarrow$ وجود ندارد.

$x=۳\Rightarrow g(۳)=۰\Rightarrow f(g(۳))=f(۰)\Rightarrow$ وجود ندارد.

$x=-۱\Rightarrow g(-۱)=۲\Rightarrow f(g(-۱))=f(۲)=۳$

gajmarket.com

بنابراین $fog=\{(-۱,۳)\}$. حال برای تشکیل $f+(fog)$، ابتدا دامنهٔ این تابع را به دست می‌آوریم:

$$D_{f+fog}=D_f\cap D_{fog}=\{-۱,۲,۳\}\cap\{-۱\}=\{-۱\}$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$x=-۱\Rightarrow f(-۱)+(fog)(-۱)=۲+۳=۵\Rightarrow f+(fog)=\{(-۱,۵)\}\Rightarrow \text{(گزینهٔ ۱)}$$

داریم $N(d)=۱۰d^۲-۲۰d+۳۰۰$ و $d(t)=۶t+۲$، پس اگر $t=۲$ باشد، آن‌گاه:

$$d(۲)=۶(۲)+۲=۱۴\Rightarrow N(d)=N(۱۴)=۱۰(۱۴)^۲-۲۰(۱۴)+۳۰۰=۱۹۶۰-۲۸۰+۳۰۰=۱۹۸۰$$

۱۹ **۱** با توجه به جدول‌های ارائه‌شده، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}x=۲\Rightarrow g(۲)=۱\Rightarrow (fog)(۲)=f(g(۲))=f(۱)=-۲\\ x=-۱\Rightarrow g(-۱)=۱\Rightarrow (gog)(-۱)=g(g(-۱))=g(۱)=\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow (fog)(۲)-(gog)(-۱)=-۲-\frac{۱}{۲}=-\frac{۵}{۲}=-۲/۵$$

۲۰ **۱** ابتدا $f(-۱)$ و بعد $f(f(-۱))$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{۲-x-x^۲}\Rightarrow f(-۱)=\sqrt{۲+۱-۱}=\sqrt{۲}\quad (*)$$

بنابراین:

$$f(f(-۱))\overset{(*)}{=\!=}f(\sqrt{۲})=\sqrt{۲-\sqrt{۲}-(\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{۲-\sqrt{۲}-۲}=\sqrt{-\sqrt{۲}}$$

این‌جوری که نمی‌شه! زیر رادیکال منفی شده! پس $f(f(-۱))$ تعریف نمی‌شه.

۲۱ **۴** ابتدا $f(۵)$، سپس $f(f(۵))$ را حساب می‌کنیم:

$$f(۵)=۵-\sqrt{۵+۴}=۵-۳=۲\Rightarrow f(f(۵))=f(۲)=۲(۲)+۳=۷$$

حال یک‌بار هم $f(۱)$ و بعدش $f(f(۱))$ را حساب می‌کنیم:

$$f(۱)=۲(۱)+۳=۵\Rightarrow f(f(۱))=f(۵)=۵-\sqrt{۵+۴}=۵-\sqrt{۹}=۵-۳=۲$$

بنابراین $f(f(۵))+f(f(۱))=۷+۲=۹$ است.

۲۲ **۲** براساس داده‌های مسأله، می‌توان نوشت:

$$f(۱)=۰\Rightarrow g(f(۱))=g(۰)$$

با توجه به نمودار تابع g، برای به دست آوردن مقدار $g(۰)$، باید معادله خط گذرنده از نقاط $(۱,۴)$ و $(-۲,۱)$ را بنویسیم:

$$\text{شیب خط}: \frac{۴-۱}{۱-(-۲)}=\frac{۳}{۳}=۱\Rightarrow \text{معادلهٔ خط}: y-۱=۱(x-(-۲))\Rightarrow y-۱=x+۲\Rightarrow y=x+۳\Rightarrow g(۰)=۰+۳=۳$$

از طرفی داریم:

$$g(-۲)=۱\Rightarrow h(g(-۲))=h(۱)=۲-۳(۱)=-۱\Rightarrow f(h(g(-۲)))=f(-۱)=۲$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$۲(gof)(۱)-(fohog)(-۲)=۲g(f(۱))-f(h(g(-۲)))=۲(۳)-۲=۴$$

۲۳ **۴** با توجه به شکل داده‌شده، می‌توان نوشت:

$$g(x)=۳x-۱\xRightarrow{x=۰/۵}g(۰/۵)=۳(۰/۵)-۱=۱/۵-۱=۰/۵=\frac{۱}{۲}=A$$

$$f(g(x))=۲g^۲(x)-g(x)+۱\xRightarrow{g(۰/۵)=۰/۵=\frac{۱}{۲}}f(g(۰/۵))=۲g^۲(۰/۵)-g(۰/۵)+۱=۲(\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۱}{۲}+۱$$

$$=۲(\frac{۱}{۴})-\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}+۱=۱=B$$

از طرفی به ازای $x=C$ داریم:

$$g(x)=۳x-۱\Rightarrow g(C)=۳C-۱=۵\Rightarrow ۳C=۶\Rightarrow C=۲$$

بنابراین $\frac{A-B}{C}=\frac{\frac{۱}{۲}-۱}{۲}=\frac{-\frac{۱}{۲}}{۲}=-\frac{۱}{۴}$ می‌باشد.

۲۴ **۴** همهٔ موارد را بررسی می‌کنیم:

الف) نادرست است، زیرا اگر $f(x)=x^۲-۹$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۹}$ باشند، آن‌گاه:

$$g(۴)=\sqrt{۴^۲-۹}=\sqrt{۱۶-۹}=\sqrt{۷}\Rightarrow f(g(۴))=f(\sqrt{۷})=(\sqrt{۷})^۲-۹=۷-۹=-۲\neq ۲$$

ب) نادرست است، زیرا اگر $f(x)=x$ و $g(x)=\frac{۱}{x}$ باشند، آن‌گاه:

$$\begin{cases}(fog)(x)=f(g(x))=f(\frac{۱}{x})=\frac{۱}{x}\\ (gof)(x)=g(f(x))=g(x)=\frac{۱}{x}\end{cases}$$

از طرفی $D_{fog}=D_{gof}=\mathbb{R}-\{۰\}$، پس $fog=gof$ است.

پ) نادرست است، زیرا با داشتن $f(۳)=۶$ و $g(۴)=۳$، داریم: $(fog)(۴)=f(g(۴))=f(۳)=۶\neq ۱۸$

ت) درست است، زیرا اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۳x+۱$ باشند، آن‌گاه: $g(۵)=۳(۵)+۱=۱۶\Rightarrow (fog)(۵)=f(g(۵))=f(۱۶)=\sqrt{۱۶}=۴$

از طرفی $g(۱)=۳(۱)+۱=۴$، پس $(fog)(۵)=g(۱)$ است. بنابراین سه تا از موارد فوق، نادرست‌اند.

۲۵ **۱** با توجه به معلومات مسأله، داریم: $g(x)=x^۲+۲x+۱=(x+۱)^۲\Rightarrow g(۱-\sqrt{۲})=((۱-\sqrt{۲})+۱)^۲=(۲-\sqrt{۲})^۲=۶-۴\sqrt{۲}$

چون $f(x)=|x|$، پس:

$$f(g(۱-\sqrt{۲}))=f(۶-۴\sqrt{۲})=|\underbrace{۶-۴\sqrt{۲}}_{\text{مثبت}}|=۶-۴\sqrt{۲}$$

و به همین ترتیب:

$$f(۱-\sqrt{۲})=|\underbrace{۱-\sqrt{۲}}_{\text{منفی}}|=\sqrt{۲}-۱\Rightarrow g(f(۱-\sqrt{۲}))=g(\sqrt{۲}-۱)=((\sqrt{۲}-۱)+۱)^۲=(\sqrt{۲})^۲=۲$$

بنابراین:

$$(fog)(۱-\sqrt{۲})-(gof)(۱-\sqrt{۲})=۶-۴\sqrt{۲}-۲=۴-۴\sqrt{۲}=۴(۱-\sqrt{۲})$$

۲۶ **۴** با توجه به توابع $f(x)=\sin(\frac{\pi x}{۶})$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲+۲x-۴}$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} f(۳)=\sin(\frac{۳\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۲}=۱\Rightarrow (gof)(۳)=g(f(۳))=g(۱)=\frac{۱}{(۱)^۲+۲(۱)-۴}=\frac{۱}{-۱}=-۱ \\ g(۱)=\frac{۱}{(۱)^۲+۲(۱)-۴}=-۱\Rightarrow (fog)(۱)=f(g(۱))=f(-۱)=\sin(-\frac{\pi}{۶})=-\sin\frac{\pi}{۶}=-\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow \frac{۱-(gof)(۳)}{(fog)(۱)}=\frac{۱-(-۱)}{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۲}{-\frac{۱}{۲}}=-۴$$

۲۷ **۲** با توجه به نمودار توابع f و g، نتیجه می‌گیریم $f(۳)=۵$، $g(۵)=۰$ و $g(۰)=۴$، بنابراین:

$$g(g(\underbrace{f(۳)}_{۵}))=g(\underbrace{g(۵)}_{۰})=g(۰)=۴$$

۲۸ **۴** با توجه به معلومات مسأله، نتیجه می‌گیریم که نقطهٔ $(۱,۰)$، هم روی نمودار تابع f و هم روی نمودار تابع g قرار دارد، یعنی:

$$\begin{cases} f(x)=x^۲+ax-۳b\Rightarrow f(۱)=۱+a-۳b=۰ \\ g(x)=b-x\Rightarrow g(۱)=b-۱=۰\Rightarrow b=۱\end{cases}\Rightarrow ۱+a-۳(۱)=۰\Rightarrow a=۲$$

در نتیجه $f(x)=x^۲+۲x-۳$ و $g(x)=۱-x$ است و داریم:

$$(fog)(۲)=f(g(۲))\xlongequal{g(۲)=۱-۲=-۱}f(-۱)=(-۱)^۲+۲(-۱)-۳=۱-۲-۳=-۴$$

۲۹ **۴** فرض کنیم $f(x)=ax+b$ و $a\neq ۰$. چون $f(۰)=-۱$ است، پس $b=-۱$ می‌باشد، بنابراین:

$$f(x)=ax-۱\Rightarrow f(-۲)=-۲a-۱\Rightarrow f(f(-۲))=f(-۲a-۱)=a(-۲a-۱)-۱=-۱\Rightarrow -۲a^۲-a=۰\Rightarrow -a(۲a+۱)=۰\xRightarrow{a\neq ۰}a=-\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه $f(x)=-\frac{۱}{۲}x-۱$ است و داریم: $f(-۱)=-\frac{۱}{۲}(-۱)-۱=\frac{۱}{۲}-۱=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow f(f(-۱))=f(-\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۲}(-\frac{۱}{۲})-۱=\frac{۱}{۴}-۱=-\frac{۳}{۴}$

۳۰ **۳** وقتی $(fof)(x)$، تابع درجه یک است، یعنی حتماً f، درجه یک بوده. پس می‌توان فرض کرد $f(x)=ax+b$ است، در نتیجه:

$$f(f(x))=f(ax+b)=a(ax+b)+b=a^۲x+ab+b=۹x+۱۰\Rightarrow\begin{cases}a^۲=۹\\ab+b=۱۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۳\Rightarrow ۳b+b=۱۰\Rightarrow ۴b=۱۰\Rightarrow b=\frac{۵}{۲}\\a=-۳\Rightarrow -۳b+b=۱۰\Rightarrow -۲b=۱۰\Rightarrow b=-۵\end{cases}$$

خلاصه این که $f(x)=۳x+\frac{۵}{۲}$ یا $f(x)=-۳x-۵$ است، پس $f(-۱)$ مساوی $-\frac{۱}{۲}$ یا -۲ است.

۳۱ **۳** فرض کنیم $f(x)=۲x-۲$ و $g(x)=\frac{x}{۱+\sqrt{x}}$. ورودی را x و خروجی را هم y می‌گیریم. در این صورت داریم: $x\to\boxed{f}\to\boxed{g}\to y$، یعنی این‌که $y=g(f(x))$. حال با جای‌گذاری $y=\frac{۴}{۳}$ خواهیم داشت:

$$g(f(x))=\frac{۴}{۳}\Rightarrow g(۲x-۲)=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\frac{۲x-۲}{۱+\sqrt{۲x-۲}}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow ۳(۲x-۲)=۴+۴\sqrt{۲x-۲}$$

$$\xRightarrow{\sqrt{۲x-۲}=t}۳t^۲=۴+۴t\Rightarrow ۳t^۲-۴t-۴=۰\Rightarrow(۳t+۲)(t-۲)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۳t+۲=۰\Rightarrow t=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow\sqrt{۲x-۲}=-\frac{۲}{۳}<۰\ \text{غیر قابل قبول}\\ t-۲=۰\Rightarrow t=۲\Rightarrow\sqrt{۲x-۲}=۲\xRightarrow{\text{توان ۲}}۲x-۲=۴\Rightarrow ۲x=۶\Rightarrow x=۳\ \text{قابل قبول}\end{cases}$$

gajmarket.com

۳۲ ۲ فرض کنیم $f(x)=2x+A$ و $g(x)=\sqrt{x}-2x-4$. ورودی را x و خروجی را هم y می‌گیریم. در این صورت، داریم: $x\to\boxed{f}\to\boxed{g}\to y$، یعنی این‌که $y=g(f(x))$. حال با جای‌گذاری $x=2$ و $y=-5$، خواهیم داشت:

$$-5=g(f(2))\xrightarrow{f(x)=2x+A}-5=g(4+A)\xrightarrow{g(x)=\sqrt{x}-2x-4}-5=\sqrt{4+A}-2(4+A)-4\Rightarrow\sqrt{4+A}-2(4+A)+1=0$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری گزینه‌ها}}A=-3$$

اما اگر بخواهیم معادله را حل کنیم، با فرض $\sqrt{4+A}=t>0$، خواهیم داشت:

$$t-2t^2+1=0\Rightarrow 2t^2-t-1=0\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}=0}\begin{cases}t=1\Rightarrow\sqrt{4+A}=1\xrightarrow{\text{توان ۲}}4+A=1\Rightarrow A=-3\\ t=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2}<0 \text{ غیر قابل قبول}\end{cases}$$

۳۳ ۲ ابتدا $f(\sqrt{3})$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=x^2-2[x]\Rightarrow f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^2-2[\underbrace{\sqrt{3}}_{1/7}]=3-2(1)=1$$

بنابراین داریم:

$$f(-\frac{1}{2}\underbrace{f(\sqrt{3})}_{1})=f(-\frac{1}{2})=(-\frac{1}{2})^2-2[-\frac{1}{2}]=\frac{1}{4}-2(-1)=\frac{1}{4}+2=2/25$$

۳۴ ۴ می‌توان نوشت:

$$g(f(a))=5\xrightarrow{g(6)=5}f(a)=6\Rightarrow a+\sqrt{a}=6\xrightarrow{\text{جای‌گذاری گزینه‌ها}}a=4$$

۳۵ ۲ **روش اول:** به‌جای 200° بگویید $180^\circ+20^\circ$. در این‌صورت:

$$g(f(\tan(180^\circ+20^\circ)+\cot(180^\circ+20^\circ)))=g(f(\underbrace{\tan 20^\circ+\cot 20^\circ}_{\text{مقدار مثبت}}))=g(2)=2+1=3$$

روش دوم: لازم به این همه زحمت نیست! می‌شد به‌جای این‌که زاویهٔ 200° را تبدیل کنیم و آن کارهایی که بعدش انجام دادیم، از همان اول بگوییم چون 200° در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد، پس تانژانت و کتانژانت آن هر دو مثبت‌اند و مجموعشان مثبت می‌شود و در نتیجه $f(\tan 200^\circ+\cot 200^\circ)=2$ و $g(2)=2+1=3$.

۳۶ ۳ ابتدا از طریق $g(x)=\frac{2x-a}{x+3}$، ضابطهٔ تابع $(gog)(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$(gog)(x)=g(g(x))=g(\frac{2x-a}{x+3})=\frac{2(\frac{2x-a}{x+3})-a}{\frac{2x-a}{x+3}+3}=\frac{\frac{4x-2a}{x+3}-a}{\frac{2x-a}{x+3}+3}=\frac{\frac{4x-2a-ax-3a}{\cancel{x+3}}}{\frac{2x-a+3x+9}{\cancel{x+3}}}=\frac{(4-a)x-5a}{5x+9-a}\quad(*)$$

با مقایسهٔ $(*)$ و $(gog)(x)=\frac{3x-5}{5x+8}$ نتیجه می‌گیریم: $4-a=3\Rightarrow a=1$

۳۷ ۱ ابتدا $(fof)(x)$ را می‌سازیم:

$$f(f(x))=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-x+1}{x-1}}=\frac{\frac{x}{\cancel{x-1}}}{\frac{1}{\cancel{x-1}}}=x$$

به همین ترتیب $(fofof)(x)=f(\underbrace{f(f(x))}_{x})=f(x)$، بنابراین می‌توان در حالت کلی نوشت:

$$\underbrace{fofo\cdots of}_{\text{۱۳۹۷مرتبه}}=f(x)=\frac{x}{x-1}\overset{x=\sqrt{2}}{=\!=}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2-1}=2+\sqrt{2}$$

۳۸ ۱ در حالت کلی، اجتماع دو تابع ممکن است تابع نباشد. *مثال زیر رو ببینید تا بهتر حرف ما رو بفهمید!*

$$f=\{(0,2)\},\ g=\{(0,1)\}\Rightarrow f\cup g=\{(0,2),(0,1)\}$$

دیدید! در این‌جا f و g تابع هستند، ولی اجتماع آن‌ها $(f\cup g)$ تابع نیست.

۳۹ ۱ با توجه به توابع $f(x)=2x-2$ و $g(x)=x^2-1$، می توان نوشت:

$$(fog)(x)=f(g(x))=2(x^2-1)-2=2x^2-2-2=2x^2-4$$

حال می‌خواهیم معادلهٔ $(fog)(x)=0$ را حل کنیم، پس داریم:

$$2x^2-4=0\Rightarrow 2x^2=4\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

۴۰ ۳ از توابع $h(x)=\sqrt{x}$، $g(x)=\frac{x}{8}+1$ و $f(x)=8x-2$ نتیجه می‌گیریم:

$$g(h(x))=g(\sqrt{x})=\frac{\sqrt{x}}{8}+1\Rightarrow(fogoh)(x)=f(g(h(x)))=f(\frac{\sqrt{x}}{8}+1)=8(\frac{\sqrt{x}}{8}+1)-2=\sqrt{x}+8-2=\sqrt{x}+6$$

۴۱ **۱** داریم $f(x)=[x]$، پس $f(x-f(x))=f(x-[x])$. بنابراین:

$$f(x-[x])=[x-[x]]\xrightarrow{۰\leq x-[x]<۱}f(x-[x])=۰$$

توجه به‌طور کلی $۰\leq u-[u]<۱$. (u، عبارت برحسب x)

۴۲ **۲** ابتدا معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $(۰,a)$ و $(a,۰)$ را می‌نویسیم:

$$y-a=\frac{۰-a}{a-۰}(x-۰)\Rightarrow y-a=-۱(x)\Rightarrow y=-x+a$$

بنابراین $f(x)=-x+a$ است، در نتیجه داریم:

$$(fof)(x)=f(f(x))=-(-x+a)+a=x-a+a=x$$

۴۳ **۲** داریم $f(x)=(۲x-۳)^۲$ و $g(x)=x+۲$، پس:

$$(fog)(x)=f(g(x))=(۲g(x)-۳)^۲=(۲(x+۲)-۳)^۲=(۲x+۱)^۲$$

حال دو تابع $y=f(x)$ و $y=(fog)(x)$ را با هم قطع می‌دهیم:

$$f(x)=(fog)(x)\Rightarrow(۲x-۳)^۲=(۲x+۱)^۲\Rightarrow\cancel{۴x^۲}-۱۲x+۹=\cancel{۴x^۲}+۴x+۱\Rightarrow۱۶x=۸\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

پس نمودارهای دو تابع f و fog در نقطه‌ای به طول $\frac{۱}{۲}$، همدیگر را قطع می‌کنند.

۴۴ **۱** داریم $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲}$ و $g(x)=x+۴$، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}(gof)(x)=g(f(x))=\frac{۲x-۱}{x+۲}+۴=\frac{۲x-۱+۴x+۸}{x+۲}=\frac{۶x+۷}{x+۲}\\(fog)(x)=f(g(x))=\frac{۲(x+۴)-۱}{(x+۴)+۲}=\frac{۲x+۷}{x+۶}\end{cases}$$

حال برای حل معادلهٔ $(gof)(x)=(fog)(x)$ داریم: $\frac{۲x+۷}{x+۶}=\frac{۶x+۷}{x+۲}$، در نتیجه با فرض $x\neq-۲,-۶$ باید طرفین وسطین کرد:

$$(۶x+۷)(x+۶)=(۲x+۷)(x+۲)\Rightarrow۶x^۲+۳۶x+۷x+۴۲=۲x^۲+۴x+۷x+۱۴$$

$$\Rightarrow۴x^۲+۳۲x+۲۸=۰\xrightarrow{\div۴}x^۲+۸x+۷=۰\xrightarrow{a+c=b}x=-۱\text{ یا }x=-\frac{c}{a}=-۷$$

۴۵ **۴** *بیفوری شلوغش کرده!* می‌خواهد بگوید $f=(۴g)og$، پس:

$$۴g(x)=۴(۳x+۱)=۱۲x+۴\Rightarrow f(x)=۱۲(g(x))+۴\Rightarrow f(x)=۱۲(۳x+۱)+۴=۳۶x+۱۶$$

۴۶ **۳** داریم $f(x)=\frac{۴-x}{x+۳}$ و $g(x)=\sqrt{x}$، پس می‌توان نوشت:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=\frac{۴-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+۳}$$

حال می‌خواهیم برد تابع $y=\frac{۴-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+۳}$ را به دست آوریم، بنابراین داریم:

$$y\sqrt{x}+۳y=۴-\sqrt{x}\Rightarrow y\sqrt{x}+\sqrt{x}=۴-۳y\Rightarrow\sqrt{x}(y+۱)=۴-۳y\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{۴-۳y}{y+۱}\xrightarrow{\sqrt{x}\geq۰}\frac{۴-۳y}{y+۱}\geq۰$$

y		-۱		$\frac{۴}{۳}$	
$۴-۳y$	+		+	۰	−
$y+۱$	−	۰	+		+
$\frac{۴-۳y}{y+۱}$	−	تعریف‌نشده	+	۰	−

$$\Rightarrow y\in\left(-۱,\frac{۴}{۳}\right]$$

همان‌طور که می‌بینید برد تابع fog، بازهٔ $\left(-۱,\frac{۴}{۳}\right]$ است که شامل دو عدد صحیح ۰ و ۱ می‌باشد.

۴۷ **۱** داریم $f(x)=x-[x]$ و $g(x)=\frac{۱-x}{x}=\frac{۱}{x}-۱$، پس می‌توان نوشت:

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(x-[x])=\frac{۱}{x-[x]}-۱$$

می‌دانیم همواره $x-[x]$ در بازهٔ $[۰,۱)$ است، بنابراین داریم:

$$۰\leq x-[x]<۱\Rightarrow\frac{۱}{x-[x]}>۱\xrightarrow{-۱}\frac{۱}{x-[x]}-۱>۰\Rightarrow(gof)(x)>۰$$

در نتیجه برد تابع $gof(x)$، بازهٔ $(۰,+\infty)$ است.

gajmarket.com

۴۸ ۲ نمودار تابع f، محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $-\frac{۱}{۴}$ قطع می‌کند، پس $f(۶)=f(-\frac{۱}{۴})=۰$ است. حالا قرار است ریشه‌های معادلهٔ $f(g(x))=۰$ را تعیین کنیم:

$$f(g(x))=۰ \xrightarrow{f(۶)=۰} g(x)=۶ \Rightarrow x-\sqrt{x}=۶ \xrightarrow[t\geq ۰]{\sqrt{x}=t} t^۲-t-۶=۰ \Rightarrow (t-۳)(t+۲)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t-۳=۰ \Rightarrow t=۳ \Rightarrow \sqrt{x}=۳ \xrightarrow{\text{توان ۲}} x=۹ \\ t+۲=۰ \Rightarrow t=-۲<۰ \ \text{غیرقابل‌قبول} \end{cases}$$

$$f(g(x))=۰ \xrightarrow{f(-\frac{۱}{۴})=۰} g(x)=-\frac{۱}{۴} \Rightarrow x-\sqrt{x}=-\frac{۱}{۴} \Rightarrow x-\sqrt{x}+\frac{۱}{۴}=۰ \Rightarrow \left(\sqrt{x}-\frac{۱}{۲}\right)^۲=۰ \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین نمودار تابع $(fog)(x)$، محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۹ و $\frac{۱}{۴}$ قطع می‌کند.

۴۹ ۲ داریم $f(x)=x^۲+x-۲$، پس می‌توان نوشت $f(x)=\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲-\frac{۹}{۴}$. حال نوبت می‌رسد به $f(g(x))$، که قرار است زیر محور xها قرار بگیرد، پس:

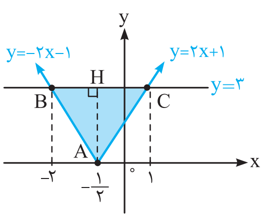
$$f(g(x))=f\left(\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}\right)=\left(\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}\right)^۲-\frac{۹}{۴}=\left(\frac{۱}{۲}x-۱\right)^۲-\frac{۹}{۴}=\left(\frac{۱}{۲}(x-۲)\right)^۲-\frac{۹}{۴}<۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۴}(x-۲)^۲<\frac{۹}{۴} \xrightarrow{\times ۴} (x-۲)^۲<۹ \xrightarrow{\text{جذر}} |x-۲|<۳ \Rightarrow -۳<x-۲<۳ \xrightarrow{+۲} -۱<x<۵$$

۵۰ ۳ داریم $f(x)=x^۲+x$ و $g(x)=\sqrt{۴x+۱}$، بنابراین:

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(x^۲+x)=\sqrt{۴(x^۲+x)+۱}=\sqrt{۴x^۲+۴x+۱}=\sqrt{(۲x+۱)^۲}=|۲x+۱|$$

و حالا نمودار تابع $y=|۲x+۱|$ و خط $y=۳$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم و مساحت ناحیهٔ محدود بین آن دو را به دست می‌آوریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} -۲x-۱=۳ \Rightarrow -۲x=۴ \Rightarrow x_B=-۲ \\ ۲x+۱=۳ \Rightarrow ۲x=۲ \Rightarrow x_c=۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AH=۳ \\ BC=۳ \end{cases} \Rightarrow \text{مساحت ناحیهٔ رنگی}: S=\frac{۱}{۲}(AH)(BC)=\frac{۱}{۲}(۳)(۳)=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

۵۱ ۳ از نمودار تابع f پیداست که $f(۰)=۴$ می‌باشد، پس برای تعیین جواب‌های معادلهٔ $f(f(x+۲))=۴$ باید جواب‌های معادلهٔ $f(x+۲)=۰$ را به دست آوریم. با توجه به این‌که نمودار تابع $f(x+۲)$ از انتقال نمودار f به اندازهٔ ۲ واحد به سمت چپ به دست می‌آید، پس کافی است ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ را از روی نمودار f تعیین کنیم، سپس از هر یک از آن‌ها، ۲ واحد کم کنیم تا ریشه‌های معادلهٔ $f(x+۲)=۰$ حاصل شوند، یعنی داریم:

$$f(x)=۰ \ \text{ریشه‌های}: x=-۶, x=-۴, x=۲ \Rightarrow f(x+۲)=۰ \ \text{ریشه‌های}: x=-۸, x=-۶, x=۰ \Rightarrow \text{جواب مسأله}=(-۸)(-۶)(۰)=۰$$

۵۲ ۳ به‌جای xهای تابع f، ضابطهٔ $f(x)$ را قرار می‌دهیم:

$$f(f(x))=۲-\left|(۲-|x-۲|)-۲\right|=۲-\left|\underbrace{-|x-۲|}_{\text{کوچک‌تر یا مساوی صفر}}\right|=۲-|x-۲|=f(x)$$

۵۳ ۴ از ضابطه‌های $f(x)$ پیدا است که f تابعی همواره مثبت است، پس $-f(x)$، تابعی همواره منفی است، در نتیجه $f(-f(x))=۳$ است. حال می‌رویم سراغ $f(f(-f(x)))$ که برابر $f(۳)$ است و داریم: $f(۳)=|۳+۱|=۴$.

۵۴ ۴ ابتدا $|x|$ را تعیین علامت می‌کنیم و تابع $f(x)=|x|-x$ را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم: $f(x)=\begin{cases} ۰ & ; \ x\geq ۰ \\ -۲x & ; \ x<۰ \end{cases}$، بنابراین برای تشکیل ضابطهٔ $(fof)(x)$، دو حالت زیر پیش می‌آید:

$$\begin{cases} \text{اگر} \ x\geq ۰ \Rightarrow f(x)=۰ \Rightarrow f(f(x))=f(۰)=۰ \\ \text{اگر} \ x<۰ \Rightarrow f(x)=-۲x \Rightarrow f(f(x))=f(\underbrace{-۲x}_{\text{مثبت}})=۰ \end{cases}$$

در نتیجه به ازای هر x حقیقی، $(fof)(x)=۰$ است.

۵۵ ۳ می‌گوید $g(x)=\tan x$، پس $(fog)(x)=f(g(x))=f(\tan x)$ و داریم:

$$f(\tan x)=\frac{\tan x}{\sqrt{۱+\tan^۲ x}}=\frac{\tan x}{\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}}=\frac{\tan x}{\frac{۱}{|\cos x|}}=\tan x\times|\cos x| \quad (*)$$

چون x در بازهٔ $\left(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\right)$ است، پس مقدار $\cos x$، منفی بوده و $|\cos x|=-\cos x$، پس داریم:

$$f(\tan x)\overset{(*)}{=}\tan x\times(-\cos x)=\frac{\sin x}{\cos x}\times(-\cos x)=-\sin x$$

تذکر: در مثلثات داریم: $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$ و $۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}$

۵۶ **۲** در دو حالت، مسأله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} \text{اگر } x \text{ گنگ باشد} \Rightarrow f(x)=x+۳ \Rightarrow f(f(x))=f(\underbrace{x+۳}_{\text{گنگ}})=(x+۳)+۳=f(x)+۳ \\ \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \Rightarrow f(x)=\sqrt{۵}+۲ \Rightarrow f(f(x))=f(\underbrace{\sqrt{۵}+۲}_{\text{گنگ}})=(\sqrt{۵}+۲)+۳=f(x)+۳ \end{cases}$$

(توجه کنید که مجموع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، همواره گنگ است، به همین دلیل عدد $۲+\sqrt{۵}$، گنگ می‌باشد.)

۵۷ **۳** **روش اول:** سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \text{اگر } x\geq ۱ \Rightarrow f(x)=x+۱\geq ۲ \Rightarrow g(f(x))=g(x+۱)=(x+۱)^۲ \\ \text{اگر } -۱\leq x<۱ \Rightarrow f(x)=x+۲\geq ۱ \Rightarrow g(f(x))=g(x+۲)=(x+۲)^۲ \\ \text{اگر } x<-۱ \Rightarrow f(x)=x+۲<۱ \Rightarrow g(f(x))=g(x+۲)=(x+۲)^۳ \end{cases}$$

روش دوم: خیلی ساده‌تر! می‌توان عددگذاری هم کرد. به ازای $x=۰$، مقدار gof را حساب می‌کنیم:

$$g(f(۰))=g(۲)=(۲)^۲=۴$$

گزینهٔ (۳) تنها گزینه‌ای است که در آن، به ازای $x=۰$، مقدار تابع gof برابر ۴ می‌شود.

۵۸ **۲** *یه نیم‌نگاه مهم!*

نیم‌نگاه

اگر دو تابع $f(g(x))$ و $f(x)$ را داده باشند و $g(x)$ را بخواهند، کافی است به‌جای xهای تابع $f(x)$، عبارت $g(x)$ را قرار دهید و بعد عبارتی که به‌دست می‌آید را با $f(g(x))$ داده‌شده، مساوی بگذارید تا $g(x)$ پیدا شود.

اطلاعات مسأله به ما می‌فهماند که $g(f(x))=۲x$ و $g(x)=۳x+۴$، پس داریم:

$$g(f(x))=۳f(x)+۴ \Rightarrow ۳f(x)+۴=۲x \Rightarrow ۳f(x)=۲x-۴ \Rightarrow f(x)=\frac{۲}{۳}x-\frac{۴}{۳}$$

حال $f(۵)$ را محاسبه می‌کنیم که برابر $\frac{۲}{۳}(۵)-\frac{۴}{۳}=۲$ است.

۵۹ **۱** چون $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$، پس $f(g(x))=-f(x)=\frac{-(x+۱)}{x-۱}$، بنابراین داریم:

$$f(g(x))=\frac{g(x)+۱}{g(x)-۱} \xrightarrow{f(g(x))=-f(x)} \frac{g(x)+۱}{g(x)-۱}=\frac{-(x+۱)}{x-۱} \Rightarrow (x-۱)g(x)\cancel{+x}-۱=-(x+۱)g(x)\cancel{+x}+۱$$

$$\Rightarrow xg(x)-\cancel{g(x)}-۱=-xg(x)-\cancel{g(x)}+۱ \Rightarrow ۲xg(x)=۲ \Rightarrow g(x)=\frac{۲}{۲x}=\frac{۱}{x}$$

۶۰ **۱** چون $f(x)=x^۲-x-۲$ است، پس:

$$f(g(x))=g^۲(x)-g(x)-۲ \xrightarrow{f(g(x))=x^۲+x-۲} g^۲(x)-g(x)-۲=x^۲+x-۲$$

$$\Rightarrow g^۲(x)-x^۲=g(x)+x \Rightarrow (g(x)+x)(g(x)-x)-(g(x)+x)=۰ \Rightarrow (g(x)+x)(g(x)-x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(x)+x=۰ \Rightarrow g(x)=-x \Rightarrow f(x)+g(x)=x^۲-x-۲-x=x^۲-۲x-۲ \\ g(x)-x-۱=۰ \Rightarrow g(x)=x+۱ \Rightarrow f(x)+g(x)=x^۲-x-۲+x+۱=x^۲-۱ \end{cases}$$

۶۱ **۴** *یه نیم‌نگاه مهم!*

نیم‌نگاه

اگر دو تابع $f(g(x))$ و $g(x)$ را داده باشند و $f(x)$ را بخواهند، کافی است $g(x)=t$ قرار داده شود و بعد $f(t)$ را به‌دست آورید. در آخر، x را به‌جای t قرار دهید تا $f(x)$ به‌دست آید.

داریم $f(۲x-۳)=۴x^۲-۱۴x+۱۳$، بنابراین با فرض $۲x-۳=t$ داریم:

$$۲x=t+۳ \Rightarrow x=\frac{t+۳}{۲} \quad (*)$$

$$\Rightarrow f(۲x-۳)=f(t) \overset{(*)}{=\!=} ۴(\frac{t+۳}{۲})^۲-۱۴(\frac{t+۳}{۲})+۱۳=۴(\frac{t^۲+۶t+۹}{۴})-۷(t+۳)+۱۳$$

$$\Rightarrow f(t)=t^۲+۶t+۹-۷t-۲۱+۱۳=t^۲-t+۱ \Rightarrow f(x)=x^۲-x+۱$$

gajmarket.com

۶۲ **۳** گفته‌شده $g(f(x))=8x^2+22x+20$ و $f(x)=2x+3$، پس:

$$g(2x+3)=8x^2+22x+20$$

حال فرض کنیم $t=2x+3$، در این صورت $x=\frac{t-3}{2}$ و داریم:

$$g(t)=8\left(\frac{t-3}{2}\right)^2+22\left(\frac{t-3}{2}\right)+20=2(t^2-6t+9)+11(t-3)+20$$

$$\Rightarrow g(t)=2t^2-t+5\Rightarrow g(x)=2x^2-x+5 \quad (*)$$

حال ضابطهٔ fog را تعیین می‌کنیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=2g(x)+3\overset{(*)}{=}2(2x^2-x+5)+3=4x^2-2x+13$$

۶۳ **۲** داریم $f(g(x))=\frac{x}{x-3}$ و چون $g(x)=2x-1$ است، پس:

$$f(2x-1)=\frac{x}{x-3}\xrightarrow{2x-1=3\Rightarrow x=2}f(3)=\frac{2}{2-3}=\frac{2}{-1}=-2$$

۶۴ **۲** از تساوی $f(x^2+x)=x^4+2x^3+x^2$ می‌توان نوشت:

$$f(x^2+x)=x^2(x^2+2x+1)=x^2(x+1)^2=(x(x+1))^2=(x^2+x)^2$$

حال فرض می‌کنیم $t=x^2+x$، در این صورت $f(t)=t^2$ و در نتیجه $f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^2=3$ است.

۶۵ **۴** یادتان باشد: $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$، پس می‌توان این‌طور نوشت:

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}\Rightarrow f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3(x)\left(\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)\xrightarrow{x+\frac{1}{x}=t}f(t)=t^3-3t\Rightarrow f(x)=x^3-3x$$

۶۶ **۴** می‌دانیم $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$ و $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=4\Rightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4\xrightarrow{\text{جذر}}\left|x+\frac{1}{x}\right|=\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4}$$

$$\Rightarrow x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4} \quad (*)$$

حال برویم سراغ تساوی $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x+\frac{1}{x}+8$. در این مورد، داریم:

$$f\left(x-\frac{1}{x}\right)\overset{(*)}{=}\pm\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4}+8\xrightarrow{x-\frac{1}{x}=t}f(t)=\pm\sqrt{t^2+4}+8 \quad (**)$$

حال با جای‌گذاری $t=\sqrt{5}$ در عبارت (**)، خواهیم داشت:

$$f(\sqrt{5})=\pm\sqrt{(\sqrt{5})^2+4}+8=\pm\sqrt{5+4}+8=\pm\sqrt{9}+8=\pm3+8\Rightarrow\begin{cases}f(\sqrt{5})=11\\f(\sqrt{5})=5\end{cases}$$

۶۷ **۲** از تساوی $g(x)=\log_3 x$ نتیجه می‌گیریم $x=3^{g(x)}$ (براساس قوانین لگاریتم)، پس:

$$f(g(x))=3-x\xrightarrow{x=3^{g(x)}}f(g(x))=3-3^{g(x)}\xrightarrow{\text{فرض کنیم } g(x)=t}f(t)=3-3^t\Rightarrow f(2x)=3-3^{2x}=3-(3^2)^x=3-9^x$$

۶۸ **۲** فرض کنیم $t=1-|x|$، پس $|x|=1-t$. در ضمن $x^2=|x|^2$ است، بنابراین:

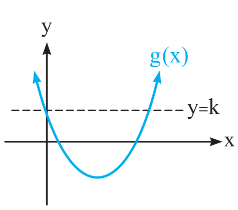
$$f(1-|x|)=\sqrt{x^2-4}=\sqrt{|x|^2-4}\Rightarrow f(t)=\sqrt{(1-t)^2-4}$$

رادیکال با فرجهٔ زوج داریم، پس $(1-t)^2-4\ge 0$، در نتیجه:

$$(1-t)^2\ge 4\xrightarrow{\text{جذر}}|1-t|\ge 2\Rightarrow\begin{cases}1-t\ge 2\\1-t\le -2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t\le -1\\t\ge 3\end{cases}$$

بنابراین $D_f=(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$ یا $D_f=\mathbb{R}-(-1,3)$.

۶۹ **۲** فرض کنیم $f(k)=0$ باشد. طبق گفته‌های مسأله، $k>0$ است، پس باید نقاطی را بیابیم که $g(x)=k$ شود. تا معادلهٔ $f(g(x))=0$ برقرار باشد. با توجه به نمودار تابع $g(x)$، معادلهٔ $g(x)=k$ به طور حتم دارای دو ریشه خواهد بود، زیرا نمودار تابع $g(x)$ و خط $y=k(k>0)$، همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند، بنابراین معادلهٔ $f(g(x))=0$ دارای دو جواب است.



۷۰ **۳** به نیم‌نگاه زیر توجه کنین!

نیم‌نگاه

اگر دو تابع f و g را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب داشته باشیم، آن‌گاه برای تشکیل تابع fog، باید x های تابع g را برداریم و مقدار $g(x)$ را در هر یک از آن‌ها تعیین کنیم. در ادامه، هر یک از مقدارهای به‌دست آمدهٔ $g(x)$ را که عضوی از دامنهٔ f باشند، انتخاب می‌کنیم و مقدار f را در آن‌ها حساب می‌کنیم. به این ترتیب تابع fog ساخته می‌شود. مثلاً فرض کنید $f=\{(۲,۵),(۳,۴),(۴,۵)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۳,۴),(۵,۶)\}$، در این صورت fog چه می‌شود؟ خُب، اول باید x های g را برداریم، یعنی $x=۲,۳,۵$ و بعد $g(x)$ را در این x ها مشخص نماییم:

$x=۲ \Rightarrow g(۲)=۳ \Rightarrow f(g(۲))=f(۳)=۴$

$x=۳ \Rightarrow g(۳)=۴ \Rightarrow f(g(۳))=f(۴)=۵$

$x=۵ \Rightarrow g(۵)=۶ \Rightarrow f(g(۵))=f(۶) \Rightarrow$ وجود ندارد.

بنابراین $fog=\{(۲,۴),(۳,۵)\}$ است.

داریم $f=\{(۳,۴),(۴,۳),(۵,۴)\}$ و $g=\{(۳,۶),(۶,۴),(۵,۴)\}$. حال برای این‌که تابع fog را بسازیم، باید x های g را برداریم و مقدار $g(x)$ را به ازای آن‌ها تعیین کنیم و بعد مقدار f را به ازای $g(x)$ های پیداشده، حساب کنیم:

$$\begin{cases} x=۳ \Rightarrow g(۳)=۶ \Rightarrow f(g(۳))=f(۶) \Rightarrow \text{وجود ندارد.} \\ x=۶ \Rightarrow g(۶)=۴ \Rightarrow f(g(۶))=f(۴)=۳ \\ x=۵ \Rightarrow g(۵)=۴ \Rightarrow f(g(۵))=f(۴)=۳ \end{cases}$$

بنابراین $fog=\{(۶,۳),(۵,۳)\}$ است.

۷۱ **۳** با توجه به تعریف تابع f، داریم $f=\{(۱,۱),(۲,۳),(۳,۵),(۴,۷),(۵,۹)\}$. حال می‌خواهیم $f(f(x))$ را بسازیم، پس باید x های f را برداریم و $f(x)$ را به ازای آن‌ها تعیین کنیم و بعد دوباره مقدار f را به ازای $f(x)$ های پیداشده، تعیین کنیم:

$$\begin{cases} x=۱ \Rightarrow f(۱)=۱ \Rightarrow f(f(۱))=f(۱)=۱ \\ x=۲ \Rightarrow f(۲)=۳ \Rightarrow f(f(۲))=f(۳)=۵ \\ x=۳ \Rightarrow f(۳)=۵ \Rightarrow f(f(۳))=f(۵)=۹ \\ x=۴ \Rightarrow f(۴)=۷ \Rightarrow f(f(۴))=f(۷) \Rightarrow \text{وجود ندارد.} \\ x=۵ \Rightarrow f(۵)=۹ \Rightarrow f(f(۵))=f(۹) \Rightarrow \text{وجود ندارد.} \end{cases}$$

بنابراین $fof=\{(۱,۱),(۲,۵),(۳,۹)\}$، یعنی سه تا عضو دوتایی دارد.

۷۲ **۳** گفته‌شده $(۴,۲)\in fog$، پس $f(g(۴))=۲$ و چون $f(۳)=۲$ است، پس نتیجه می‌گیریم $g(۴)=۳$ که در این صورت $a=۴$ می‌باشد.

در ضمن $(۴,۱)\in gof$ است، پس:

$$g(f(۴))=۱ \xrightarrow{f(۴)=۵} g(۵)=۱ \xrightarrow{g(b)=۱} b=۵$$

بنابراین $(a,b)=(۴,۵)$ است.

۷۳ **۱** ابتدا دامنهٔ $f+g$ و دامنهٔ $f-g$ را پیدا می‌کنیم:

$$D_{f+g}=D_f \cap D_g=\{۱,۲,۳,۴\}\cap\{۱,۲,۴,۵\}=\{۱,۲,۴\} \Rightarrow f+g=\{(۱,۴),(۲,۸),(۴,۸)\}$$

$$D_{f-g}=D_f \cap D_g=\{۱,۲,۴\} \Rightarrow f-g=\{(۱,۰),(۲,-۲),(۴,۲)\}$$

حال نوبت می‌رسد به $(f+g)o(f-g)$. اولش که باید x متعلق به D_{f-g} باشد، پس:

$$\begin{cases} x=۱ \Rightarrow (f-g)(۱)=۰ \Rightarrow (f+g)o(f-g)=(f+g)(۰) \Rightarrow \text{وجود ندارد.} \\ x=۲ \Rightarrow (f-g)(۲)=-۲ \Rightarrow (f+g)o(f-g)=(f+g)(-۲) \Rightarrow \text{وجود ندارد.} \\ x=۴ \Rightarrow (f-g)(۴)=۲ \Rightarrow (f+g)o(f-g)=(f+g)(۲)=۸ \end{cases}$$

بنابراین $(f+g)o(f-g)=\{(۴,۸)\}$.

۷۴ **۲** رادیکال با فرجهٔ زوج داریم، پس باید $(gof)(x)-۳ \geq ۰$ یا $(gof)(x) \geq ۳$. از روی نمودار g نتیجه می‌گیریم که $g(u) \geq ۳$ زمانی برقرار است که $u \geq ۶$ باشد. پس در این‌جا باید $f(x) \geq ۶$ باشد که با توجه به نمودار f، این شرط زمانی تأمین می‌شود که $x \geq -۳$ باشد، یعنی $D_y=[-۳,+\infty)$.

۷۵ **۳** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

دامنهٔ توابع مرکب

دامنهٔ $(fog)(x)$ همهٔ عددهای حقیقی x متعلق به D_g است، به طوری‌که $g(x)$ متعلق به D_f باشد، یعنی:

$$D_{fog}=\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

به طور مشابه، دامنهٔ $(gof)(x)$ همهٔ عددهای حقیقی x متعلق به D_f است، به‌طوری که $f(x)$ متعلق به D_g باشد، یعنی:

$$D_{gof}=\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

gajmarket.com

به‌عنوان مثال، در مورد دو تابع $f(x)=x-۲$ و $g(x)=\sqrt{x+۱}$، دامنهٔ تابع‌های fog و gof را محاسبه می‌کنیم:

$$D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_g=[-۱,+\infty)\Rightarrow D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}\mid \underbrace{(x-۲)\in[-۱,+\infty)}_{x-۲\ge -۱\Rightarrow x\ge ۱}\}$$

از اشتراک $(x\ge ۱)$ و $(x\in\mathbb{R})$ به‌دست می‌آید: $D_{gof}=[۱,+\infty)$.

حال در مورد دامنهٔ fog داریم:

$$D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}=\{x\in[-۱,+\infty)\mid \sqrt{x+۱}\in\mathbb{R}\}=[-۱,+\infty)$$

مثال **اگر $f(x)=\frac{۱}{x}$ و $g(x)=\sqrt{۹x-x^۲}$ باشند، دامنهٔ تعریف تابع gof کدام است؟**

۱) $(۰,\frac{۱}{۹}]$ ۲) $(-\infty,\frac{۱}{۹}]-\{۰\}$ ۳) $(۰,+\infty)$ ۴) $[\frac{۱}{۹},+\infty)$

پاسخ ابتدا دامنهٔ توابع f و g را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{۱}{x}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$$

$$g(x)=\sqrt{۹x-x^۲}\Rightarrow D_g:۹x-x^۲\ge ۰\Rightarrow x(۹-x)\ge ۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$$

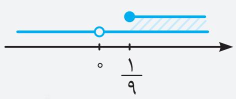
x		۰		۹	
$۹x-x^۲$	$-$		$+$		$-$

$$\Rightarrow x\in[۰,۹]\Rightarrow D_g=[۰,۹]$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$D_{gof}=\left\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\right\}=\{x\in\mathbb{R}-\{۰\}\mid \underbrace{\frac{۱}{x}\in[۰,۹]}_{۰\le\frac{۱}{x}\le ۹\Rightarrow x\ge\frac{۱}{۹}}\}$$

با اشتراک گرفتن از $\mathbb{R}-\{۰\}$ و $x\ge\frac{۱}{۹}$ نتیجه می‌گیریم:



$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} D_{gof}=\left[\frac{۱}{۹},+\infty\right)\Rightarrow$$ (گزینهٔ ۴)

ابتدا دامنهٔ توابع f و g را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases}f(x)=۲x-۱\Rightarrow D_f=\mathbb{R}\\ g(x)=x^۲+۳\Rightarrow D_g=\mathbb{R}\end{cases}$$

حال دامنهٔ gof را مشخص می‌کنیم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}\mid \underbrace{(۲x-۱)\in\mathbb{R}}_{\text{برقرار است.}}\}=\mathbb{R}$$

۷۶ **۲** ابتدا دامنهٔ توابع f و g را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases}f(x)=\sqrt{x^۲+۵}:D_f=\mathbb{R}\\ g(x)=\sqrt{۴-x^۲}:۴-x^۲\ge ۰\Rightarrow x^۲\le ۴\xrightarrow{\text{جذر}}|x|\le ۲\Rightarrow -۲\le x\le ۲\Rightarrow D_g=[-۲,۲]\end{cases}$$

بنابراین:

$$D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}=\{x\in[-۲,۲]\mid \underbrace{\sqrt{۴-x^۲}\in\mathbb{R}}_{\text{برقرار است.}}\}=[-۲,۲]$$

۷۷ **۲** ابتدا دامنهٔ توابع f و g را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases}f(x)=\sqrt{x-۴}\ :\ x-۴\ge ۰\Rightarrow x\ge ۴\Rightarrow D_f=[۴,+\infty)\\ g(x)=\sqrt{۴-x}\ :\ ۴-x\ge ۰\Rightarrow x\le ۴\Rightarrow D_g=(-\infty,۴]\end{cases}$$

حال دامنهٔ fog را به دست می‌آوریم:

$$D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}=\{x\in(-\infty,۴]\mid \sqrt{۴-x}\in[۴,+\infty)\}$$

در نتیجه:

$\sqrt{۴-x}\ge ۴\xrightarrow{\text{توان ۲}}۴-x\ge ۱۶\Rightarrow x\le -۱۲$ یا $x\in(-\infty,-۱۲]$

از اشتراک $x\in(-\infty,۴]$ و $x\in(-\infty,-۱۲]$ به دست می‌آید:

$$D_{fog}=(-\infty,-۱۲]$$

همان‌طور که می‌بینید دامنهٔ fog، شامل اعداد صحیح منفی ۱-، ۲-، ۳-، ۴-، ۵-، ۶-، ۷-، ۸-، ۹-، ۱۰- و ۱۱- نمی‌باشد.

۷۸ **۱** ابتدا دامنهٔ توابع f و g را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases}f(x)=\frac{۳}{x-۲}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۲\}\\ g(x)=\frac{۱}{x}\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۰\}\end{cases}$$

حال دامنهٔ fog را مشخص می‌کنیم:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\left\{x\in\mathbb{R}-\{0\} \,\middle|\, \underbrace{\frac{1}{x}\in\mathbb{R}-\{2\}}_{\frac{1}{x}\neq 2\Rightarrow x\neq\frac{1}{2}}\right\}$$

از اشتراک $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ و $x\neq\frac{1}{2}$ نتیجه می‌گیریم:

$$D_{fog}=\mathbb{R}-\{0,\frac{1}{2}\}$$

۷۹ **۴** می‌توان نوشت:

$$D_{fof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}=\left\{x\in\mathbb{R}-\{-2\} \,\middle|\, \frac{1}{2+x}\in\mathbb{R}-\{-2\}\right\}$$

در نتیجه:

$$\frac{1}{2+x}\neq -2\Rightarrow 2+x\neq-\frac{1}{2}\Rightarrow x\neq-\frac{5}{2}$$

از اشتراک $x\in\mathbb{R}-\{-2\}$ و $x\neq-\frac{5}{2}$ به‌دست می‌آید:

$$D_{fof}=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{2},-2\right\}$$

۸۰ **۱** ابتدا دامنهٔ توابع f و g را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x)=4x^2-1\Rightarrow D_f=\mathbb{R} \\ g(x)=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow 1-x^2\geq 0\Rightarrow x^2\leq 1\xRightarrow{\text{جذر}} |x|\leq 1\Rightarrow -1\leq x\leq 1\Rightarrow D_g=[-1,1] \end{cases}$$

حال دامنهٔ gof را مشخص می‌کنیم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R} \mid \underbrace{4x^2-1\in[-1,1]}_{-1\leq 4x^2-1\leq 1\Rightarrow 0\leq 4x^2\leq 2\Rightarrow 0\leq x^2\leq\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}\leq x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}}\}$$

بنابراین $D_{gof}=[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$.

۸۱ **۲** ابتدا دامنهٔ توابع f و g را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}: 1-x^2=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-1,1\} \\ g(x)=\sqrt{x-x^2}: x-x^2\geq 0\Rightarrow x(1-x)\geq 0\xRightarrow{\text{جدول تعیین علامت}}\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & 0 & & 1 & \\ \hline x-x^2 & - & | & \underbrace{+} & | & - \end{array}\Rightarrow D_g=[0,1] \end{cases}$$

حال دامنهٔ gof را مشخص می‌کنیم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\left\{x\in\mathbb{R}-\{-1,1\} \,\middle|\, \frac{1+x^2}{1-x^2}\in[0,1]\right\}$$

و حالا نامعادلهٔ $0\leq\frac{1+x^2}{1-x^2}\leq 1$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{1+x^2}{1-x^2}\geq 0\xRightarrow{1+x^2>0} 1-x^2>0\Rightarrow x^2<1\xRightarrow{\text{جذر}} |x|<1\Rightarrow -1<x<1$$

با توجه به این‌که $-1<x<1$ می‌باشد، پس $1-x^2>0$ است در نتیجه داریم:

$$\frac{1+x^2}{1-x^2}\leq 1\xRightarrow{1-x^2>0} 1+x^2\leq 1-x^2\Rightarrow 2x^2\leq 0\Rightarrow x^2\leq 0\Rightarrow x=0$$

بنابراین از حل نامعادلهٔ $0\leq\frac{1+x^2}{1-x^2}\leq 1$ نتیجه می‌گیریم فقط $x=0$ است و در نتیجه:

$$D_{gof}=\{x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}, x=0\}=\{0\}$$

۸۲ **۲** می‌دانیم $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$. حال با توجه به نمودارهای f و g می‌توان نوشت:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in(-\infty,3] \mid f(x)>3\}$$

از نمودار f پیدا است که $f(x)$ همواره کوچک‌تر یا مساوی صفر است، پس نمی‌تواند بزرگ‌تر از ۳ باشد (یعنی نامساوی $f(x)>3$ اصلاً برقرار نیست)، بنابراین دامنهٔ gof، تهی است.

۸۳ **۳** ابتدا دامنهٔ fof را می‌نویسیم:

$$D_{fof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}$$

از طرفی داریم:

$$f(x)=1-\sqrt{x+1}: x+1\geq 0\Rightarrow x\geq -1\Rightarrow D_f=[-1,+\infty)$$

بنابراین:

$$D_{fof}=\{x\geq -1 \mid 1-\sqrt{x+1}\geq -1\}\Rightarrow 1-\sqrt{x+1}\geq -1\Rightarrow\sqrt{x+1}\leq 2\xRightarrow{\text{توان ۲}} x+1\leq 4\Rightarrow x\leq 3$$

با اشتراک گرفتن بین $x\geq -1$ و $x\leq 3$ به‌دست می‌آید:

$$D_{fof}=[-1,3]$$

۸۴ **۳** از آن‌جا که $f(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}-2x^2$ است، پس می‌توان نوشت:

$$f(x)=1-2x^2 \quad \text{و} \quad 1-x>0\Rightarrow x<1\Rightarrow D_f=(-\infty,1)$$

از طرفی با توجه به نمودار تابع g، نتیجه می‌گیریم $D_g=[-9,2]$. حال برویم سراغ تعیین دامنهٔ $(gof)(x)$:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in(-\infty,1) \mid 1-2x^2\in[-9,2]\}$$

gajmarket.com

در نتیجه:

$$-۹\le ۱-۲x^۲\le ۲ \xrightarrow{-۱} -۱۰\le -۲x^۲\le ۱ \xrightarrow{\div(-۲)} \underbrace{-\frac{۱}{۲}\le x^۲}_{\text{همواره برقرار است.}}\le ۵ \Rightarrow x^۲\le ۵ \xrightarrow{\text{جذر}} |x|\le\sqrt{۵} \Rightarrow -\sqrt{۵}\le x\le\sqrt{۵}$$ یا $x\in[-\sqrt{۵},\sqrt{۵}]$

از اشتراک $x\in(-\infty,۱)$ و $x\in[-\sqrt{۵},\sqrt{۵}]$ به دست می‌آید: $D_{gof}=[-\sqrt{۵},۱)$

بنابراین اعداد صحیح ۲-، ۱- و ۰ متعلق به دامنهٔ تابع gof هستند.

۸۵ | ۱ ابتدا دامنه‌های f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x+|x|}: x+|x|\ge ۰ \Rightarrow \begin{cases} x\ge ۰\Rightarrow ۲x\ge ۰\Rightarrow x\ge ۰ \xrightarrow{\cap(x\ge ۰)} x\ge ۰ \\ x<۰\Rightarrow x-x\ge ۰\Rightarrow ۰\ge ۰ \text{ همواره برقرار است } \Rightarrow x<۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} x\in\mathbb{R}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$

$$g(x)=\frac{۱}{x^۲-۴x}: x^۲-۴x\ne ۰\Rightarrow x\ne ۰,۴\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۰,۴\}$$

بنابراین:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{\underbrace{x\in\mathbb{R}}_{(۱)} \mid \underbrace{\sqrt{x+|x|}\in\mathbb{R}-\{۰,۴\}}\}$$

باید xهایی که $\sqrt{x+|x|}$ را برابر صفر یا ۴ می‌کند از $\mathbb{R}$ کم کنیم.

$$\begin{cases}\sqrt{x+|x|}=۰\Rightarrow x+|x|=۰\Rightarrow |x|=-x\Rightarrow x\le ۰ \\ \sqrt{x+|x|}=۴ \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+|x|=۱۶\Rightarrow \begin{cases} x\ge ۰: ۲x=۱۶\Rightarrow x=۸ \\ x<۰: x-x=۱۶\Rightarrow ۰=۱۶ \text{ غیر قابل قبول}\end{cases}\end{cases} \Rightarrow x\in\mathbb{R}-((-\infty,۰]\cup\{۸\})\quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} D_{gof}=\mathbb{R}-\left((-\infty,۰]\cup\{۸\}\right)=(۰,۸)\cup(۸,+\infty)$$

۸۶ | ۳ ابتدا دامنهٔ f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x}\Rightarrow\begin{cases}۱-x^۲\ge ۰\\ x\ne ۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^۲\le ۱\\ x\ne ۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|\le ۱\\ x\ne ۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۱\le x\le ۱\\ x\ne ۰\end{cases}\Rightarrow D_f=[-۱,۱]-\{۰\}$$

$$g(x)=\tan x\ ;\ |x|<\frac{\pi}{۲}\Rightarrow D_g=(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$$

حال برویم سراغ دامنهٔ fog:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\left\{x\in(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}) \mid \underbrace{\tan x\in[-۱,۱]-\{۰\}}_{(*)}\right\}$$

(*) یعنی این‌که باید x بین $-\frac{\pi}{۴}$ تا $\frac{\pi}{۴}$ باشد. در ضمن صفر هم نباشد، پس $x\in[-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴}]-\{۰\}$ که اشتراک آن با $x\in(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ برابر می‌شود با $[-\frac{\pi}{۴},۰)\cup(۰,\frac{\pi}{۴}]$.

۸۷ | ۳ با توجه به معلومات مسأله، داریم: $f(f(x))=۳\sqrt{f(x)}-۲ \xrightarrow{f(x)=t} f(t)=۳\sqrt{t}-۲$

یا این‌که بگوییم $f(x)=۳\sqrt{x}-۲$ ، پس:

$$(gof)(x)=\frac{f(x)+۱}{f(x)-۱}=\frac{(۳\sqrt{x}-۲)+۱}{(۳\sqrt{x}-۲)-۱}=\frac{۳\sqrt{x}-۱}{۳\sqrt{x}-۳}\Rightarrow D_{gof}=\underbrace{[۰,+\infty)}_{\text{به‌خاطر } \sqrt{x}}-\underbrace{\{۱\}}_{\text{ریشهٔ مخرج}}$$

۸۸ | ۱ از تابع $f(x)=\begin{cases}۳+x^۲ & ; |x|<۴\\ ۴ & ; |x|>۴\end{cases}$ نتیجه می‌گیریم:

$$f(x)=\begin{cases}۳+x^۲ & ; -۴<x<۴\\ ۴ & ; x<-۴ \text{ یا } x>۴\end{cases}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-۴,۴\}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$D_{fof}=\{x\in D_f, f(x)\in D_f\}=\{x\ne\pm ۴, f(x)\ne\pm ۴\}$$

از آن‌جا که تابع f، همواره مثبت است، پس همواره $f(x)\ne -۴$ می‌باشد. بنابراین فقط $f(x)\ne ۴$ را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}\text{اگر } -۴<x<۴\Rightarrow f(x)=۳+x^۲ \xrightarrow{f(x)\ne ۴} ۳+x^۲\ne ۴\Rightarrow x^۲\ne ۱ \xrightarrow{\text{جذر}} |x|\ne ۱\Rightarrow x\ne\pm ۱ \xrightarrow{\cap(-۴<x<۴)} x\in(-۴,۴)-\{\pm ۱\}\quad (۱)\\ \text{اگر } x<-۴ \text{ یا } x>۴\Rightarrow f(x)=۴ \xrightarrow{f(x)\ne ۴} ۴\ne ۴ \text{ غیرقابل‌قبول}\Rightarrow\varnothing\quad (۲)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} D_{fof}=\{x\ne\pm ۴, x\in(-۴,۴)-\{\pm ۱\}\}=(-۴,۴)-\{\pm ۱\}$$

۸۹ | **۱** می‌خواهیم ابتدا دامنهٔ تابع $((f-۲g)oh)(x)$ را تعیین کنیم. برای این‌کار به دامنهٔ $f-۲g$ نیاز داریم، بنابراین:

$$D_{f-۲g}=D_f\cap D_{۲g}=D_f\cap D_g=\{۱,۲,۳\}\cap\{۲,۳,۵\}=\{۲,۳\}\Rightarrow f-۲g=\{(۲,۱),(۳,۳)\}$$

$$\Rightarrow D_{(f-۲g)oh}=\{x\in D_h\mid \underbrace{h(x)\in D_{f-۲g}}\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x=۱\}=\{۱\}$$

$$\begin{cases}x^۲-۲x+۴=۲\Rightarrow x^۲-۲x+۲=۰\xrightarrow{\Delta<۰}\text{ریشهٔ حقیقی ندارد.}\\ x^۲-۲x+۴=۳\Rightarrow x^۲-۲x+۱=۰\Rightarrow(x-۱)^۲=۰\Rightarrow x=۱\end{cases}$$

با توجه به این‌که دامنهٔ تابع $(f-۲g)oh$ تک عضوی است، پس نتیجه می‌گیریم که این تابع، فقط یک عضو دارد.

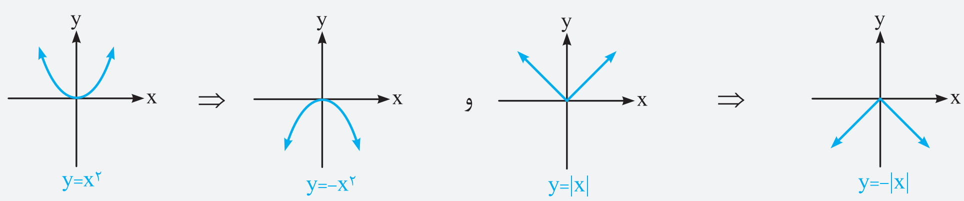
۹۰ | **۳** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

تبدیل نمودار توابع

در این قسمت روش رسم توابع $-f(x)$، $f(-x)$، $f(x+k)$، $f(x)+k$، $kf(x)$ و $f(kx)$ را از روی نمودار تابع $y=f(x)$ توضیح می‌دهیم:

① برای رسم نمودار $y=-f(x)$، اول نمودار $y=f(x)$ را بکشید و بعد نسبت به محور xها قرینه کنید.

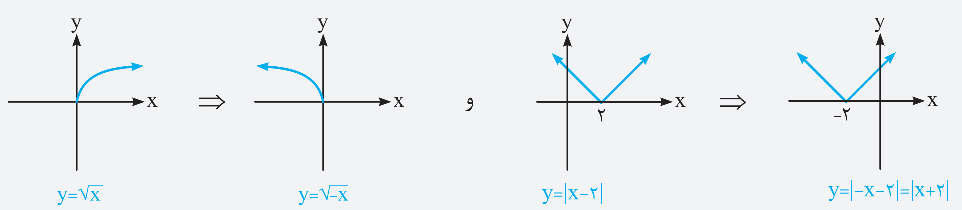
مثال



دامنهٔ این توابع تغییر نمی‌کند ولی برد آن‌ها از بازهٔ (a,b) به $(-b,-a)$ تغییر می‌کند.

② برای رسم نمودار $y=f(-x)$، اول نمودار $y=f(x)$ را بکشید و بعد نسبت به محور yها قرینه کنید.

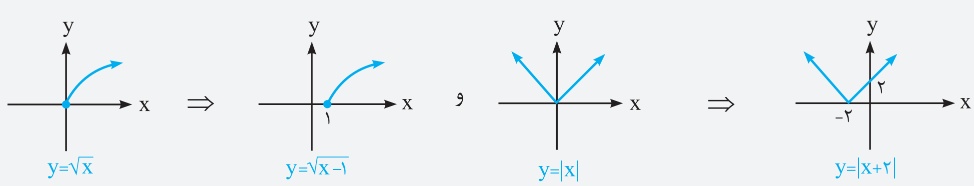
مثال



برد این توابع تغییر نمی‌کند ولی دامنهٔ آن‌ها از (a,b) به $(-b,-a)$ تغییر می‌کند.

③ برای رسم نمودار $y=f(x+k)$ $(k\in\mathbb{R})$ وقتی $k<۰$ است، نمودار $y=f(x)$ را k واحد به‌سمت راست و وقتی $k>۰$ است، نمودار $y=f(x)$ را k واحد به‌سمت چپ ببرید.

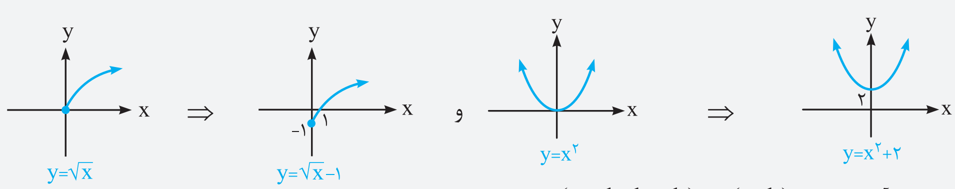
مثال



برد این توابع، تغییر نمی‌کند ولی دامنهٔ آن‌ها از بازهٔ (a,b) به $(a-k,b-k)$ تغییر می‌کند.

④ برای رسم نمودار $y=f(x)+k$ $(k\in\mathbb{R})$ وقتی $k>۰$ است، نمودار $y=f(x)$ را k واحد به‌سمت بالا و وقتی $k<۰$ است، نمودار $y=f(x)$ را k واحد به‌سمت پایین ببرید.

مثال



دامنهٔ این توابع تغییر نمی‌کند ولی برد آن‌ها از بازهٔ (a,b) به $(a+k,b+k)$ تغییر می‌کند.

gajmarket.com