به نام پروردگار مهربان

ریاضیات تجربی کنکور

عباس اشرفی، سنور حریری

لقمه طلایی
مهروماه

فهرست

فصل ۱	الگو و دنباله	۷
فصل ۲	اتحادها و عبارت‌های جبری	۱۸
فصل ۳	تعیین علامت و نامعادله	۲۶
فصل ۴	توان‌های گویا (ریشه و رادیکال)	۳۷
فصل ۵	هندسهٔ تحلیلی (خط)	۵۲
فصل ۶	معادلات گویا و گنگ	۶۱
فصل ۷	قدر مطلق	۷۱
فصل ۸	جزء صحیح (براکت)	۸۴
فصل ۹	معادله و تابع درجهٔ دوم	۹۱
فصل ۱۰	مثلثات	۱۱۳
فصل ۱۱	تابع	۱۴۲
فصل ۱۲	توابع نمایی و لگاریتمی	۱۶۹

فصل ۱۳ حد و پیوستگی ۱۸۳

فصل ۱۴ مشتق ۲۰۹

فصل ۱۵ کاربرد مشتق ۲۳۰

فصل ۱۶ هندسه ۲۴۷

فصل ۱۷ مقاطع مخروطی ۲۶۲

فصل ۱۸ احتمال ۲۸۰

فصل ۱۹ آمار ۲۹۷

پیوست: فرمول‌نامه ۳۰۷

فصل ۱۱
تابع

وعدهٔ ۱

مفهوم تابع و صورت‌های مختلف نمایش آن

یادآوری: زوج مرتب: هر دوتایی مانند (a, b) را که در آن ترتیب مهم است، **زوج مرتب** می‌نامیم. a مؤلفهٔ اول و b مؤلفهٔ دوم نامیده می‌شود. برای تساوی دو زوج مرتب باید هم مؤلفه‌های اول و هم مؤلفه‌های دوم با هم برابر باشند.

$$(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow x = a, y = b$$

رابطه: اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، هر رابطه از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، مجموعه‌ای است شامل زوج مرتب‌هایی به‌صورت (a, b) که در آن مؤلفهٔ اول (a) از مجموعهٔ A و مؤلفهٔ دوم (b) از مجموعهٔ B انتخاب می‌شود.

تابع: یک تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A **دقیقاً** یک عضو از B نسبت داده می‌شود.
می‌توان چهار نمایش زیر را برای تابع در نظر گرفت:

۱. نمایش نمودار پیکانی تابع: یک رابطه که به‌صورت پیکانی از اعضای A به اعضای B نمایش داده می‌شود؛ این رابطه در صورتی تابع است که از هر عضو مجموعهٔ A فقط یک پیکان خارج شده باشد.

۲. نمایش زوج مرتبی تابع: اگر یک رابطه به‌صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن، مؤلفهٔ اول یکسان نداشته باشند.

۳. نمایش هندسی تابع: یک نمودار رسم‌شده در دستگاه مختصات را تابع می‌گوییم، هرگاه هر خط به موازات محور y ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

۴. نمایش ضابطه‌ای تابع: در حالت کلی، ضابطه‌ای مانند $y = f(x)$، در صورتی می‌تواند یک تابع باشد که به‌ازای هر x، حداکثر یک مقدار برای y تولید کند.

تست: رابطهٔ $R = \{(۳, m^۲), (۲, ۱), (-۲, m), (۳, m+۲), (m, ۴)\}$ به‌ازای کدام مقدار m یک تابع است؟ (تجربی خارج ۸۵)

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۲
۴) هیچ مقدار m

پاسخ گزینهٔ «۲»

دو زوج مرتب $(۳, m+۲)$ و $(۳, m^۲)$ مؤلفهٔ اول برابر دارند؛ پس باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز برابر باشد:

$$m^۲ = m + ۲ \Rightarrow m^۲ - m - ۲ = ۰ \Rightarrow (m-۲)(m+۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = ۲ \xrightarrow[\text{در } R]{\text{جای‌گذاری}} R = \{(۳,۴), (۲,۱), (-۲,۲), (۲,۴)\} \\ \text{تابع نیست.} \\ m = -۱ \xrightarrow[\text{در } R]{\text{جای‌گذاری}} R = \{(۳,۱), (۲,۱), (-۲,-۱), (-۱,۴)\} \\ \text{تابع است.} \end{cases}$$

چاشنی: ۱ معمولاً برای **رد کردن تابع** بودن یک ضابطه، از **مثال نقض** استفاده می‌کنیم، یعنی برای x عددی انتخاب می‌کنیم که به ازای آن دو یا چند مقدار متفاوت برای y به‌دست آید.

۲ **معمولاً** رابطه‌هایی که در آن‌ها y، قدرمطلق، توان زوج، جزءصحیح یا تابع مثلثاتی دارد، تابع نیستند، مگر در حالت‌های خاص.

تست: کدام‌یک از روابط زیر معرف یک تابع است؟

۱) $x^2+y^2=1$ ۲) $y^2+\sqrt{x+x^2}=0$

۳) $2^{|x|}=2^{|y|}$ ۴) $(-1)^y=(-1)^x$

پاسخ **گزینهٔ «۲»**

گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ را به کمک مثال نقض رد کرده و درستی گزینهٔ ۲ را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ «۱»: $x=0 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$ ×

گزینهٔ «۲»: $\underbrace{y^2}_{\text{نامنفی}}+\underbrace{\sqrt{x+x^2}}_{\text{نامنفی}}=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2=0 \Rightarrow y=0 \\ \sqrt{x-x^2}=0 \Rightarrow x-x^2=0 \\ \qquad \Rightarrow x(1-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \end{cases}$$

نمایش به‌صورت زوج مرتب: $\{(0,0),(1,0)\}$ ✓

گزینهٔ «۳»: $x=1 \Rightarrow 2^1=2^{|y|} \Rightarrow |y|=1 \Rightarrow y=\pm 1$ ×

گزینهٔ «۴»: $x=0 \Rightarrow (-1)^y=1$

از آن‌جایی‌که y هر عدد زوجی می‌تواند باشد، تابع نیست.

وعدهٔ ۲

دامنه و برد تابع

دامنه: بزرگ‌ترین مجموعه‌ای که یک **تابع** در آن **قابل تعریف** است، دامنهٔ تابع نامیده می‌شود.

وعدهٔ ۴

تساوی دو تابع

دو تابع f و g برابرند، هرگاه:

۱ دامنهٔ f و دامنهٔ g با هم برابر باشند.

۲ برای هر x از این دامنهٔ یکسان داشته باشیم: $f(x)=g(x)$

تست: کدام‌یک از توابع زیر با تابع $y=\log\frac{x-2}{x}$ برابر است؟ (تجربی خارج ۹۷)

۱) $\log(x-2)-\log x$

۲) $\log\frac{x^2-4}{x^2+2x}$

۳) $\frac{1}{2}\log(\frac{x-2}{x})^2$

۴) $2\log\sqrt{\frac{x-2}{x}}$

پاسخ گزینهٔ «۴»

دامنـهٔ تابـع داده‌شده $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ اسـت؛ دامنهٔ تک‌تک گزینه‌هـا را به‌دسـت می‌آوریم:

گزینهٔ «۱»: $\begin{cases}x-2>0\\x>0\end{cases}\Rightarrow(2,+\infty)$ ✗

گزینهٔ «۲»: $\frac{x^2-4}{x^2+2x}>0\Rightarrow(-\infty,0)\cup(2,+\infty)-\{-2\}$ ✗

گزینهٔ «۳»: $(\frac{x-2}{x})^2>0\Rightarrow(-\infty,+\infty)-\{0\}$ ✗

گزینهٔ «۴»: $\sqrt{\frac{x-2}{x}}>0\Rightarrow(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ ✓

حال نشان می‌دهیم ضابطهٔ دو تابع با هم برابر است:

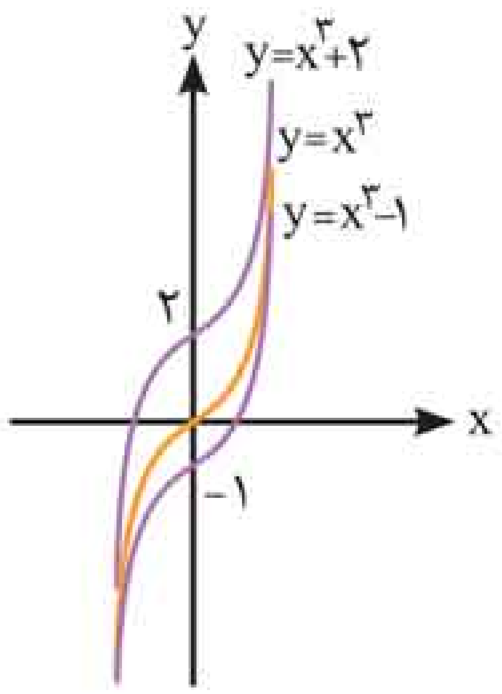
$$\checkmark \quad ۲\log\sqrt{\frac{x-۲}{x}} = ۲\log\left(\frac{x-۲}{x}\right)^{\frac{۱}{۲}} = \log\frac{x-۲}{x}$$

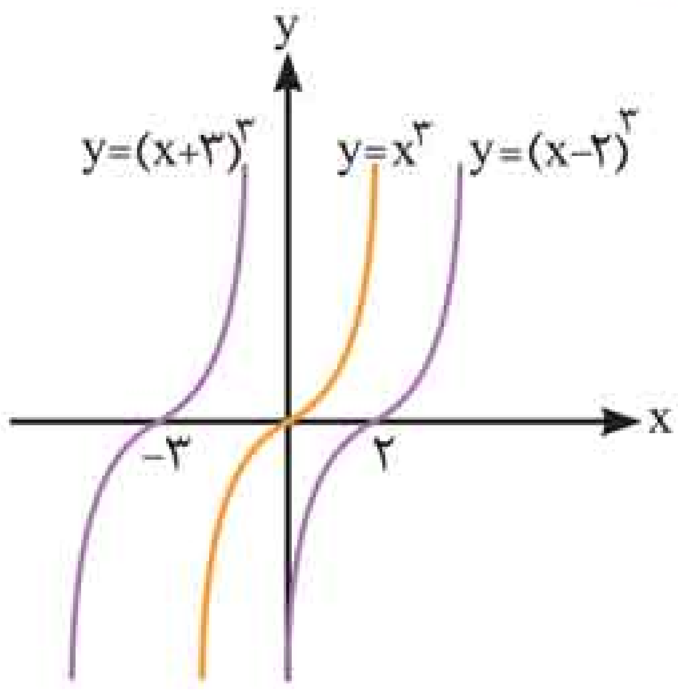
وعدهٔ ۵

رسم نمودار به کمک انتقال

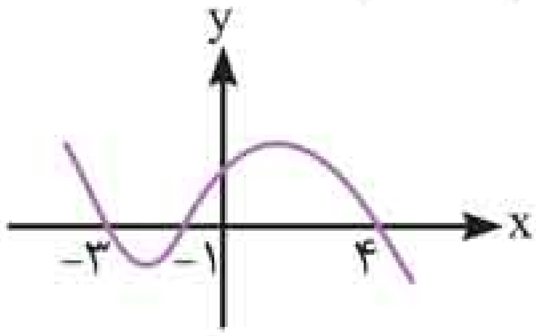
۱. **انتقال افقی:** برای رسم نمودار تابع $y=f(x-k)$ و $y=f(x+k)$ $(k>۰)$ از روی نمودار $y=f(x)$، نمودار تابع f را k واحد **به سمت راست** (برای $y=f(x-k)$) و k واحد **به سمت چپ** (برای $y=f(x+k)$) انتقال می‌دهیم.

۲. **انتقال عمودی:** برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+k$ و $y=f(x)-k$ $(k>۰)$ از روی نمودار $y=f(x)$، نمودار تابع f را k واحد **به سمت بالا** (برای $y=f(x)+k$) و k واحد **به سمت پایین** (برای $y=f(x)-k$) انتقال می‌دهیم.





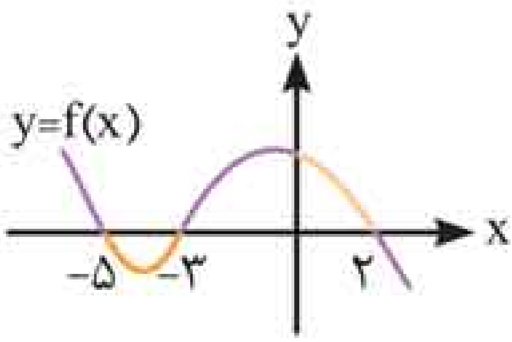
تست: شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x-۲)$ است. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\sqrt{x\,f(x)}$ کدام است؟



۱) $[-۱,۱]\cup[۰,۶]$
۲) $[-۳,۱]\cup[۰,۲]$
۳) $[-۵,-۳]\cup[-۱,۲]$
۴) $[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$

پاسخ گزینهٔ «۴»

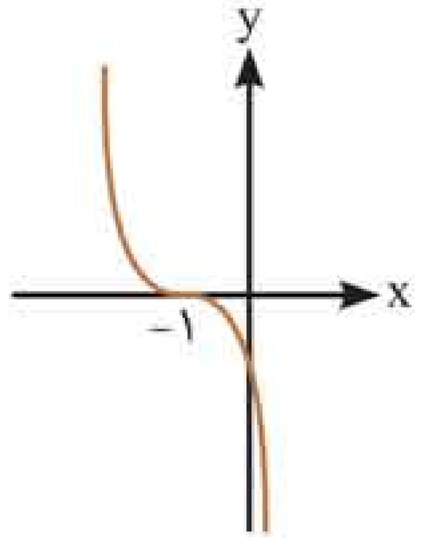
برای رسم نمودار $y = f(x)$، باید نمودار $f(x-۲)$ را دو واحد به سمت چپ منتقل کنیم:



برای پیدا کردن دامنهٔ تابع $\sqrt{x\,f(x)}$، باید $x\,f(x) \geq ۰$ باشد. $f(x) = y$ است؛ پس باید $xy \geq ۰$ باشد، یعنی x و y هر دو هم‌علامت‌اند که در ناحیه‌های اول و سوم این اتفاق می‌افتد؛ پس مجموعهٔ طول بخش‌هایی از نمودار که در ربع اول و سوم قرار دارند، جواب مسئله است. $D = [-۵,-۳]\cup[۰,۲]$

چاشنی: مرکز تقارن تابع $f(x) = x^۳$، مبدأ مختصات است و اگر نمودار این تابع را a واحد در راستای افقی و b واحد در راستای قائم انتقال دهیم، مرکز تقارن تابع جدید نقطهٔ $(a\,,\,b)$ می‌شود.

تست: اگـر نمـودار تابـع $f(x)=-3x^3+ax^2+bx+c$ به شکل زیر باشد، a کدام است؟



۱) ۶

۲) ۹

۳) -6

۴) -9

پاسخ گزینهٔ «۴»

با توجه به نمودار، مرکز تقارن تابع $f(x)$ نسبت به مرکز تقارن تابع $y=x^3$، یک واحد به سمت چپ منتقل شده و با توجه به ضریب -3 در $-3x^3$، متوجه می‌شویم ضابطهٔ تابع به فرم $f(x)=-3(x-(-1))^3$ است؛ بنابراین:

$$f(x)=-3(x+1)^3=-3x^3-9x^2-9x-3$$

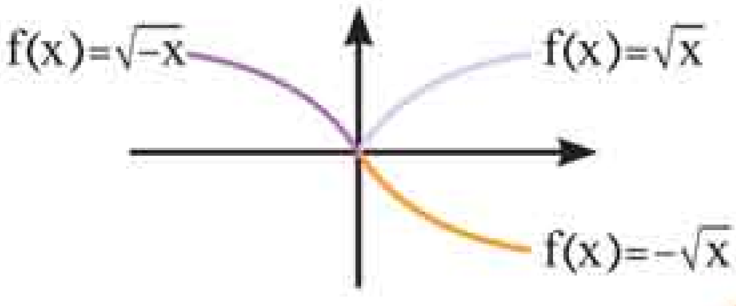
از برابـری ضابطـهٔ مربوط به فرض مسـئله و ضابطهٔ به‌دسـت آمده در بالا مقـدار a (ضریب x^2) -9 به‌دسـت می‌آید.

وعدهٔ ۶

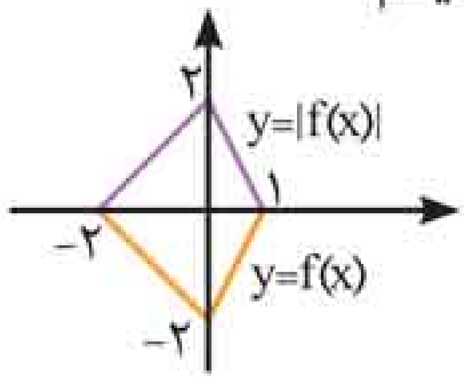
انواع تقارن روی نمودار توابع

۱. **رسـم نمـودار $y=f(-x)$ از روی نمـودار $y=f(x)$:** نمـودار $y=f(x)$ را نسـبت بـه محور y هـا قرینـه می‌کنیـم.

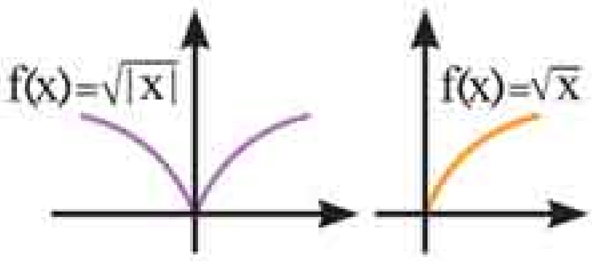
۲. **رسـم نمـودار $y=-f(x)$ از روی نمـودار $y=f(x)$:** نمـودار $y=f(x)$ را نسـبت بـه محور x هـا قرینـه می‌کنیـم.



۳. رسم نمودار $y=|f(x)|$ از روی نمودار $y=f(x)$: بخشی از نمودار تابع $y=f(x)$ را که در زیر محور x ها قرار دارد حذف کرده و قرینهٔ آن را نسبت به محور x ها رسم می‌کنیم.



۴. رسم نمودار $y=f(|x|)$ از روی نمودار $y=f(x)$: بخشی از نمودار تابع $y=f(x)$ را که در سمت چپ محور y ها قرار دارد، حذف کرده و قرینهٔ سمت راست آن را نسبت به محور y ها در سمت چپ رسم می‌کنیم.



وعدهٔ ۷

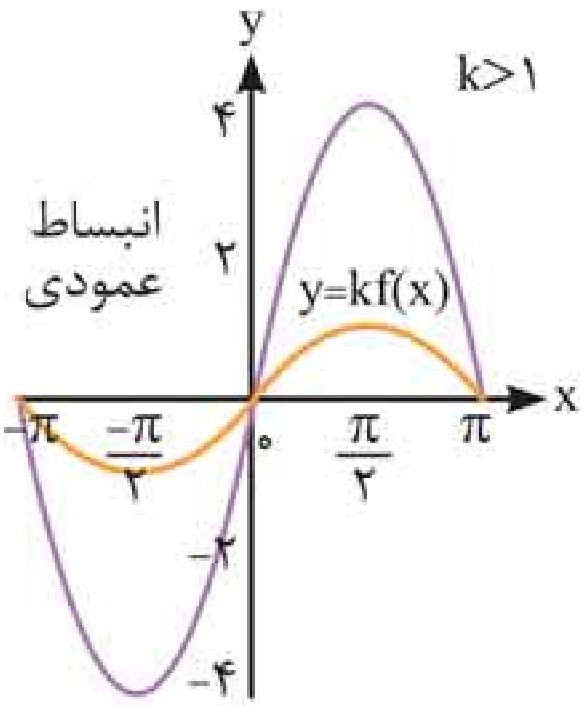
انبساط و انقباض نمودارها

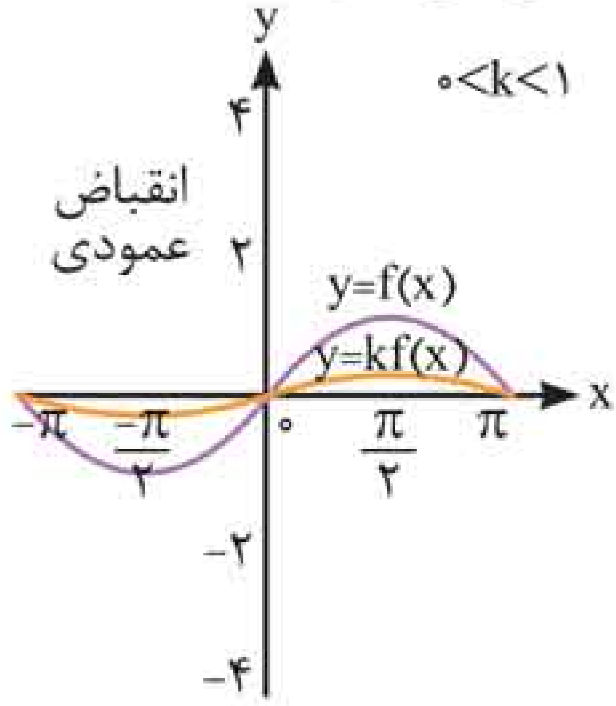
۱. $y=kf(x)$ (انبساط و انقباض عمودی): برای رسم نمودار $y=kf(x)$ از روی نمودار $y=f(x)$ با توجه به مقدار k حالت‌های زیر را داریم:

الف. $k>1$: نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k کشیده می‌شود. (انبساط عمودی)

ب. $0<k<1$: نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k جمع می‌شود. (انقباض عمودی)

پ. $k < 0$: در این حالت ابتدا نمودار $f(x)$ نسبت به محور x ها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $|k|$ به‌طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.





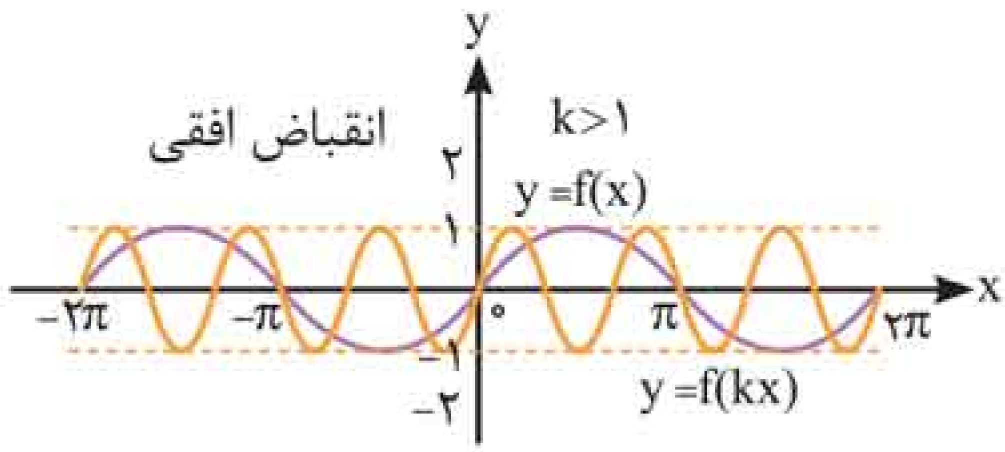
تذکر: دامنهٔ تابع $y = kf(x)$ همان دامنهٔ تابع $f(x)$ است، ولی برد آن الزاماً با برد $f(x)$ یکی نیست.

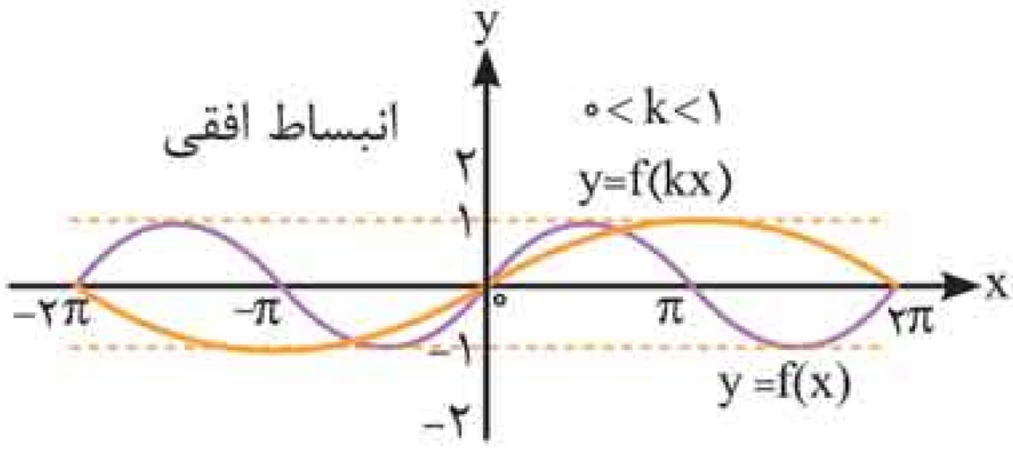
۲. $y = f(kx)$ (انبساط و انقباض افقی): برای رسم نمودار $y = f(kx)$ از روی نمودار $y = f(x)$ با توجه به مقدار k حالت‌های زیر را داریم:

الف. $k > 1$: نمودار $f(x)$ در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ جمع می‌شود. (انقباض افقی)

ب. $0 < k < 1$: نمودار $f(x)$ در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود. (انبساط افقی)

پ. $k < 0$: در این حالت ابتدا نمودار $f(x)$ نسبت به محور y ها قرینه می‌شود؛ سپس با ضریب $|\frac{1}{k}|$ منبسط یا منقبض می‌شود.

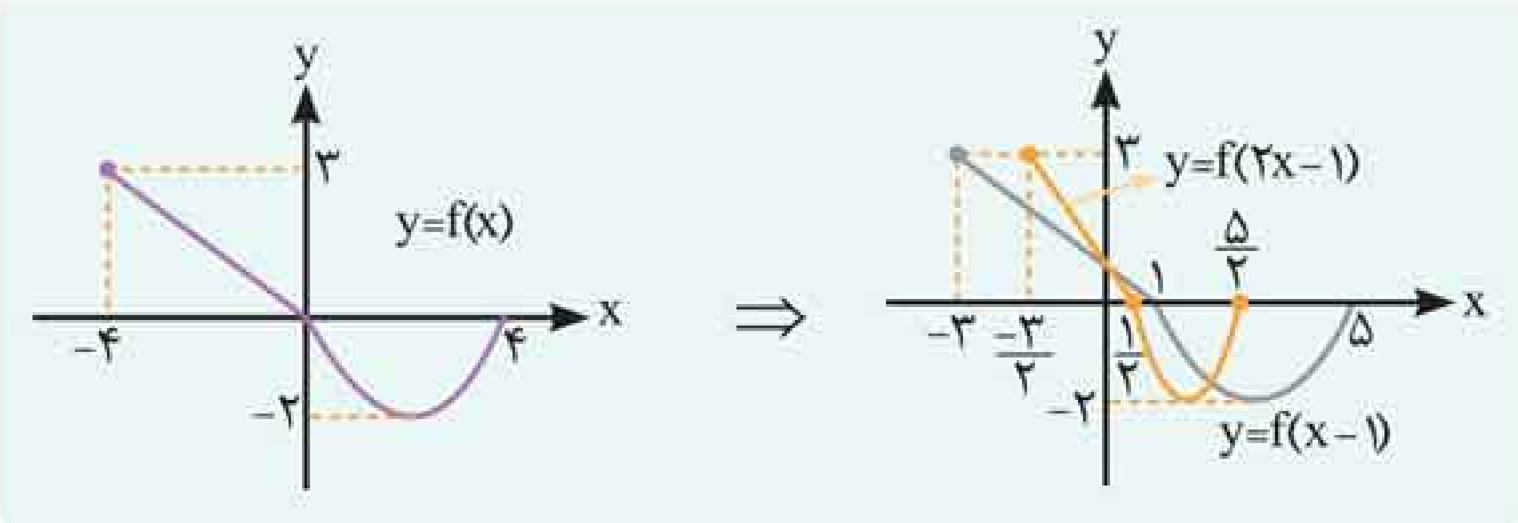




تذکر: بـرد تابـع $y = f(kx)$ همان بـرد تابع $f(x)$ اسـت؛ ولی دامنهٔ آن الزاماً با دامنهٔ $f(x)$ یکی نیست.

چاشنی: ۱ رفتـار x، عوضـی ☺ اسـت؛ یعنـی بـرای رسـم نمودار $f(۲x)$، x هـا را در $\frac{۱}{۲}$ و برای رسـم نمودار $f(\frac{۱}{۲}x)$، x ها را در ۲ ضرب می‌کنیم.

۲ برای رسم نمودار $y = f(ax + b)$ از روی نمودار $y = f(x)$ ابتدا نمودار $f(x)$ را b واحد به سمت راست یا چپ (با توجه به علامت b) منتقل می‌کنیم؛ سپس نمودار به‌دست آمده را با ضریب $\frac{۱}{a}$ منبسط یا منقبض می‌کنیم. برای نمونه، نمودار $y = f(۲x - ۱)$ را از روی نمودار $y = f(x)$ رسم می‌کنیم:



تست: **قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟**

(تجربی خارج ۹۷)

۱) -۲

۲) $۰/۵$

۳) ۱

۴) $۱/۵$

پاسخ **گزینهٔ «۳»**

$$\begin{cases} x \to -x \text{ :قرینه نسبت به محور y ها} \\ x \to x-۲ \text{ :انتقال ۲ واحدی به سمت x های مثبت} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y=f(-(x-۲))=\sqrt{-x+۲}$$

ضابطهٔ به‌دست آمده را با نیمساز ربع اول و سوم $(y=x)$ تلاقی می‌دهیم:

$$x=\sqrt{-x+۲} \Rightarrow x^۲+x-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ & \checkmark \\ x=-۲ & \times \end{cases}$$

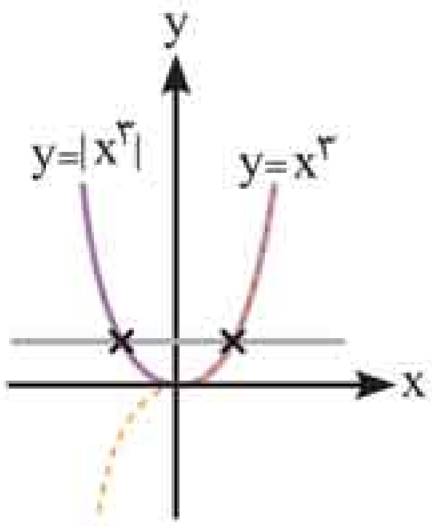
فقط $x=۱$ در این معادله صدق می‌کند.

تست: تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x^3|$، با دامنهٔ $\mathbb{R}$، چگونه است؟ (تجربی ۹۵)

۱) نزولی ۲) صعودی ۳) وارون‌ناپذیر ۴) یک‌به‌یک

پاسخ گزینهٔ «۳»

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



از نمودار مشخص است که تابع یک‌به‌یک نیست؛ پس وارون‌ناپذیر است. این تابع در بازهٔ $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

وعدهٔ ۱۰
اعمال جبری روی توابع

اگر f و g دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند، در این‌صورت جمع، تفریق، ضرب و تقسیم آن‌ها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ضابطه	تعریف دامنه
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D_{f+g}=D_f \cap D_g$
$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$D_{f-g}=D_f \cap D_g$
$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$	$D_{f\cdot g}=D_f \cap D_g$
$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}}=D_f \cap D_g-\{x \mid g(x)=0\}$

چاشنی: در توابعی که نمایش زوج مرتبی دارند، کافی است با توجه به دامنهٔ عمل تعریف‌شده، عملیات خواسته‌شده را فقط روی عرض نقاط انجام دهیم.

تست: با توجه به توابع f و g مقدار $\dfrac{۲f(۱)-۳g(۳)}{(f\cdot g)(۲)+۸}$ کدام است؟

$$f=\{(۱,-۲),(۲,۳),(۳,-۴)\}$$

$$g=\{(۱,-۵),(۲,-۶),(۳,۰)\}$$

۱) $-\dfrac{۳}{۵}$ ۲) $\dfrac{۲}{۵}$ ۳) $-\dfrac{۲}{۵}$ ۴) $\dfrac{۳}{۵}$

پاسخ گزینهٔ «۲»

$$f(۱)=-۲\,,\,g(۳)=۰\,,\,f(۲)=۳\,,\,g(۲)=-۶$$

$$(f\cdot g)(۲)=f(۲)\cdot g(۲)=۳\times(-۶)=-۱۸$$

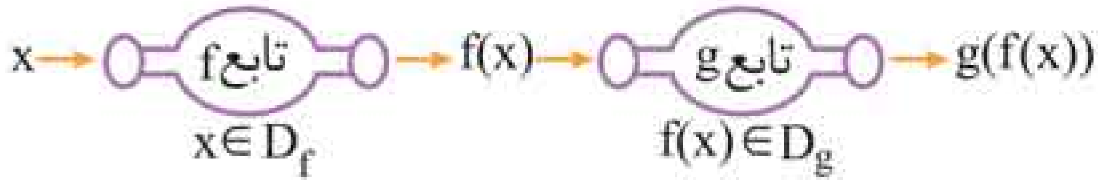
بنابراین:

$$\frac{۲\times(-۲)-۳\times۰}{-۱۸+۸}=\frac{-۴}{-۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

وعدهٔ ۱۱

ترکیب توابع

اگر f و g دو تابع باشند به‌طوری که اشتراک برد f و دامنهٔ g غیرتهی باشد، تابع $g(f(x))$ را به‌صورت $(gof)(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را ترکیب g با f می‌نامیم.



تست: در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x-\sqrt{x+۴} & ; x>۳ \\ ۲x+۳ & ; x\leq ۳ \end{cases}$
مقدار $f(f(۵))+f(f(۱))$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ گزینهٔ «۴»

از داخلی‌ترین پرانتز شروع به ساده‌کردن عبارت می‌کنیم:

$$f(۵)=۵-\sqrt{۵+۴}=۵-۳=۲$$

$$f(f(۵))=f(۲)=۲(۲)+۳=۷$$

$$f(۱)=۲(۱)+۳=۵ \Rightarrow f(f(۱))=f(۵)=۲$$

بنابراین:

$$f(f(۵))+f(f(۱))=۷+۲=۹$$

تست: دو تابع $f=\{(۲,۵),(۶,۳),(۳,۷),(۴,۱),(۱,۹)\}$ و $g(x)=\frac{x}{x-۱}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-۱}(g(۲a))=۶$ باشد، a کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ گزینهٔ «۲»

$g(۲a)$ را b فرض می‌کنیم؛ پس:

$$f^{-۱}(b)=۶$$

$$\Rightarrow (b,۶)\in f^{-۱} \Rightarrow (۶,b)\in f$$

با توجه به تابع f چون $(۶,۳)\in f$، $b=۳$ است؛ بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} b=g(۲a) \\ b=۳ \end{array}\right\} \Rightarrow g(۲a)=\frac{۲a}{۲a-۱}=۳$$

$$\Rightarrow ۶a-۳=۲a \Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

چاشنی: برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع مرکب $(fog)(x) = f(g(x))$ کافی است هر کجا در ضابطهٔ تابع $f(x)$، x دیدیم، به جای آن، ضابطهٔ $g(x)$ را جایگزین کنیم.

تست: اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x+4$ باشند، جواب معادلهٔ $(gof)x = (fog)(x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $-1, -7$ ۲) $1, -7$ ۳) $-1, 7$ ۴) $1, 7$

پاسخ گزینهٔ «۱»

$$(gof)(x) = \frac{2x-1}{x+2} + 4 = \frac{6x+7}{x+2}$$

$$(fog)(x) = \frac{2(x+4)-1}{(x+4)+2} = \frac{2x+7}{x+6}$$

$$\frac{6x+7}{x+2} = \frac{2x+7}{x+6} \Rightarrow 4x^2 + 32x + 28 = 0$$

$$\Rightarrow 4(x+1)(x+7) = 0 \Rightarrow x = -1, x = -7$$

چاشنی: هرگاه ضابطه‌های دو تابع $(fog)(x)$ و $g(x)$ را در اختیار داشته باشیم و بخواهیم ضابطهٔ تابع $f(x)$ را محاسبه کنیم، از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم، به این ترتیب که:

۱) $g(x)$ را t در نظر می‌گیریم: $f(g(x)) = f(t)$

۲) با داشتن $t = g(x)$، x را برحسب t به‌دست می‌آوریم.

۳) t را در ضابطهٔ $(fog)(x)$ جای‌گذاری کرده و $f(t)$ یا همان $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

تست: اگر $f(2x-3)=4x^2-14x+13$ باشد، ضابطهٔ $f(x)$، برابر کدام است؟ (تجربی خارج ۹۷)

۱) x^2+x+3
۲) x^2-2x-1
۳) x^2-2x+1
۴) x^2-x+1

پاسخ گزینهٔ «۴»

$$2x-3=t \Rightarrow x=\frac{t+3}{2}$$

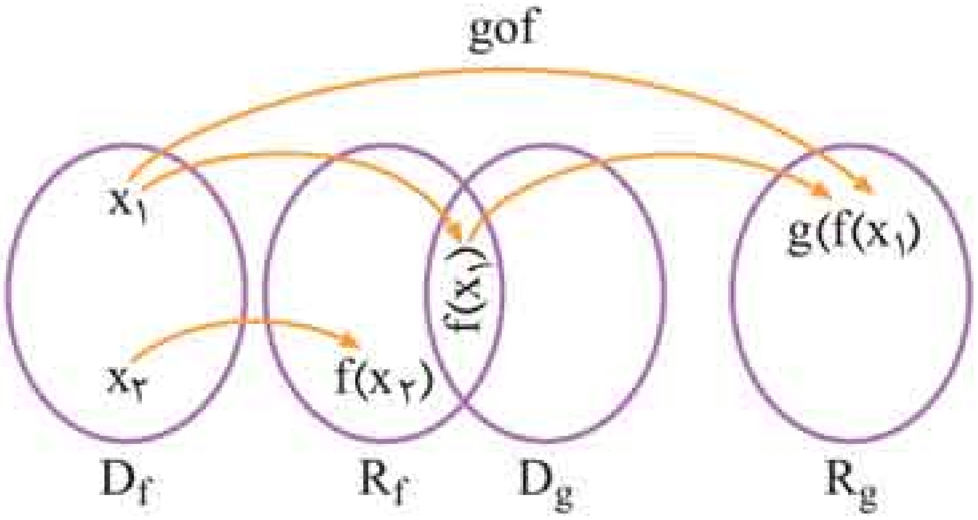
$$f(t)=4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2-14\left(\frac{t+3}{2}\right)+13=t^2-t+1$$

$$\Rightarrow f(x)=x^2-x+1$$

دامنهٔ تابع مرکب: دامنـهٔ تابـع مرکـب $gof(x)$، مجموعه x هایـی اسـت کـه هم‌زمـان در دو شـرط زیـر صـدق کننـد:

۱ x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

۲ $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.



$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

فصل ۱۵
کاربرد مشتق

وعدهٔ ۱
آهنگ تغییر

اگر نقاط $A(x_1 , f(x_1))$ و $B(x_2 , f(x_2))$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار داشته باشند به نسبت تغییرات عرض‌های دو نقطه به تغییرات طول‌های آن‌ها، آهنگ متوسط تغییر تابع می‌گوییم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

اگر نقطهٔ $A(x_1 , f(x_1))$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار داشته باشد، آهنگ لحظه‌ای تغییر در این نقطه، $f'(x_1)$ است.

چاشنی: آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر در یک نقطه با مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابر است.

تست: نقطه‌ای روی نمودار $f(x) = \sqrt{x}$ در حال دور شدن از مبدأ است. آهنگ متوسط تغییرات تابع در بازهٔ $[0 , 9]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییرات در کدام نقطه برابر است؟

۱) $(4 , 2)$
۲) $(1 , 1)$
۳) $(\frac{9}{4} , \frac{3}{2})$
۴) $(\frac{4}{9} , \frac{2}{3})$

پاسخ گزینهٔ «۳»

آهنگ متوسط تغییرات تابع را بین $x_1 = ۰$ و $x_2 = ۹$ محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(۹)-f(۰)}{۹-۰}=\frac{\sqrt{۹}-\sqrt{۰}}{۹-۰}=\frac{۱}{۳}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییرات تابع در نقطهٔ x_0 برابر $f'(x_0)$ است؛ بنابراین:

$$f'(x_0)=\frac{۱}{۲\sqrt{x_0}}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\sqrt{x_0}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow x_0=\frac{۹}{۴}$$

تست: آهنگ تغییرات لحظه‌ای تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ در یک بازه، از آهنگ تغییر متوسط آن در بازهٔ $[-۸\,,\,۸]$ بیشتر است. بزرگ‌ترین بازه کدام است؟

۱) $(\frac{-۸}{۳\sqrt{۳}}\,,\,\frac{۸}{۳\sqrt{۳}})$
۲) $(\frac{-۴}{۳\sqrt{۳}}\,,\,\frac{۴}{۳\sqrt{۳}})$
۳) $(\frac{-۲}{۳\sqrt{۳}}\,,\,\frac{۲}{۳\sqrt{۳}})$
۴) $(\frac{-۱}{۳\sqrt{۳}}\,,\,\frac{۱}{۳\sqrt{۳}})$

پاسخ گزینهٔ «۱»

آهنگ تغییر متوسط تابع را بین $x_1 = -۸$ و $x_2 = ۸$ به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(۸)-f(-۸)}{۸-(-۸)}=\frac{\sqrt[3]{۸}-\sqrt[3]{-۸}}{۸-(-۸)}=\frac{۲+۲}{۱۶}=\frac{۱}{۴}$$

اگر آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطهٔ x_0 از $\frac{۱}{۴}$ بیشتر باشد، باید مشتق تابع در این نقطه از $\frac{۱}{۴}$ بزرگ‌تر باشد؛ بنابراین:

کاربرد مشتق

وعدهٔ ۲

آزمون یکنوایی تابع

اگـر در یـک بـازه از دامنهٔ f مقـدار f' موجود و مثبت (نامنفی) باشـد، آن‌گاه f در آن بـازه اکیـداً صعودی (صعودی) اسـت.

اگـر در یـک بـازه از دامنهٔ f مقـدار f' موجود و منفی (نامثبت) باشـد، آن‌گاه f در آن بـازه اکیـداً نزولی (نزولی) اسـت.

تست: بزرگ‌تریـن بازهٔ بـازی که تابـع $f(x)=\frac{x}{x^۲+۱}$ در آن اکیداً صعودی است، کدام است؟

۱) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $(-\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۲})$ ۴) $(-۲,۲)$

پاسخ گزینهٔ «۲»

از تابع پیوستهٔ $f(x)$ مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{۱(x^۲+۱)-۲x(x)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۱-x^۲}{(x^۲+۱)^۲}$$

برای اکیداً صعودی بودن تابع، مشتق باید مثبت باشد؛ بنابراین:

$$۱-x^۲>۰\Rightarrow x^۲<۱\Rightarrow -۱<x<۱$$

تست: تابـع f با ضابطهٔ $f(x)=x^۳+ax^۲+x$ همـواره اکیداً صعودی است. تغییرات a کدام است؟

۱) $۰\le a\le ۲$

۲) $-\sqrt{۳}\le a\le ۲$

۳) $|a|\le\sqrt{۳}$

۴) $|a|\le ۲$

پاسخ گزینهٔ «۳»

چون تابع f اکیداً صعودی است، مشتق تابع باید همواره نامنفی باشد؛

بنابراین: $f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax + ۱ \geq ۰$

تابع درجهٔ دوم، زمانی همواره نامنفی است که ضریب $x^۲$ آن مثبت و دلتای آن نامثبت باشد؛ یعنی: $x^۲$ ضریب > ۰ , $\Delta \leq ۰$

بنابراین: $\begin{cases} ۴a^۲ - ۱۲ \leq ۰ \Rightarrow a^۲ \leq ۳ \Rightarrow |a| \leq \sqrt{۳} \\ ۳ > ۰ \end{cases}$

چاشنی: تابع کسری در هر بازه که شامل ریشهٔ مخرج باشد، غیریکنواست.

برای نمونه ریشه‌های مخرج تابع $f(x) = \frac{۱}{x^۲ - ۱}$ ، $x = \pm ۱$ است؛

بنابراین تابع در بازه‌هایی مانند $(-۲,۰)$ یا $(-۱,۳)$ یا هر بازه‌ای که شامل $x = ۱$ یا $x = -۱$ باشد، نه صعودی و نه نزولی است.

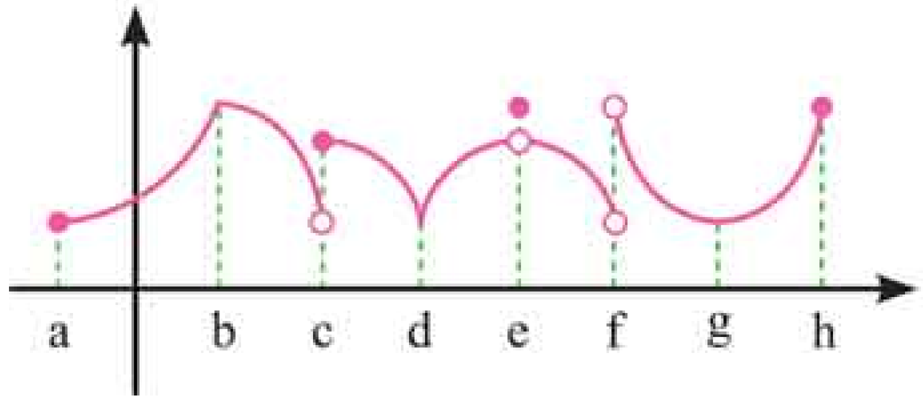
وعدهٔ ۳

نقطهٔ بحرانی

یک نقطهٔ بحرانی برای تابع f ، نقطه‌ای به طول c از دامنهٔ تابع f است، به‌طوری که مشتق تابع در $x = c$ برابر صفر شود یا موجود نباشد.

چاشنی: نقاط ابتدا و انتهای بازه، نقاط بحرانی نیستند.

تست: اگر نمودار f به‌صورت زیر باشد، تابع چند نقطهٔ بحرانی دارد؟



۱) سه

۲) چهار

۳) پنج

۴) شش

پاسخ گزینهٔ «۳»

a : نقطهٔ ابتدای بازه است و بحرانی نیست.

b : نقطهٔ گوشه‌ای است و مشتق‌ناپذیر و بحرانی است.

c : نقطهٔ ناپیوستگی است و مشتق‌ناپذیر و بحرانی است.

d : نقطهٔ بازگشت و مشتق‌ناپذیر و بحرانی است.

e : نقطهٔ ناپیوستگی است و مشتق‌ناپذیر و بحرانی است.

f : جزء دامنهٔ تابع نیست و بحرانی محسوب نمی‌شود.

g : در این نقطه مشتق صفر است و بحرانی است.

h : نقطهٔ انتهای بازه است و بحرانی نیست.

در مجموع تابع f، پنج نقطهٔ بحرانی دارد.

تست: تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x) = \frac{x^۳}{۳} - \frac{۳x^۲}{۲} + ۲x - ۵$ کدام است؟

۱) یک　　۲) دو

۳) سه　　۴) چهار

پاسخ گزینهٔ «۲»

وعدهٔ ۵

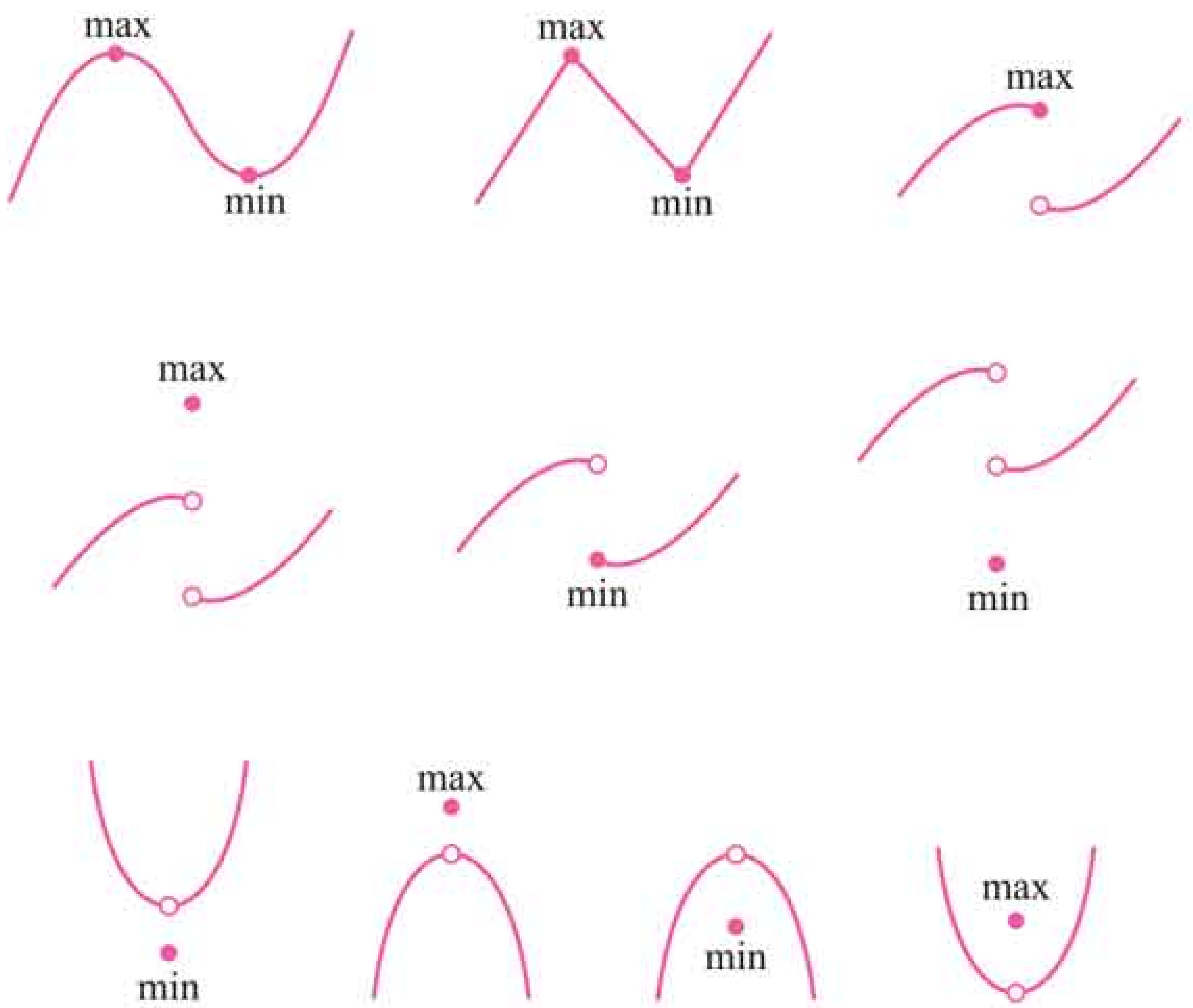
اکسترمم‌های نسبی

اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطهٔ c (بازهٔ باز شامل نقطهٔ c) باشد که،

الف به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$، در این‌صورت $f(c)$ را یک ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

ب به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \geq f(c)$، در این‌صورت $f(c)$ را یک مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

به زبان ساده‌تر اگر عرض نقطه‌ای نسبت به نقاط اطرافش کمتر یا مساوی باشد، به آن نقطه مینیمم نسبی و اگر بیشتر یا مساوی باشد، به آن نقطه ماکزیمم نسبی می‌گوییم. به شکل‌های زیر توجه کنید:



مقادیر تابع را در $x = ۱$ و $x = -۱$ به‌دست می‌آوریم:

$$f(۱) = \frac{۱}{۲} \ , \ f(-۱) = -\frac{۱}{۲}$$

تابع f همواره پیوسته است؛ پس مقدار بزرگ‌تر یعنی $y = \frac{۱}{۲}$ مربوط به ماکزیمم نسبی است.

تذکر: دقت کنید که منظور از ماکزیمم یا مینیمم تابع، عرض آن است.

ارتباط اکسترمم نسبی با مشتق

گفتیم که طبق قضیهٔ فرما «هرگاه تابع f در نقطه‌ای به طول c، ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آن‌گاه $f'(c) = ۰$ است.» اما **عکس قضیه درست نیست؛** یعنی ممکن است در نقطه‌ای از تابعِ مشتق‌پذیرِ f، مشتق برابر صفر شود، ولی آن نقطه اکسترمم نسبی نباشد. مانند تابع $f(x) = x^۳$ که مشتق آن در $x = ۰$، برابر صفر است، ولی تابع در این نقطه اکسترمم نسبی ندارد.

چاشنی: برای اینکه تابع‌های پیوسته در نقطه‌ای اکسترمم نسبی (موضعی) داشته باشند، باید یکنوایی تابع، قبل و بعد از آن نقطه تغییر کند.

اگر جدول تغییر علامت مشتق یک تابع پیوسته در اطراف نقطه‌ای مانند $x_۰$ به یکی از صورت‌هایی که در صفحهٔ بعد آمده باشد، آن نقطه مینیمم تابع است.

x		$x_\circ$	
$f'(x)$	$-$	$\parallel$	$+$
	↘		↗

x		$x_\circ$	
$f'(x)$	$-$	$\circ$	$+$
	↘		↗

اگر جدول تغییر علامت مشتق یک تابع پیوسته در اطراف نقطه‌ای مانند $x_\circ$ به یکی از صورت‌های زیر باشد، آن نقطه ماکزیمم تابع است.

x		$x_\circ$	
$f'(x)$	$+$	$\parallel$	$-$
	↗		↘

x		$x_\circ$	
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$
	↗		↘

تست: ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=x^{۳}-x^{۲}-x+۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۵۹}{۲۷}$ ۲) $\frac{۲۷}{۵۹}$ ۳) صفر ۴) ۱

پاسخ گزینهٔ «۱»

از تابع مشتق می‌گیریم و ریشه‌های آن را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۳x^{۲}-۲x-۱=\circ$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳}(۳x-۳)(۳x+۱)=\circ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=-\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

جدول تغییر علامت مشتق تابع را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۳}$		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$	
		↗	max	↘	min	↗	

پیوست
فرمول‌نامه

الگو و دنباله

۱ جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی: $t_n = t_۱ + (n-۱)d$

۲ قدر نسبت دنبالهٔ حسابی با جملات t_n و t_m $(n \neq m)$:

$$d = \frac{t_n - t_m}{n - m}$$

۳ جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی: $t_n = t_۱ r^{n-۱}$

۴ قدرنسبت دنبالهٔ هندسی با جملات t_n و t_m $(n \neq m)$:

$$r^{n-m} = \frac{t_n}{t_m}$$

اتحادها و عبارت‌های جبری

اتحاد مربع دوجمله‌ای ۱ $(a \pm b)^۲ = a^۲ \pm ۲ab + b^۲$

اتحاد مزدوج ۲ $(a+b)(a-b) = a^۲ - b^۲$

اتحاد جمله مشترک ۳ $(x+a)(x+b) = x^۲ + (a+b)x + ab$

اتحاد مکعب دوجمله‌ای ۴ $(a \pm b)^۳ = a^۳ \pm ۳a^۲b + ۳ab^۲ \pm b^۳$

اتحاد چاق و لاغر ۵ $(a \pm b)(a^۲ \mp ab + b^۲) = a^۳ \pm b^۳$

تعیین علامت و نامعادله

$$A \geq B \xrightarrow[C \in \mathbb{R}]{+C} A + C \geq B + C$$

$$A \geq B \xrightarrow[C > ۰]{\times C} CA \geq CB \qquad A \geq B \xrightarrow[C < ۰]{\times C} CA \leq CB$$

مثلثات

۱ رابطهٔ تبدیل رادیان و درجه:

$$\text{زاویه به درجه} \leftarrow \frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi} \rightarrow \text{زاویه به رادیان}$$

۲ در دایره‌ای به شعاع r، طول کمان (ℓ) روبه‌رو به زاویهٔ θ (رادیان) برابر است با:
$$\ell = r\times\theta$$

۳ مساحت مثلث ABC:

$$S=\frac{AB\times AC\times \sin A}{۲}=\frac{BC\times BA\sin B}{۲}=\frac{AC\times CB\sin C}{۲}$$

۴ مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر نصف حاصل‌ضرب دو قطر در سینوس زاویهٔ بین آن‌هاست.

۵ اتحادهای مثلثاتی:

الف) $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$

ب) $\tan\alpha=\frac{۱}{\cot\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

پ) $۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$

ت) $۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$

ث) $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$

ج) $\cos ۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$

چ) $\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$

۶ معادلات مثلثاتی:

الف) $\sin x=\sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\alpha \\ x=۲k\pi+\pi-\alpha \end{cases} \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$

ب) $\cos x=\cos\alpha \Rightarrow x=۲k\pi\pm\alpha\ , k\in\mathbb{Z}$

پ) $\tan x=\tan\alpha \Rightarrow x=k\pi+\alpha\ , k\in\mathbb{Z}$

۴ حالت‌های تشابه دو مثلث:

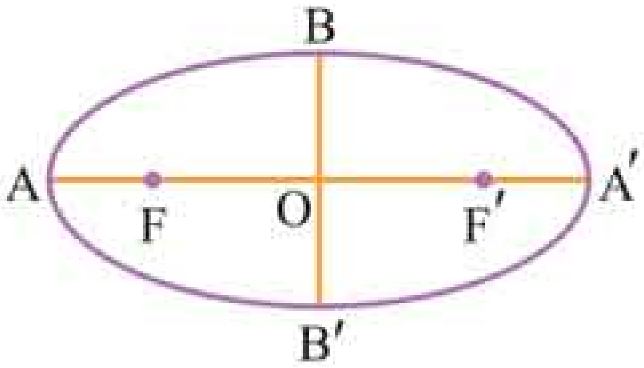
الف تساوی دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر

ب تناسب دو ضلع از مثلث‌ها و تساوی زاویهٔ بینشان

پ تناسب سه ضلع مثلث‌ها

مقاطع مخروطی

۱ بیضی: مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطهٔ ثابت، برابر مقداری ثابت ($۲a$) است. به دو نقطهٔ ثابت کانون‌های بیضی گفته می‌شود.



$۲a =$ قطر بزرگ

$۲b =$ قطر کوچک

$۲c =$ فاصلهٔ کانونی

$a^{۲} - b^{۲} = c^{۲}$ $\quad$ $e = \frac{c}{a}$ (خروج از مرکز) $\quad$ وتر کانونی $= \frac{۲b^{۲}}{a}$

۲ دایره: مجموعه نقاطی از صفحه که از یک نقطهٔ ثابت (مرکز دایره) مقداری ثابت (شعاع دایره) است. معادلهٔ استاندارد دایره‌ای به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r به‌صورت $(x-\alpha)^{۲} + (y-\beta)^{۲} = r^{۲}$ است.

معادلهٔ گسترده: $x^{۲} + y^{۲} + ax + by + c = ۰$

$a^{۲} + b^{۲} - ۴c > ۰$ $\quad$ $O(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲})$ $\quad$ $r = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^{۲} + b^{۲} - ۴c}$

احتمال

۱ فاکتوریل: $n! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times \cdots \times n$

۲ تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

فرمول‌نامه

۳ ترکیب r شیء از n شیء متمایز:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$$

۴ مبانی احتمال:

الف $A \subseteq S \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ **ب** $P(A') = ۱ - P(A)$

پ $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B) \quad A, B \subseteq S$

ت $P(A | B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)} \quad (P(B) \neq ۰)$

ث A و B مستقل‌اند. $\Leftrightarrow P(A \bigcap B) = P(A) \cdot P(B)$

۵ قانون احتمال کل: اگر A_i $(۱ \leq i \leq n)$ ها زیرمجموعه‌هایی از S باشند که اجتماعشان S را می‌سازد و دوبه‌دو ناسازگارند، آن‌گاه داریم:

$$B \subseteq S, P(B) = \sum_{i=۱}^{n} P(B | A_i) P(A_i)$$

آمار

۱ دامنهٔ تغییرات: $R = x_{max} - x_{min}$

۲ میانه: پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری را که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است، میانه می‌نامیم. $(Q_۲)$

۳ میانگین:

$$\bar{X} = \frac{x_۱ + x_۲ + \cdots + x_N}{N}$$

۴ واریانس:

$$\sigma^۲ = \frac{(x_۱ - \bar{X})^۲ + \cdots + (x_N - \bar{X})^۲}{N}$$

۵ انحراف معیار: جذر واریانس را انحراف معیار می‌گوییم.

۶ ضریب تغییرات:

$$cv = \frac{\sigma}{\bar{X}}$$