در کتاب کنکور ریاضی و آمار منتشران چه چیزهایی داریم؟

هر درس با یک «سردرس» شروع می‌شود. در سردرس‌ها شماره و اسم فصل و هم‌چنین شماره و اسم درس را می‌بینید. با توجه به اسم درس می‌توانید بفهمید که قرار است در آن درس چه چیزی را بخوانید.

فصل ۱

عبارت‌های جبری

درس ۱: چند اتحاد جبری و کاربردها

$(a+b)^2$

عبارت‌های جبری، عبارت‌هایی شامل حروف و ضرایب عددی هستند؛ برای مثال $\frac{3}{2}x^2$ یک عبارت جبری است. هرگاه قسمت حرفی دو عبارت جبری کاملاً با هم برابر باشند (توان‌های برابر هم داشته باشند) آن‌ها را عبارت‌های متشابه می‌نامند. $\sqrt{2}x^2$ و $3x^2$ با هم متشابه هستند. زیرا هر دو x^2 دارند اما عبارت‌های $2x^2y$ و $2x^2$ متشابه نیستند. چون قسمت حرفی یکی x^2 و دیگری x^2y است.

تذکر: فقط عبارت‌های متشابه را می‌توانیم با هم جمع و تفریق کنیم.

اتحاد

برخی از تساوی‌ها در ریاضیات به ازای هر مقدار دلخواه از x برقرار هستند. به این تساوی‌ها اتحاد می‌گویند. مثلاً تساوی $x(x-2)=x^2-2x$ یک اتحاد است؛ زیرا اگر به جای x هر عددی را قرار دهیم تساوی برقرار است.

در اتحادها، ضریب جملات متشابه در دو طرف تساوی با هم برابر است.

تست: اگر عبارت $(2x-a)(x+2)=bx^2+cx+4$ یک اتحاد باشد، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ «۲»، ابتدا عبارت‌های سمت چپ تساوی را ضرب می‌کنیم و سپس ضریب جمله‌های متشابه را مساوی هم قرار می‌دهیم.

$$(2x-a)(x+2)=2x^2+4x-ax-2a$$

$$2x^2+x(4-a)-2a=bx^2+cx+4 \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ -2a=4 \Rightarrow a=-2 \Rightarrow a+b+c=(-2)+2+6=6 \\ 4-a=c \Rightarrow c=6 \end{cases}$$

تجزیه

زمانی‌که یک چندجمله‌ای را به صورت حاصل‌ضرب دو یا چند عبارت جبری بنویسیم، می‌گوییم چندجمله‌ای را تجزیه کرده‌ایم.

برای تجزیهٔ عبارت‌های جبری می‌توانیم از این روش‌ها استفاده کنیم:

۱) فاکتورگیری ۲) تجزیه به کمک اتحادها ۳) تجزیه به کمک دسته‌بندی

الف) فاکتورگیری: در این روش از بزرگ‌ترین عامل مشترک عبارت‌ها فاکتور می‌گیریم. مثلاً در عبارت x^2+3x^3 می‌توان از x فاکتور گرفت ولی بزرگ‌ترین عامل مشترک در بین دو جمله، x^2 است و بهتر است از آن فاکتورگیری شود.

مثال: عبارت‌های زیر را به کمک فاکتورگیری تجزیه نمایید.

الف) $6x^3+4x$ ب) $y(x+1)-2x-2$

پاسخ: ۱) ب‌م‌م دو عدد ۴ و ۶ عدد ۲ است و ب‌م‌م قسمت حرفی برابر x است. پس بزرگ‌ترین عامل مشترک دو جمله، $2x$ می‌باشد.

$$6x^3+4x=2x(3x^2+2)$$

۲) اگر از عبارت $-2x-2$ عدد -2 را فاکتور بگیریم حاصل برابر با $-2(x+1)$ می‌شود. حال می‌توان از $(x+1)$ فاکتور گرفت.

$$y(x+1)-2x-2=y\underbrace{(x+1)}-2\underbrace{(x+1)}_{\text{فاکتورگیری}}=(x+1)(y-2)$$

تست: اگر $x-y=7$, $x+z=-2$ باشد حاصل عبارت $x^2-xy+zx-yz+15$ کدام است؟

۱) ۲۹ ۲) -29 ۳) ۱ ۴) -1

پاسخ: گزینهٔ «۳»، در دو جملهٔ اول از x و در دو جملهٔ بعدی از z فاکتور می‌گیریم و مقدار داده‌شده در صورت سؤال را جایگزین می‌کنیم:

$$\underbrace{x^2-xy}+\underbrace{zx-yz}+15$$

$$x(x-y)+z(x-y)+15=x\times(7)+z\times(7)+15$$

حالا در دو جملهٔ اول از عدد ۷ فاکتور می‌گیریم:

$$7(x+z)+15=7\times(-2)+15=-14+15=1$$

درس‌نامه و تست

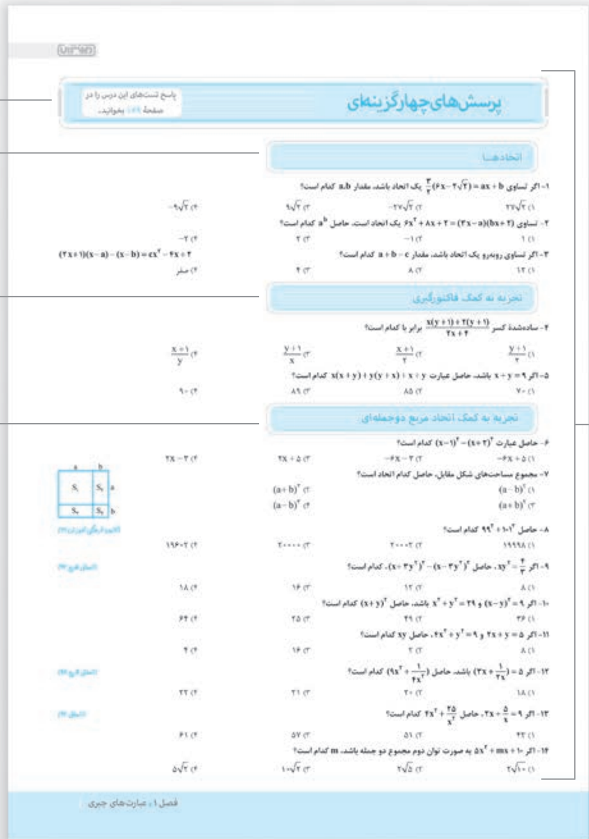
اولین بخش این کتاب درس‌نامه و تست است. در این کتاب هر فصل را به چند درس تقسیم کرده‌ایم و ابتدای هر درس، درس‌نامه و بعد از آن، تست‌های مربوط به آن درس را قرار داده‌ایم. در درس‌نامه‌ها از اضافه‌گویی و آن‌چه که در کنکور مطرح نمی‌شود، پرهیز کرده‌ایم؛ به همین خاطر درس‌نامه‌های این کتاب کاملاً استاندارد و مطابق کنکور است.

درس‌نامه‌ی این کتاب پر از مثال و تست است تا قدم‌به‌قدم مهارت حل مسئلهٔ شما بالا برود و بتوانید به راحتی به تست‌های کنکور پاسخ دهید.

بعد از درس‌نامهٔ هر درس، تست‌های آن درس به صورت کاملاً طبقه‌بندی‌شده قرار گرفته است. این تست‌ها کاملاً استاندارد و دقیقاً مطابق با کنکور و کتاب‌های درسی نظام جدید است. در این کتاب از تست‌های الکی سخت که هیچ‌وقت در کنکور مشابه آن‌ها را نمی‌بینید، پرهیز کرده‌ایم و به اصل کنکور پرداخته‌ایم.

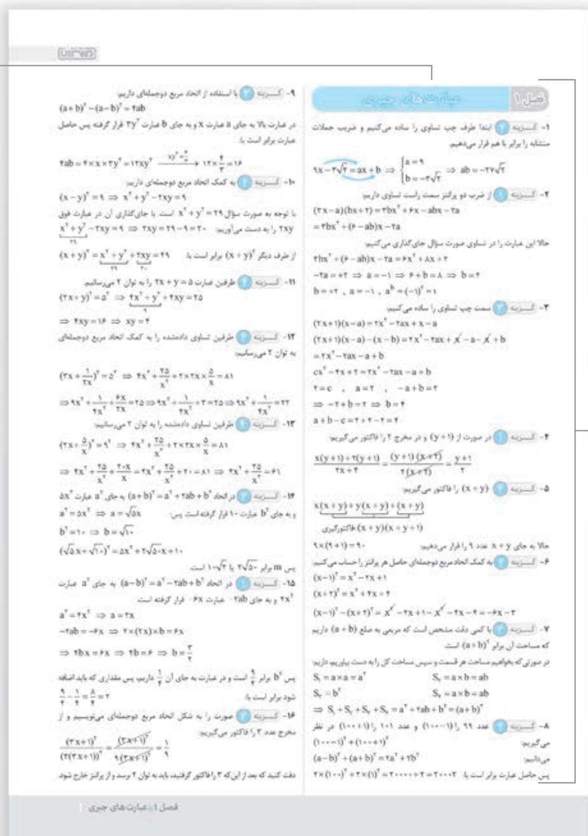
تست‌های هر درس با چنین تیتری آغاز می‌شود که در آن کادری برای آدرس‌دهی پاسخ تست‌ها وجود دارد.

به کمک این تیترها، تست‌ها را طبقه‌بندی کرده‌ایم. در هر قسمت، تست‌ها را از آسان به سخت قرار داده‌ایم تا پله‌پله روند آموزشی را با تست‌ها طی کنید و در مباحث مختلف به تسلط برسید.



بعد از درس‌نامه و تست‌های تمام فصل‌ها، پاسخ تست‌ها قرار گرفته است. پاسخ‌ها را کاملاً یاددهنده و با توضیحات کامل نوشته‌ایم که هر موقع نتوانستید تستی را حل کنید به کمک این پاسخ‌ها بتوانید خیلی راحت مطالب مربوط به آن تست و تست‌های مشابه آن را یاد بگیرید.

پاسخ تست‌های فصل‌های مختلف به کمک این تیترها جدا شده است. همان‌طور که می‌بینید شماره و اسم فصل در این تیترها قرار گرفته است.



فهرست

فصل ۳ تابع

$y=f(x)$

درس۱: مفهوم تابع

مفهوم تابع

تابع نوعی رابطه است! رابطه‌ای بین دو مجموعهٔ A و B. فرض کنید مجموعهٔ A اسم دانش‌آموزان یک کلاس باشد و مجموعهٔ B مجموعه‌ای باشد که قد دانش‌آموزان را نمایش می‌دهد. هر کدام از اعضای مجموعهٔ A فقط به یکی از اعضای مجموعهٔ B وصل می‌شود. رابطه‌ای که بین دو مجموعهٔ A و B وجود دارد قد هر کدام از دانش‌آموزان را مشخص می‌کند.

هاشم	مهدی	اصغر	علی	مجموعهٔ A (اسم دانش‌آموزان)
۱۶۳	۱۸۰	۱۷۱	۱۸۰	مجموعهٔ B (قد دانش‌آموزان)

به طور علمی‌تر تابع f، یک رابطه از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از مجموعهٔ B را نسبت می‌دهد. این تابع را با نماد $f:A\to B$ نمایش می‌دهند. ضمناً توابع را با حروف کوچک انگلیسی مانند $f,g,k,\ldots$ نمایش می‌دهند.

توابع را می‌توان به روش‌های مختلف نمایش داد:

نمایش توابع به صورت زوج مرتب

تابع را می‌توانیم به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها به شکل (x,y) نمایش دهیم. واژهٔ زوج مرتب از دو قسمت «زوج» و «مرتب» تشکیل شده است. «زوج» یعنی یک دوتایی و «مرتب» یعنی ترتیب آن مهم است و (x,y) با (y,x) متفاوت است یا به عبارتی دیگر $(۱,۲)$ با $(۲,۱)$ متفاوت است. (چیزی مثل مختصات!)

در زوج مرتبی مثل $(۲,۵)$ به عدد سمت چپ که این‌جا ۲ است، مؤلفهٔ اول و به عدد سمت راست یعنی ۵ مؤلفهٔ دوم می‌گویند. در مثال قبل زوج مرتب (علی,۱۸۰) نمایش قسمتی از یک تابع است.

اگر رابطه‌ای را به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها نمایش دهیم، آن‌گاه زمانی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه‌های اول برابر در آن وجود نداشته باشد.

دقت کنید که اگر دو زوج مرتب مؤلفه‌های اول و دومشان با هم برابر بود در واقع یک زوج مرتب هستند و از سوی دیگر اگر مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب یکسان نباشند، مهم نیست که مؤلفهٔ دومشان با هم برابر باشد یا نباشد.

به توابع مقابل دقت کنید. $h=\{(۱,۲),(۱,۳)\}$ $\quad g=\{(۱,۲),(۱,۲),(۳,۲)\}$ $\quad f=\{(۲,۳),(-۱,۵),(۵,-۱)\}$

تابع f سه‌عضوی است.

تابع g دو عضو دارد چون عضوهای تکراری یک عضو حساب می‌شوند.

h تابع نیست. چون زوج مرتب‌هایی دارد که مؤلفهٔ اولشان با هم برابر است ولی مؤلفهٔ دومشان با هم برابر نیست.

تست **اگر $f=\{(۱,۲),(-۱,m-۱),(-۱,۲m)\}$ نمایشگر یک تابع باشد، m چه‌قدر است؟**

۱) ۱   ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

پاسخ **گزینهٔ «۴»** مؤلفه‌های اول زوج مرتب $(-۱,۲m)$ و $(-۱,m-۱)$ با هم برابرند، پس مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز باید با هم برابر باشند. $m-۱=۲m \Rightarrow m=-۱$

نمایش به صورت جدول

گاهی توابع را در یک جدول قرار می‌دهند که در آن سطر یا ستونی که متعلق به x است، همان مؤلفهٔ اول زوج مرتب‌ها است و سطر یا ستونی که y در آن نمایش داده شده است، نشان‌دهندهٔ مؤلفهٔ دوم است.

در واقع جدول مقابل و تابع زوج مرتب روبه‌رویش با هم معادل هستند. $f=\{(۲,-۱),(۰,۴),(۳,-۱)\}$

x	۲	۰	۳
y	-۱	۴	-۱

تست **به ازای کدام مقدار m جدول زیر نمایشگر یک تابع است؟**

x	۲	۳	۲	$m+۲$
y	$(m-۲)$	۱	$-m^۲$	۲

۱) ۱   ۲) -۲ ۳) ۲   ۴) ۱ و -۲

پاسخ **گزینهٔ «۲»** همان‌طور که گفته شد سطر اول که متعلق به xها است همان مؤلفهٔ اول است که در آن عدد ۲ تکرار شده است. پس برای آن‌که این جدول یک تابع را نمایش دهد می‌بایست مؤلفه‌های دوم هم با هم برابر باشند. $-m^۲=m-۲$

برای حل این تساوی می‌بایست همهٔ جملات جبری را به یک سمت تساوی برده و معادلهٔ درجهٔ ۲ به دست آمده را به کمک تجزیه حل کنیم.

$$m^{۲}+m-۲=۰ \Rightarrow (m+۲)(m-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=-۲ \\ m=۱ \end{cases}$$

حالا می‌بایست این دو عدد را به جای m در جدول جای‌گذاری کرده و بررسی کنیم تا احیاناً جای دیگری تابع‌بودن را نقض نکند.

اگر $m=۱$ را در جدول قرار دهیم، خواهیم داشت:

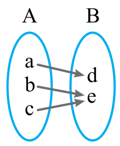
x	۲	۳	۲	۳
y	-۱	۱	-۱	۲

می‌بینیم که دو زوج مرتب $(۳,۱)$ و $(۳,۲)$ مؤلفه‌های اولشان برابر است ولی مؤلفه‌های دوم نابرابر دارند. پس نمی‌توانیم عدد ۱ را قرار دهیم؛ حالا عدد $m=-۲$ را هم بررسی می‌کنیم.

x	۲	۳	۲	۰
y	-۴	۱	-۴	۲

که با توجه به جدول $m=-۲$ درست می‌باشد.

نمایش با نمودار پیکانی (نمودار ون)

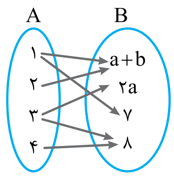


نمودار مقابل، نمودار وِن یک تابع است.

برای این‌که یک نمودار ون، یک تابع را نشان دهد باید یک شرط مهم داشته باشد. از هر عضو مجموعهٔ A دقیقاً یک پیکان خارج شده باشد. (نه کم‌تر و نه بیشتر!)

تذکر دقت کنید که مهم نیست به عضوی از B چند پیکان وارد شود یا اصلاً پیکانی وارد نشود!

تست **اگر نمودار مقابل نشان‌دهندهٔ یک تابع باشد، $a-۲b$ کدام است؟**



۱) ۲ ۲) -۲

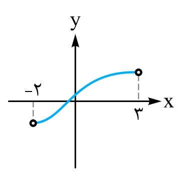
۳) ۱ ۴) -۱

پاسخ **گزینهٔ «۲»** با توجه به این‌که در نمایش نمودار به وسیلهٔ نمودار ون، از هر عضو مجموعهٔ A باید دقیقاً یک پیکان خارج شود، پس $(۱,a+b)=(۱,۷)$ و $(۳,۲a)=(۳,۸)$ است. از این دو رابطه داریم:

$$\begin{cases} ۲a=۸ \\ a+b=۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=۴ \\ a+b=۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=۴ \\ b=۳ \end{cases} \Rightarrow a-۲b=۴-۶=۲$$

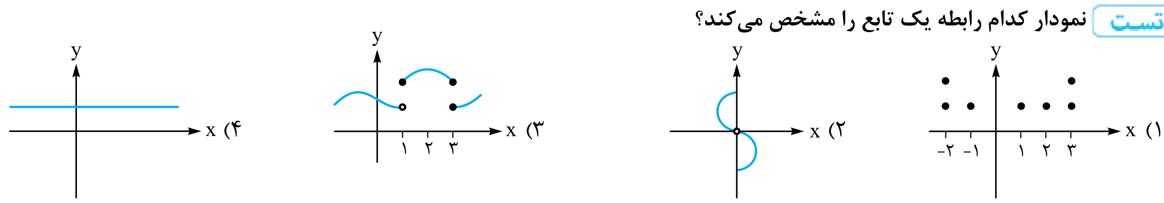
نمایش مختصاتی تابع

برای این‌که متوجه شویم یک نمودار نشان‌دهندهٔ یک تابع هست یا خیر از آزمون خط قائم استفاده می‌کنیم. آزمون خط قائم به این صورت است که هر خط دلخواهی موازی محور عرض‌ها (به صورت قائم) بر نمودار رسم کنیم باید حداکثر تابع را در یک نقطه قطع کند.



دقت کنید نقاط توخالی در نمودارها یعنی خود آن نقطه در تابع وجود ندارد. مثلاً تابع زیر را ببینید. در این تابع نقطهٔ $(-۲,-۱)$ عضو تابع هست چون توپر است ولی نقطهٔ $(۳,۲)$ عضوی از تابع نیست.

تست **نمودار کدام رابطه یک تابع را مشخص می‌کند؟**



پاسخ **گزینهٔ «۴»** هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ اگر از $x=-۲$ و $x=۳$ خط عمودی رسم کنیم، شکل را در دو نقطه قطع می‌کند.

۲ اگر روی خط $x=۰$ یا محور yها خطی عمودی رسم کنیم، شکل را در دو نقطه قطع می‌کند.

۳ اگر در نقطهٔ ۳ یک خط عمودی رسم کنیم، شکل را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.

نمایش توصیفی توابع

گاهی اوقات رابطه‌ها را به صورت جملهٔ فارسی می‌نویسند! باید زحمت بکشید و آن‌ها را به صورت ریاضی بنویسید و دقت کنید که تابع به ازای هر ورودی باید فقط یک خروجی داشته باشد. برای مثال رابطه‌ای که به هر مرد تاریخ تولد او را نسبت دهد یک تابع است (چون هر نفر (ورودی) فقط یک تاریخ تولد (خروجی) دارد).

ولی رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز نمرات کارنامهٔ او را نسبت دهد تابع نیست چرا که یک فرد (یک ورودی) بیش از یک نمره در کارنامهٔ خود دارد (چند خروجی دارد).

تست **کدام رابطه تابع نیست؟**

۱) رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز معدلش را نسبت می‌دهد. ۲) رابطه‌ای که به هر عدد معکوسش را نسبت می‌دهد.

۳) رابطه‌ای که به هر عدد مثبت ریشهٔ دومش را نسبت می‌دهد. ۴) رابطه‌ای که به هر مسلمان قبلهٔ او را نسبت می‌دهد.

پاسخ **گزینهٔ «۳»** گزینهٔ (۳) تابع نیست. چرا که هر عدد مثبت دو ریشه دارد. مثلاً ریشه‌های ۴ برابر است با ±۲.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

پاسخ تست‌های این درس را در صفحهٔ ۱۸۳ بخوانید.

۱۹۷- کدام مجموعه از زوج مرتب‌ها، نمایش یک تابع است؟

۱) $\{(۱,۲),(۳,۴),(۲,۴),(۴,۴)\}$ ۲) $\{(-۱,-۱),(-۲,-۳),(-۱,-۲)\}$ ۳) $\{(۲,۲),(\sqrt{۲},۱),(\sqrt{۴},۳)\}$ ۴) $\{(۳,۴),(۴,۳),(۲,۱),(۲,۴)\}$

۱۹۸- اگر رابطهٔ $f=\{(۱,۲),(۳,۴),(۱,x+۲),(x,y-۱),(۰,۳)\}$ یک تابع باشد، مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۴

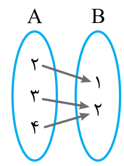
۱۹۹- اگر رابطهٔ $\{(۳,a+۲b),(۵,۴),(۷,۲),(۳,۷),(۵,۲a-b)\}$ یک تابع باشد، $a^۲-b^۲$ کدام است؟ (انسانی ۹۸)

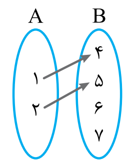
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

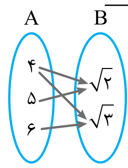
۲۰۰- اگر دو زوج مرتب $(a+b,۲)$ و $(۳,a-b)$ با هم برابر باشند، مقدار $\frac{a}{b}$ برابر با کدام گزینه است؟

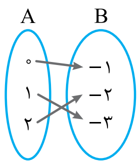
۱) ۵ ۲) -۵ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $-\frac{۱}{۵}$

۲۰۱- کدام‌یک از رابطه‌های زیر که با نمودار پیکانی نمایش داده شده‌اند، تابع نیست؟

۱) 

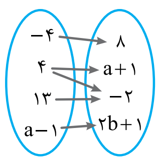
۲) 

۳) 

۴) 

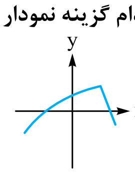
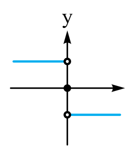
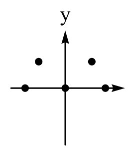
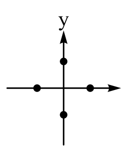
(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۲۰۲- اگر نمودار ون مقابل بیانگر تابع باشد، $(a+b)$ کدام است؟

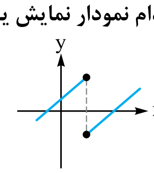
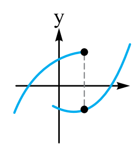
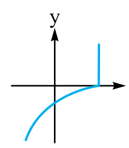
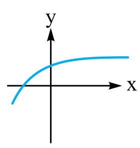


۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۰۳- کدام گزینه نمودار یک تابع نیست؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

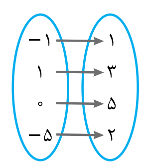
۲۰۴- کدام نمودار نمایش یک تابع $y=f(x)$ است؟ (انسانی خارج ۹۸)

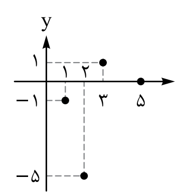
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

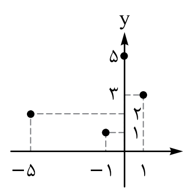
۲۰۵- نمایش دیگر تابع

x	۱	۳	۵	۲
y	−۱	۱	۰	−۵

در کدام گزینه آمده است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) $\{(۱,-۱),(۳,۱),(۰,۵),(۲,-۵)\}$

۲۰۶- کدام گزینه درست نیست؟

۱) اگر رابطهٔ بین x و y را به صورت زوج مرتبی نمایش دهیم، در صورتی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه‌های اول برابر در آن وجود نداشته باشد.

۲) اگر رابطه‌ای از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B را با نمودار پیکانی نمایش دهیم، در صورتی این رابطه تابع است که از هر عضو A حداکثر یک پیکان خارج شود.

۳) اگر نمودار مختصاتی یک رابطه رسم شود، در صورتی این رابطه تابع است که هیچ دو نقطه‌ای روی خطی که موازی محور yها باشد، قرار نگیرند.

۴) یک رابطه بین دو مجموعهٔ A و B (از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B) یک تابع نامیده می‌شود، هرگاه متناظر با هر عضو از مجموعهٔ A دقیقاً یک عضو از مجموعهٔ B را بتوان نظیر کرد.

۲۰۷- اگر تابع f را به عنوان ماشینی در نظر بگیریم که مجذور ورودی خود را تقسیم بر ۲ می‌کند و در خروجی قرار می‌دهد، ضابطهٔ تابع f کدام است؟

۱) $f(x)=(\frac{\sqrt{x}}{۲})^۲$ ۲) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{۲}$ ۳) $f(x)=\frac{x^۲}{۲}$ ۴) $f(x)=(\frac{x}{۲})^۲$

۲۰۸- نمایش توصیفی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲+x$ کدام است؟

۱) f تابعی است که هر عدد را به مربع مجموع آن عدد با خودش نسبت می‌دهد.

۲) f تابعی است که هر عدد را به مجموع مربع آن عدد و خودش نسبت می‌دهد.

۳) f تابعی است که هر عدد را به دو برابر مجموع آن عدد با خودش نسبت می‌دهد.

۴) f تابعی است که هر عدد را به مجموع آن عدد با جذرش نسبت می‌دهد.

ضابطهٔ جبری تابع

گاهی می‌توان بین مؤلفه‌های اول و دوم در تمام زوج مرتب‌های مربوط به یک تابع، یک رابطهٔ خاص پیدا کرد که به آن ضابطه یا قانون می‌گوییم. برای مثال تابع $f = \{(۲,۴),(۳,۶),(\frac{۱}{۲},۱)\}$ را در نظر بگیرید. در همهٔ زوج مرتب‌ها، مؤلفه دوم دو برابر مؤلفه اول است. به عبارت دیگر اگر زوج مرتب‌ها را به صورت کلی (x,y) بنویسیم، در تابع f می‌توان رابطه و یا ضابطهٔ کلی $-۲/۵$ را نوشت.

- اگر ضابطهٔ یک تابع به صورت $y = ۲x$ باشد، به x متغیر مستقل و y متغیر وابسته می‌گوییم.

برای به دست آوردن مقدار یک تابع در نقطهٔ دلخواه $x = a$ کافی است در تابع f به جای x مقدار a را جای‌گذاری کنیم.

برای مثال مقدار تابع $f(x) = x + \sqrt{x} - ۱$ در نقطهٔ ۴ را به صورت مقابل به دست می‌آوریم: $f(۴) = ۴ + \sqrt{۴} - ۱ \Rightarrow f(۴) = ۴ + ۲ - ۱ = ۵$

تست در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{|x+۱|}$ مقدار $f(۴) - f(۹)$ برابر با کدام است؟

۱) $-۰/۲$ ۲) -۱ ۳) $۰/۱$ ۴) $۰/۲$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** برای به دست آوردن $f(۴)$ و $f(۹)$ عدد ۴ و ۹ را در ضابطهٔ $f(x)$ به جای x قرار می‌دهیم:

$$f(۴) = \frac{\sqrt{۴}}{|۴+۱|} = \frac{۲}{۵}\ ,\ f(۹) = \frac{\sqrt{۹}}{|۹+۱|} = \frac{۳}{۱۰}$$

$$f(۴) - f(۹) = \frac{۲}{۵} - \frac{۳}{۱۰} = \frac{۴}{۱۰} - \frac{۳}{۱۰} = \frac{۱}{۱۰}$$

تست در تابع $f(x) = x^۲ - ۲x + ۳$ حاصل $f(۱+\sqrt{۲}) - f(۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۱»** مقدار $f(۲)$ که به سادگی با جای‌گذاری به دست می‌آید. اما در محاسبهٔ $f(۱+\sqrt{۲})$ باید دقت کنید. $f(۲) = ۲^۲ - ۲\times۲ + ۳ = ۳$

$$f(۱+\sqrt{۲}) = (۱+\sqrt{۲})^۲ - ۲(۱+\sqrt{۲}) + ۳ = ۱ + \cancel{۲} + \cancel{۲\sqrt{۲}} - \cancel{۲} - \cancel{۲\sqrt{۲}} + ۳ = ۴ \Rightarrow f(۱+\sqrt{۲}) - f(۲) = ۴ - ۳ = ۱$$

دامنه و برد تابع

در نمایش توابع به صورت زوج مرتب، مجموعه‌ای شامل همهٔ مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها را «دامنهٔ تابع» می‌نامند و مجموعه‌ای شامل همهٔ مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌ها در کنار هم نیز «برد تابع» است.

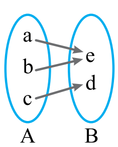
دامنهٔ تابع را با D_f و برد آن را با R_f نشان می‌دهند.

برای مثال در تابع $g = \{(۲,۳),(۴,-۱),(۰,۳)\}$ دامنهٔ تابع به صورت $D_g = \{۲,۴,۰\}$ و برد آن به صورت $R_g = \{۳,-۱\}$ است.

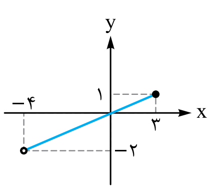
تابع f را به صورت مقابل هم نمایش می‌دهند که در آن A دامنهٔ تابع است.

$$\begin{cases} f: A \to B \\ y = f(x) \end{cases}$$

در توابع جدولی دامنه همان ستون یا ردیف xها و برد همان ردیف یا ستون yها است. در تابع‌هایی به صورت پیکانی، مجموعهٔ اعدادی که از آن‌ها پیکان خارج شده (مجموعهٔ A) دامنه و اعدادی که پیکان به آن‌ها وارد شده (مجموعهٔ B) برد است.



اما در نمایش مختصاتی دو حالت وجود دارد. اگر تابع در محورهای مختصات شامل چند نقطه باشد، دامنه شامل «طول همهٔ نقاط نمودار» و برد «عرض همهٔ نقاط نمودار» است، اما اگر شکل تابع نمایش یک خط مانند شکل زیر باشد، دامنه و برد شامل اعداد یک بازه می‌باشند.



دامنهٔ تابع شامل مجموعهٔ طول نقاط نمودار: $D_f : -۴ < x \le ۳$

برد تابع شامل مجموعهٔ عرض نقاط نمودار: $R_f : -۲ < y \le ۱$

تست برد تابع زیر کدام گزینه است؟

$$\begin{cases} f: A \to B \\ f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|+۱}}{x} \end{cases} \qquad A=\{۳,-۳,-۱\}$$

۱) $\{\frac{۲}{۳},\sqrt{۲}\}$
۲) $\{-\frac{۲}{۳},\sqrt{۲}\}$
۳) $\{\frac{۲}{۳},-\frac{۲}{۳},-\sqrt{۲}\}$
۴) $\{\frac{۲}{۳}\}$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** برای به دست آوردن برد این تابع می‌بایست اعضای دامنه یعنی $\{۳,-۳,-۱\}$ را یکی‌یکی داخل ضابطهٔ تابع قرار دهیم.

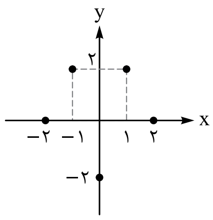
$$f(-۱)=\frac{\sqrt{|-۱|+۱}}{-۱}=-\sqrt{۲} \qquad f(-۳)=\frac{\sqrt{|-۳|+۱}}{-۳}=-\frac{۲}{۳} \qquad f(۳)=\frac{\sqrt{۳+۱}}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

که این سه عدد تشکیل برد تابع را می‌دهند.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

پاسخ تست‌های این درس را در صفحهٔ ۱۸۴ بخوانید.

۲۰۹- با توجه به نمودار تابع f، مقدار $۲f(۰)\times f(-۱)$ کدام است؟



۱) صفر
۲) -۲
۳) -۴
۴) -۸

۲۱۰- اگر $f=\{(۱,۲),(-۱,-۲),(۲,-۱)\}$، مقدار $f(۱)-f(-۱)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) -۴ ۴) ۴

۲۱۱- اگر $f(x)=x^۲-۲x+۱$ باشد، $f(۳)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱۶ ۳) ۸ ۴) ۴

۲۱۲- اگر $f(x)=\sqrt{|۲x-۵|}$ باشد، مقدار $f(-۲)+۲f(\frac{۱}{۲})$ کدام است؟ (انسانی ۹۷)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۱۳- اگر $f(x)=x\sqrt{۲+|x|}$ باشد، مقدار $f(۲)+۴f(-\frac{۱}{۴})$ کدام است؟ (انسانی خارج ۹۷)

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

۲۱۴- اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-۷}$ باشد، $f(۴)-f(۲\sqrt{۲})$ کدام است؟ (انسانی خارج ۹۵)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۱۵- اگر $f(x)=|۲x-۵|$ باشد، مقدار $f(۲+\sqrt{۲})+f(۱+\sqrt{۲})$ کدام است؟ (انسانی ۹۵)

۱) ۲ ۲) $۴\sqrt{۲}-۴$ ۳) ۳ ۴) $۲\sqrt{۲}+۲$

۲۱۶- اگر $f(x)=|۳x-۵|$ و $g(x)=\sqrt{\frac{۱}{۲}x+۲}$ باشد، مقدار $f(\frac{۱}{۲})+g(\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) -۲ ۴) -۵

۲۱۷- اگر $f(x)=\frac{۱}{۴}x^۲+|x|$ باشد، حاصل $f(۲-\sqrt{۵})$ کدام است؟ (انسانی خارج ۹۴)

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۱/۲۵

۲۱۸- اگر $f(x)=-\frac{۱}{۳}x^۲+|۲x|$ باشد، $f(۲\sqrt{۲}-۳)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۱۹- اگر $f(x)=|x^۲-۵|$ و $g(x)=\frac{x}{۱+x^۲}$ باشد، حاصل $\frac{۱+f(-۲)}{g(۲)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۲۰- اگر $f(x)=x+\frac{۲}{x}$ باشد، مقدار $f(۱+\sqrt{۲})+f(۱-\sqrt{۲})$ کدام است؟ (انسانی خارج ۹۰)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۲۱- اگر $f(x)=\frac{-۲x^۲+۵x}{x-۲}$ باشد، $f(۱-\sqrt{۲})$ کدام است؟ (انسانی ۹۳)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $۱+\sqrt{۲}$

۲۲۲- اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-۶x+۱۰}$ باشد، $f(۳+۲\sqrt{۶})$ کدام است؟ (انسانی خارج ۹۳)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) $۲+\sqrt{۶}$ ۴) ۶

۲۲۳- دامنهٔ تابع $\{(۳,۰),(۰,۲),(۲,۴),(۴,۵)\}$ کدام است؟

۱) $\{۰,۲,۴\}$ ۲) $\{۰,۲,۳,۴,۵\}$ ۳) $\{۰,۲,۳,۴\}$ ۴) $\{۰,۲,۴,۵\}$

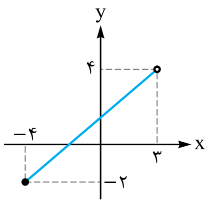
۲۲۴- اگر دامنهٔ تابع $\begin{cases} f: A \to B \\ y=۲x-۱ \end{cases}$ به صورت $A=\{-۱,۱,۰,۲\}$ باشد، برد این تابع کدام است؟

۱) $\{-۳,-۱,۱\}$ ۲) $\{-۳,۳,۱\}$ ۳) $\{-۳,۰,۱,۲\}$ ۴) $\{-۳,-۱,۱,۳\}$

۲۲۵- در تابع $\begin{cases} f:\{-۲,-۱,۰,۱,۲\} \to B \\ f(x)=x^۲-۱ \end{cases}$، مجموعهٔ برد تابع چند عضو دارد؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲۶- دامنهٔ تابع f با توجه به شکل آن کدام است؟



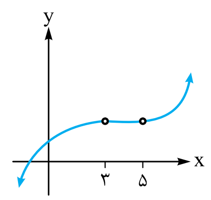
۱) $-۴<x<۳$

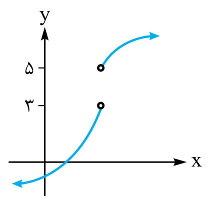
۲) $-۴\le x<۳$

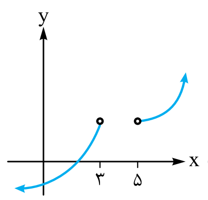
۳) $-۲<x<۴$

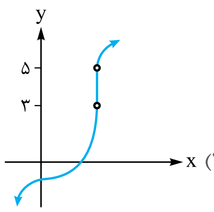
۴) $-۲\le x<۴$

۲۲۷- دامنه و برد کدام تابع به ترتیب برابر با $\mathbb{R}-\{۳,۵\}$ و $\mathbb{R}$ است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۹)

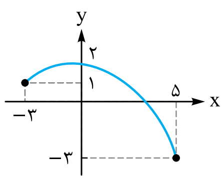
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۲۸- برد تابع مقابل کدام است؟



۱) $-۳\le y\le ۱$

۲) $-۳\le y\le ۲$

۳) $-۲\le y\le ۵$

۴) $-۲\le y\le ۲$

۲۲۹- اگر $f=\{(۳,x-y),(۳,-۱),(۴x+y,-۱)\}$ تابعی باشد که دامنهٔ آن تنها یک عضو دارد، زوج مرتب $(۵x,۵y)$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) $(\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۲) $(۲,۷)$ ۳) $(\frac{۵}{۲},\frac{۷}{۲})$ ۴) $(۵,۷)$

۲۳۰- اگر رابطهٔ $\{(۲,۴),(۱,۴a-b),(۲,a+b),(۱,۶),(۳,a)\}$ تابع باشد، برد آن کدام است؟

۱) $\{۲,-۲\}$ ۲) $\{۶,۴\}$ ۳) $\{۶,۴,۲\}$ ۴) $\{۶,۴,۲,-۲\}$

فصل ۳ تابع

درس۳: تابع خطی

$y=f(x)$

نمودار تابع خطی

تابع خطی در واقع همان معادلهٔ خطی است که در سال‌های قبل آموخته‌اید. بنابراین هر تابعی که به صورت $y=mx+h$ باشد یک تابع خطی نامیده می‌شود. برای این‌که با توابع خطی ارتباط بهتری برقرار کنید، می‌خواهیم مرور سریعی بر معادلهٔ خط و نکات مهم آن داشته باشیم. توجه داشته باشید که در این بخش، به دست آوردن شیب یک خط و نوشتن معادلهٔ یک خط اهمیت ویژه‌ای دارند.

در معادلهٔ خط $y=mx+h$ شیب خط برابر با m می‌باشد اما می‌توان به کمک رابطهٔ زیر نیز شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ را به دست آورد.

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$

اگر شیب یک خط و یک نقطه از خط را داشته باشیم، می‌توانیم به کمک یکی از دو روش زیر معادلهٔ خط را به دست آوریم.

• روش اول اگر شیب خط برابر m و نقطهٔ (x_1, y_1) روی خط $y = mx + h$ باشند، کافی است نقطهٔ (x_1, y_1) و مقدار m را در معادله قرار دهیم تا مقدار h به دست آید. حالا با جای‌گذاری m و h در معادلهٔ اصلی می‌توان معادلهٔ خط را نوشت.

برای مثال اگر شیب خطی برابر ۳ باشد و خط از نقطهٔ $(۲, -۱)$ بگذرد، می‌توان با جای‌گذاری در معادلهٔ خط $y = mx + h$ مقدار h را به این صورت به دست آورد.

$$y = mx + h \xrightarrow[m=۳]{x=۲,\ y=-۱} -۱ = ۳ \times ۲ + h \Rightarrow -۱ = ۶ + h \Rightarrow h = -۷$$

پس می‌توان معادلهٔ خط را بازنویسی کرد. $y = ۳x - ۷$

• روش دوم اگر m (شیب) و نقطهٔ (x_1, y_1) روی یک خط را داشته باشیم، به کمک رابطهٔ مقابل نیز می‌توان معادلهٔ خط را نوشت. $y - y_1 = m(x - x_1)$

برای حل مثال قبل ($m = ۳$ و نقطهٔ $(۲, -۱)$) با این روش، می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$$y - (-۱) = ۳(x - ۲) \Rightarrow y + ۱ = ۳x - ۶ \Rightarrow y = ۳x - ۷$$

همان‌طور که مشاهده شد از هر دو روش به یک پاسخ یکسان می‌رسیم.

نکته اگر مختصات دو نقطه در سؤال داده شود، می‌بایست ابتدا شیب خط را به دست آورد و سپس یکی از دو روش را انتخاب نمود و به کمک شیب و یکی از دو نقطه (به طور دلخواه) معادلهٔ خط را نوشت.

نکته در معادلهٔ خط به صورت $y = mx + h$، نقطهٔ $(۰, h)$ عرض از مبدأ و محل برخورد با محور yها است و در صورتی که بخواهیم محل برخورد با محور xها را به دست آوریم باید معادلهٔ $۰ = mx + h$ را حل کنیم (y را برابر صفر قرار دهیم).

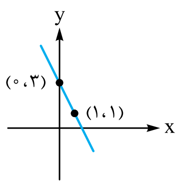
برای رسم یک نمودار تابع خطی (یک معادلهٔ خط) در محورهای مختصات می‌بایست دو نقطه روی خط یافت. برای این کار مقدار دلخواهی به x می‌دهیم و مقدار y را به دست می‌آوریم. با وصل کردن ۲ نقطه به هم و ادامه‌دادن آن‌ها می‌توان معادلهٔ خط را رسم کرد.

برای مثال برای رسم خط $۲x + y = ۳$ می‌بایست ۲ نقطه روی آن را به دست آورد.

(دلخواه) $x = ۰ \Rightarrow ۲ \times (۰) + y = ۳ \Rightarrow y = +۳ \Rightarrow (۰, +۳)$

(دلخواه) $x = ۱ \Rightarrow ۲ \times (۱) + y = ۳ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow (۱, ۱)$

این دو نقطه را روی محورهای مختصات مشخص می‌کنیم و خط را رسم می‌کنیم.



نکته دو خط موازی با هم، شیب‌های یکسان دارند.

تست خط d از نقطهٔ $A(۲, -۳)$ موازی خط گذرا بر دو نقطهٔ $(۰, ۵)$ و $(۲, ۱)$ رسم شده است. خط d محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ *(انسانی خارج ۹۷)*

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۳

پاسخ **گزینهٔ «۳»** **نکته** دو خط وقتی با هم موازی‌اند که دارای شیب برابر باشند. شیب خط گذرنده از نقاط $(۰, ۵)$ و $(۲, ۱)$ برابر است با:

$$\text{شیب}: \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{۵ - ۱}{۰ - ۲} = -۲$$

حالا با داشتن شیب $(m = -۲)$ و نقطهٔ $A(۲, -۳)$ معادلهٔ خط d را می‌نویسیم. $y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + ۳ = -۲(x - ۲) \Rightarrow y = -۲x + ۱$

برای به دست آوردن محل برخورد با محور yها یا همان عرض از مبدأ، x را برابر صفر قرار می‌دهیم. $y = -۲x + ۱ \xrightarrow{x=۰} y = ۱$

توابع خطی

بنا بر آن‌چه گفته شد، توابع خطی و معادلهٔ خط خیلی مفاهیم مشترکی دارند، پس با یادگیری مناسب معادلهٔ خط می‌توانید به سادگی به سؤالات توابع خطی نیز پاسخ دهید. یکی از تفاوت‌هایی که در ضابطهٔ معادلهٔ خط و توابع خطی وجود دارد، این است که معادلهٔ خط را به صورت $y = mx + h$ می‌نویسیم ولی توابع خطی به صورت کلی $f(x) = mx + h$ نوشته می‌شود. به طور کلی هر تابع به صورت $y = f(x)$ که در آن $y = mx + h$ یک تابع خطی نامیده می‌شود.

تست اگر در یک تابع خطی $f(۲) = ۵$ باشد و نقطهٔ $(۰, ۱)$ در این تابع صدق کند، مقدار $f(-۲)$ چند است؟

۱) -۵ ۲) -۳ ۳) صفر ۴) -۱

پاسخ **گزینهٔ «۲»** با توجه به این‌که نقاط $(۲, ۵)$ و $(۰, ۱)$ روی تابع خطی هستند، می‌توان نوشت:

$$f(x) = mx + h \Rightarrow \begin{cases} ۵ = ۲m + h \\ ۱ = ۰ \times m + h \Rightarrow h = ۱ \end{cases}$$

$$۵ = ۲m + ۱ \Rightarrow ۲m = ۴ \Rightarrow m = ۲$$

ضابطهٔ تابع را بازنویسی می‌کنیم: $f(x) = ۲x + ۱$

بنابراین $f(-۲)$ برابر است با: $f(-۲) = ۲ \times (-۲) + ۱ = -۳$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

پاسخ تست‌های این درس را در صفحهٔ ۱۸۵ بخوانید.

۲۳۱- شیب خطی که از دو نقطهٔ $(۰,۲)$ و $(۲,۳)$ می‌گذرد، کدام است؟

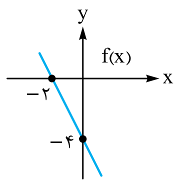
۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۲۳۲- عرض از مبدأ خط گذرا بر دو نقطهٔ $(۲-,۳)$ و $(۱,۲)$ کدام است؟ (انسانی خارج ۹۵)

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۵/۵

۲۳۳- خطی که از دو نقطهٔ $A(۲,۵)$ و $B(-۴,۱)$ عبور می‌کند، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $۳\frac{۱}{۳}$ ۲) $۳\frac{۲}{۳}$ ۳) $۴\frac{۱}{۳}$ ۴) $۴\frac{۲}{۳}$

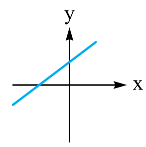
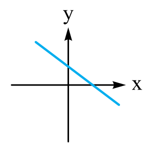
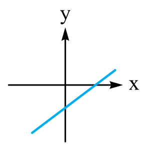
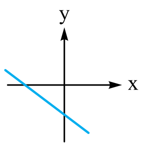


۲۳۴- معادلهٔ خط مقابل کدام است؟

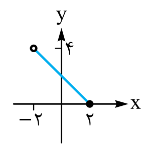
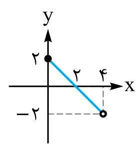
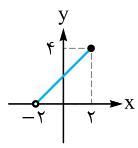
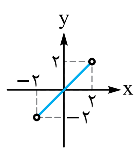
۱) $y = ۲x - ۴$ ۲) $y = -۲x + ۴$

۳) $y = -۲x - ۴$ ۴) $y = \frac{۱}{۲}x - ۴$

۲۳۵- نمودار تابع خطی $y + \frac{۱}{۲}x = ۲$ شبیه کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۲۳۶- نمودار تابع خطی $y = ۲ - x$ در دامنهٔ $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -۲ < x \le ۲\}$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۲۳۷- خط گذرا از دو نقطهٔ $(۲,۵)$ و $(-۱,۳)$، خط به معادلهٔ $y + x + ۳ = ۰$ را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟ (انسانی ۹۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳۸- شیب خطی که نقطهٔ $(-۳,۵)$ را به نقطهٔ تلاقی دو خط $x = y + ۸$ و $۵x + ۲y + ۹ = ۰$ وصل می‌کند، کدام است؟ (انسانی ۹۰)

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۳۹- خط d از نقطهٔ $A(-۲,۴)$ و نقطهٔ تلاقی دو خط به معادلات $۲x + y = ۵$ و $۳y - x + ۶ = ۰$ گذشته است. شیب خط d کدام است؟ (انسانی ۹۷)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۴۰- در تابع خطی f می‌دانیم $f(۱) = ۲$، اگر عرض از مبدأ این خط برابر با صفر باشد، معادلهٔ این تابع کدام است؟

۱) $y = x + ۱$ ۲) $y = ۳x - ۱$ ۳) $y = ۲x$ ۴) $y = -۲x$

۲۴۱- در تابع خطی $f(x) = mx + ۲$ می‌دانیم $f(۱) = ۳$. مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۲۴۲- تابع خطی f از نقطهٔ $(-۱,+۲)$ می‌گذرد و شیب آن برابر با ۳ است. مقدار $f(۱)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۸ ۴) -۸

۲۴۳- در تابع خطی f داریم $f(۴) = ۵$ و $f(۲) = ۳$. مقدار $f(\frac{۱}{۲}) + f(\frac{۳}{۲})$ کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

۲۴۴- اگر در تابع خطی $f(x) = mx + n$ داشته باشیم، $f(۱) = ۳$ و $f(-۱) = -۱$، مقدار $m \times n$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۲۴۵- نمودار تابع خطی $۲y - x + ۱ = ۰$ از کدام ناحیهٔ محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۲۴۶- رابطهٔ بین دما برحسب سانتی‌گراد و فارنهایت به صورت $F = \frac{۹}{۵}C + ۳۲$ است. دمای یک جسم ۳۰ درجهٔ سانتی‌گراد بالا رفته است. دمای آن برحسب فارنهایت چه‌قدر افزایش داشته باشد؟

۱) ۳۲ ۲) ۲۲ ۳) ۸۶ ۴) ۵۴

۲۴۷- یک شرکت برای تولید x کالا، $C(x) = ۲۰۰۰ + ۱۰x$ تومان هزینه می‌کند و هر کالا را ۶۰ تومان می‌فروشد. این شرکت حداقل چه تعداد از این کالا بفروشد تا سوددهی آغاز شود؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۹)

۱) ۴۱ ۲) ۵۱ ۳) ۶۱ ۴) ۲۰۱

فصل ۳ تابع

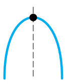
درس ۴: تابع درجهٔ ۲

y=f(x)

نمودار تابع درجهٔ ۲ (سهمی)

گفتیم که توابع درجه‌اول به صورت $f(x) = mx + n$ هستند، توابعی که به صورت کلی $y = ax^۲ + bx + c$ باشند را توابع درجهٔ ۲ می‌نامیم، به شرطی که a برابر صفر نباشد. توابع درجهٔ ۲ یا همان سهمی‌ها دو شکل کلی دارند که براساس علامت a تعیین می‌شود.

اگر $a > ۰$ باشد، شکل کلی سهمی به صورت  است.

در این حالت سهمی رو به بالا بوده و دارای کم‌ترین مقدار (مینیمم) می‌باشد اما اگر $a < ۰$ باشد، شکل کلی سهمی به صورت  است و تابع دارای بیشترین مقدار (ماکزیمم) است.

رأس سهمی

مختصات رأس سهمی که همان ماکزیمم یا مینیمم سهمی‌ها است، از رابطهٔ $(\frac{-b}{۲a}, \frac{-\Delta}{۴a})$ به دست می‌آید. یعنی طول رأس سهمی برابر $\frac{-b}{۲a}$ و عرض رأس سهمی نیز برابر با $\frac{-\Delta}{۴a}$ می‌باشد. (یادآوری: $\Delta = b^۲ - ۴ac$)

نکته می‌توان به جای این‌که از رابطهٔ $\frac{-\Delta}{۴a}$ استفاده کرد، طول رأس سهمی را از رابطهٔ $\frac{-b}{۲a}$ به دست آورد و آن را در معادلهٔ اصلی جای‌گذاری کرد تا عرض آن نقطه که عرض رأس سهمی است به دست آید.

تست **مختصات رأس تابع درجه‌دوم، $y = -x^۲ + ۶x - ۴$ و نوع آن در کدام گزینه به درستی آمده است؟**

۱) $(۳,۵)$ ماکزیمم ۲) $(۶,-۴)$ مینیمم ۳) $(۳,۵)$ مینیمم ۴) $(۳,-۳)$ ماکزیمم

پاسخ **گزینهٔ «۱»** چون $a < ۰$ است پس نمودار تابع دارای ماکزیمم است. طول رأس سهمی (نقطهٔ ماکزیمم) از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۶}{۲\times(-۱)} = ۳$$

مقدار به دست آمده را در ضابطهٔ تابع قرار می‌دهیم تا عرض رأس به دست آید.

$$y = -۳^۲ + ۶\times۳ - ۴ = -۹ + ۱۸ - ۴ = ۵$$

در شکل‌های ابتدای درس‌نامه خط‌چینی که از رأس سهمی رسم شده بود، محور تقارن سهمی نامیده می‌شود. پس معادلهٔ خط تقارن سهمی برابر است با $x = \frac{-b}{۲a}$ (به شباهت طول رأس سهمی و محور تقارن آن دقت بفرمایید).

تست **اگر خط $x = ۲$ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y = x^۲ + ax + a$ باشد عرض رأس سهمی کدام است؟**

۱) -۸ ۲) ۸ ۳) -۴ ۴) -۶

پاسخ **گزینهٔ «۱»** معادلهٔ محور تقارن به صورت $x = \frac{-b}{۲a}$ است، پس:

$$\frac{-b}{۲a} = ۲ \Rightarrow \frac{-a}{۲\times۱} = ۲ \Rightarrow -a = ۴ \Rightarrow a = -۴$$

پس معادلهٔ سهمی را بازنویسی می‌کنیم و با جای‌گذاری طول رأس $x = +۲$ در معادله، عرض رأس سهمی را به دست می‌آوریم.

$$y = x^۲ - ۴x - ۴ \xrightarrow{x=۲} y = ۲^۲ + (-۴)\times۲ - ۴ = -۸$$

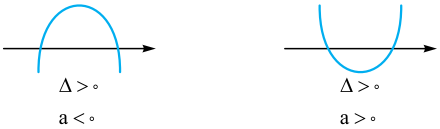
البته از رابطهٔ $\frac{-\Delta}{۴a}$ هم می‌توان این مقدار را محاسبه کرد.

$$\frac{-\Delta}{۴a} = \frac{-(b^۲ - ۴ac)}{۴a} = \frac{-[(-۴)^۲ - (۴\times۱\times(-۴))]}{۴\times۱} = \frac{-(۱۶+۱۶)}{۴} = -۸$$

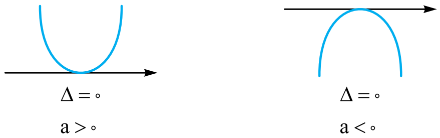
نقطهٔ برخورد سهمی با محورهای مختصات

برای به دست آوردن محل برخورد سهمی با محور yها کافی است $f(0)$ را محاسبه کنیم و یا به عبارت دیگر به جای همهٔ xهای تابع صفر قرار دهیم. اما اگر بخواهیم محل برخورد سهمی با محور xها را به دست آوریم باید معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ را حل کنیم. همان‌گونه که می‌دانید معادلهٔ درجهٔ ۲ حداکثر ۲ جواب دارد. یعنی یک سهمی حداکثر در دو نقطه محور xها را قطع می‌کند.

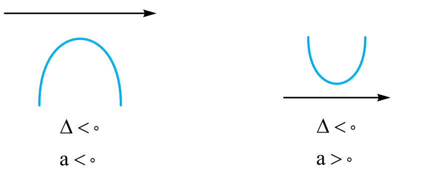
اگر $\Delta>0$ باشد، معادله ۲ جواب دارد یعنی سهمی محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند.



اگر $\Delta=0$ باشد، معادله یک جواب دارد و نمودار سهمی بر محور xها مماس است.



اگر $\Delta<0$ باشد، معادله جواب ندارد پس نمودار سهمی محور xها را قطع نمی‌کند.



اگر بخواهیم محل برخورد یک سهمی (با یک خط یا سهمی دیگر) را به دست بیاوریم کافی است آن‌ها را مساوی هم قرار دهیم و معادلهٔ حاصل را حل کنیم:
مثلاً برای به دست آوردن محل برخورد دو سهمی $y=x^2-4x+8$ و $y=x^2+x+3$ کافی است معادلهٔ زیر حل شود:

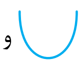
$$\cancel{x^2}+x+3=\cancel{x^2}-4x+8 \Rightarrow x+4x=8-3 \Rightarrow 5x=5 \Rightarrow x=1$$

یعنی در نقطه‌ای به طول یک این دو سهمی همدیگر را قطع می‌کنند؛ برای به دست آوردن عرض، نقطهٔ $x=1$ را در یکی از معادلات قرار می‌دهیم:

$$y=x^2+x+3 \xrightarrow{x=1} y=1+1+3=5 \Rightarrow (1,5)\ \text{نقطه}$$

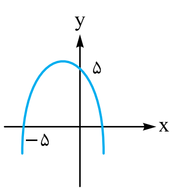
نمودار سهمی

بسیاری از سؤالات به این صورت است که از شما می‌خواهند معادلهٔ مناسب را برای یک نمودار پیدا کنید.
در این صورت در معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ به موارد زیر عنایت ویژه داشته باشید:

- به علامت a دقت کنید (اگر $a>0$ باشد. شکل کلی  و اگر $a<0$ باشد  است).
- رأس سهمی را بیابید. $(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a})$
- محور تقارن سهمی $x=\frac{-b}{2a}$
- به محل برخورد منحنی با محورهای مختصات هم دقت کنید (تعداد ریشه‌ها و حتی گاهی علامت‌های آن).

نکته اگر معادلهٔ سهمی به صورت $y=(x-h)^2+k$ داده شود رأس سهمی نقطهٔ (h,k) است و محور تقارن آن به صورت $x=h$ می‌باشد.

تست **شکل مقابل نمودار کدام تابع است؟**



۱) $y=x^2+4x+5$
۲) $y=x^2-4x+5$
۳) $y=-x^2+4x+5$
۴) $y=-x^2-4x+5$

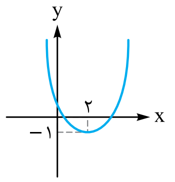
پاسخ **گزینهٔ «۴»** شکل نمودار یک سهمی رو به پایین است، پس $a<0$ می‌باشد و گزینه‌های (۱) و (۲) حذف می‌شوند. از طرفی نقطهٔ $(-5,0)$ روی سهمی قرار دارد. مختصات این نقطه را در ضابطهٔ گزینه‌های (۳) و (۴) جای‌گذاری می‌کنیم باید تساوی برقرار باشد.

۳ $y=-x^2+4x+5 \xrightarrow{(-5,0)} 0=-(-5)^2+4\times(-5)+5 \Rightarrow 0=-25-20+5 \Rightarrow -40=0$ غیرقابل قبول

۴ $y=-x^2-4x+5 \xrightarrow{(-5,0)} 0=-(-5)^2-4\times(-5)+5 \Rightarrow 0=0$

نقطهٔ $(-5,0)$ فقط در گزینهٔ (۴) صدق می‌کند.

تست نمودار مقابل مربوط به کدام معادله است؟



۱) $y=-x^2+4x+3$　　۲) $y=x^2+4x+3$

۳) $y=x^2-4x-3$　　۴) $y=x^2-4x+3$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** چون سهمی به صورت ◡ است، پس $a>0$ و از گزینهٔ (۱) خداحافظی می‌کنیم! از طرفی رأس سهمی نقطهٔ $(2,-1)$ است که فقط در گزینهٔ (۴) صدق می‌کند.

مسائل ماکزیمم و مینیمم (بهینه‌سازی)

مسائل بهینه‌سازی در سال‌های اخیر اهمیت دوچندانی پیدا کرده است. در این مسائل مهم‌ترین قسمت حل سؤال تبدیل مسئله به یک معادلهٔ درجهٔ ۲ است. در این‌گونه مسائل با توجه به این‌که معمولاً ۲ متغیر وجود دارد می‌بایست رابطهٔ بین دو متغیر را نوشت و یکی را برحسب دیگری به دست آورد. عبارت به دست آمده را در معادله‌ای که قرار است بهینه شود جای‌گذاری می‌کنیم. عرض رأس سهمی $(\frac{-\Delta}{4a})$ در معادلهٔ سهمی به دست آمده حداکثر یا حداقل تابع است.

تست اگر $2x+y=40$ باشد، مقادیر x و y چه‌قدر باشد تا حاصل‌ضرب آن‌ها ماکزیمم شود؟

۱) $y=30, x=5$　　۲) $y=20, x=10$　　۳) $y=10, x=15$　　۴) $y=24, x=8$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** می‌خواهیم حاصل‌ضرب xy حداکثر شود. در عبارت xy، به جای y مقدار $40-2x$ را جای‌گذاری می‌کنیم.

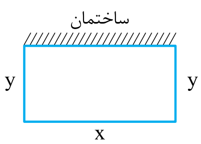
$$x(40-2x)=40x-2x^2=-2x^2+40x$$

طول رأس سهمی: $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-40}{2\times(-2)}=10 \Rightarrow y=40-2x \xrightarrow{x=10} y=40-2\times10=20$

تست باغچه‌ای به شکل مستطیل که یک طرف طول آن جلوی یک ساختمان و اندازهٔ محیط ۳ طرف دیگرش ۲۰ متر باشد، حداکثر در چند متر مربع قابل احداث است؟

۱) ۳۲　　۲) ۴۰　　۳) ۴۸　　۴) ۵۰

پاسخ **گزینهٔ «۴»** باغچه را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم و داریم:



$$2y+x=20$$

ما به دنبال مساحت مستطیل یعنی xy هستیم که داریم:

$$2y+x=20 \Rightarrow 2y=20-x \Rightarrow y=10-\frac{x}{2}$$

$$xy=x(10-\frac{x}{2})=10x-\frac{x^2}{2}$$

حالا می‌بایست رأس منحنی $y=\frac{-x^2}{2}+10x$ را با کمک $(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a})$ محاسبه کرد.

$$-\frac{\Delta}{4a}=\frac{-(10^2-4\times(\frac{-1}{2})\times0)}{4\times(\frac{-1}{2})}=\frac{-100}{-2}=50$$

تست در یک قطعه زمین اگر ۲۰ درخت میوه با فاصله‌های مساوی کاشته شود، پس از رشد کافی از هر درخت به طور متوسط ۶۰ کیلوگرم میوه برداشت می‌شود و به ازای هر درخت اضافی که کاشته شود دو کیلوگرم از متوسط محصول هر درخت کم می‌شود. حداکثر برداشت با این فرضیه کدام است؟ *(انسانی ۸۶)*

۱) ۱۲۰۰　　۲) ۱۲۴۰　　۳) ۱۲۵۰　　۴) ۱۲۸۰

پاسخ **گزینهٔ «۳»** اگر x درخت اضافه‌تر کاشته شود، تعداد درخت‌ها $x+20$ می‌شود، هم‌چنین میزان محصول هر درخت برابر با $60-2x$ می‌شود.

پس محصول کل زمین برابر است با:

$$(x+20)(60-2x)=-2x^2+20x+1200$$

ماکزیمم سهمی به دست آمده برابر است با:

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-20}{-4}=5$$

بنابراین حداکثر برداشت برابر است با:

$$y=-2\times(5)^2+20\times5+1200=1250$$

تابع هزینه و سود

در تمرین‌های این قسمت کتاب سؤالی مطرح شده که به طور مختصر اگر یادآوری شود خالی از لطف نیست! تابع سود به صورت زیر است:

$$P(x)=R(x)-C(x)$$

سود = درآمد − هزینه

تابع درآمد از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید: درآمد = قیمت‌فروش × تعداد کالای فروخته‌شده

تست اگر x تعداد واحد کالای مورد تقاضا و معادلهٔ درآمد و هزینه به ترتیب به صورت $R(x)=200x-\frac{x^2}{3}$ و $C(x)=500+20x$ باشد، ماکزیمم سود به ازای کدام مقدار x حاصل می‌شود؟

۱) ۳۲۰　　۲) ۳۰۰　　۳) ۲۷۰　　۴) ۲۴۰

پاسخ **گزینهٔ «۳»** ابتدا تابع سود را مشخص می‌کنیم.

$$P(x)=R(x)-C(x)=200x-\frac{x^2}{3}-500-20x \Rightarrow P(x)=\frac{-x^2}{3}+180x-500$$

حالا x رأس سهمی را به دست می‌آوریم:

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-180}{2\times\frac{-1}{3}}=270$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

پاسخ تست‌های این درس را در صفحهٔ ۱۸۷ بخوانید.

مختصات رأس و محور تقارن سهمی

۲۴۸- مختصات رأس سهمی $y = 2x^2 + 4x + 3$ کدام است؟

۱) $(1,9)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(-2,3)$ ۴) $(-1,-1)$

۲۴۹- اگر مختصات رأس سهمی $y = mx^2 + 2x - 1$ به صورت $(\frac{1}{2},\frac{-1}{2})$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) -4 ۲) 2 ۳) -2 ۴) 4

۲۵۰- اگر سهمی $y = (a-2)x^2 + (a-1)x + a^2$ دارای بیشترین مقدار باشد، a کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۵۱- اگر مختصات رأس سهمی $y = x - x^2 + m$ به صورت $(n,2)$ باشد، مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{4}$ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{9}{2}$

۲۵۲- اگر طول رأس سهمی $y = -x^2 - 2kx + 4$ برابر $\frac{1}{2}$ باشد، مقدار عرض رأس سهمی چه‌قدر است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{17}{4}$ ۴) $\frac{19}{4}$

۲۵۳- جاهای خالی عبارت «رأس سهمی $y = 2x^2 + 8x - 1$ در ربع .... محورهای مختصات قرار دارد و این سهمی دارای .... مقدار است.» به ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه آمده است؟

۱) سوم ـ بیشترین ۲) اول ـ بیشترین ۳) اول ـ کم‌ترین ۴) سوم ـ کم‌ترین

۲۵۴- معادلهٔ خط تقارن سهمی $y = -4x^2 - 12x - 8$ کدام است؟

۱) $x = 3$ ۲) $x = \frac{3}{2}$ ۳) $x = -\frac{3}{2}$ ۴) $x = -3$

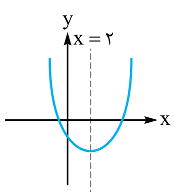
۲۵۵- اگر خط $x = \frac{-1}{3}$ محور تقارن سهمی $y = ax^2 + bx + 2$ باشد، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) 3 ۴) $\frac{3}{2}$

۲۵۶- اگر خط $x = 2$ محور تقارن سهمی $y = -x^2 + mx + 2$ باشد، بیشترین مقدار این سهمی کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۴

۲۵۷- نمودار مقابل مربوط به تابع $y = x^2 + ax + b$ است. مقدار a کدام است؟



۱) -2 ۲) $+2$

۳) 4 ۴) -4

محل برخورد سهمی با محورهای مختصات و نمودارهای دیگر

۲۵۸- نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + 3$ محور عرض‌ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

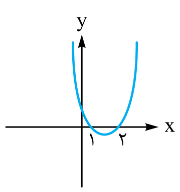
۲۵۹- اگر نمودار تابع $y = mx^2 + x + n$ محور عرض‌ها را با عرض ۳ قطع کند و محور xها را در طول -1 قطع کند، مقدار $m \times n$ کدام است؟

۱) -6 ۲) 6 ۳) -4 ۴) 4

۲۶۰- اگر نمودار سهمی $y = x^2 - 2x$ محور xها را در دو نقطهٔ M و N قطع کند، فاصلهٔ M از N کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۶۱- شکل مقابل نمودار تابع $y = ax^2 + bx + 2$ است. مقدار $a \times b$ کدام است؟



۱) 6

۲) -3

۳) 3

۴) -6

۲۶۲- نمودار سهمی به معادلهٔ $y=-x^{۲}+۲x-۱$ در چند نقطه با محور طول‌ها برخورد می‌کند؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) صفر

۲۶۳- نقطهٔ $A(-۱,-۴)$ رأس سهمی به معادلهٔ $y=۳x^{۲}+ax+b$ است. این سهمی محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (انسانی ۹۱)

۱) -۳　۲) -۲　۳) -۱　۴) ۲

۲۶۴- خط گذرا بر نقطهٔ $(-۲,۴)$ با شیب ۲ و منحنی $y=x^{۲}$ در دو نقطهٔ A و B مشترک هستند. مختصات وسط AB کدام است؟ (انسانی ۹۳)

۱) $(۱,۸)$　۲) $(۱,۱۰)$　۳) $(۲,۹)$　۴) $(۲,۱۰)$

۲۶۵- نمودار دو تابع $y=x^{۲}-x-۲$ و $y=۲x^{۲}-۶x+۴$ در دو نقطه به طول A و B متقاطع هستند. حاصل $A+B$ کدام است؟

۱) ۱　۲) ۵　۳) ۶　۴) ۴

۲۶۶- خط $x=۱$ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=-۲x^{۲}+bx+c$ است. این سهمی محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند. عرض رأس سهمی کدام است؟ (انسانی خارج ۹۰)

۱) ۳/۵　۲) ۴　۳) ۴/۵　۴) ۵

۲۶۷- کدام گزینه مختصات نقطهٔ برخورد دو سهمی $y=-x^{۲}+۶x+۱۰$ و $y=x^{۲}+۴x-۲$ است؟

۱) $(۳,۲۱)$　۲) $(-۲,-۶)$　۳) $(-۳,-۱۷)$　۴) $(۲,۱۰)$

نمودار سهمی

۲۶۸- نمودار سهمی $y=۲x^{۲}+۳$ از کدام ناحیهٔ محورهای مختصات عبور می‌کند؟

۱) اول و چهارم　۲) دوم و سوم　۳) اول و دوم　۴) سوم و چهارم

۲۶۹- نمودار سهمی $y=x-x^{۲}$ از کدام ناحیهٔ محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) اول　۲) دوم　۳) سوم　۴) چهارم

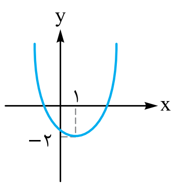
۲۷۰- نمودار سهمی به معادلهٔ $y=۲x^{۲}-۸x+۱$ از کدام ناحیهٔ محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (انسانی ۹۷)

۱) اول　۲) دوم　۳) سوم　۴) چهارم

۲۷۱- نمودار سهمی $y=-\frac{۱}{۲}(x-۲)^{۲}+۳$ از کدام ناحیهٔ محورهای مختصات عبور می‌کند؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) فقط اول، سوم و چهارم　۲) فقط سوم و چهارم　۳) فقط دوم، سوم و چهارم　۴) هر چهار ناحیه

۲۷۲- ضابطهٔ سهمی مقابل کدام می‌تواند باشد؟



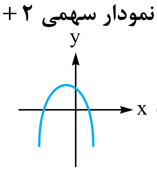
۱) $y=(x-۲)^{۲}-۱$

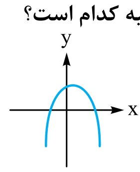
۲) $y=(x-۱)^{۲}-۲$

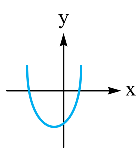
۳) $y=(x+۱)^{۲}-۲$

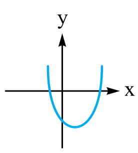
۴) $y=(x+۲)^{۲}-۱$

۲۷۳- نمودار سهمی $y=-x^{۲}+x+۲$ شبیه کدام است؟

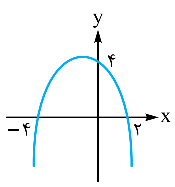
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

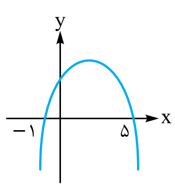
۲۷۴- معادلهٔ سهمی شکل مقابل کدام است؟



۱) $y=۲x^{۲}-x+۲$　۲) $y=-\frac{۱}{۲}x^{۲}+x+۴$

۳) $y=-\frac{۱}{۲}x^{۲}-x+۴$　۴) $y=\frac{۱}{۲}x^{۲}+x-۴$

۲۷۵- معادلهٔ سهمی شکل مقابل کدام می‌تواند باشد؟ (انسانی ۸۸)



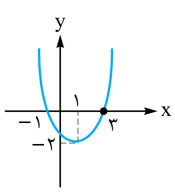
۱) $y=x^{۲}-۳x+۵$

۲) $y=x^{۲}-۴x+۵$

۳) $y=-x^{۲}+۴x+۵$

۴) $y=-x^{۲}-۴x+۵$

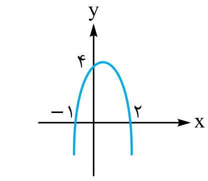
۲۷۶- معادلهٔ سهمی شکل مقابل کدام است؟ (انسانی ۹۲)



۱) $y=x^{۲}-x-۳$　۲) $y=۲x^{۲}+x-۱$

۳) $y=\frac{-۱}{۲}x^{۲}+x+\frac{۳}{۲}$　۴) $y=\frac{۱}{۲}x^{۲}-x-\frac{۳}{۲}$

۲۷۷- معادلهٔ سهمی شکل روبه‌رو کدام گزینه است؟ (انسانی خارج ۹۲)



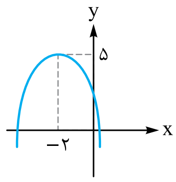
۱) $y=-x^2+2x+4$

۲) $y=2x^2-2x-4$

۳) $y=-2x^2-2x+4$

۴) $y=-2x^2+2x+4$

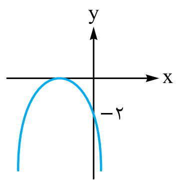
۲۷۸- شکل روبه‌رو نمودار کدام تابع زیر می‌تواند باشد؟ (انسانی ۹۴)



۱) $y=x^2+4x+3$ ۲) $y=-x^2-2x+4$

۳) $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+5$ ۴) $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+3$

۲۷۹- شکل مقابل نمودار کدام تابع است؟ (انسانی ۹۵)



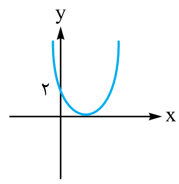
۱) $y=-2x^2+4x-2$

۲) $y=-2x^2-4x-2$

۳) $y=-x^2-2x-2$

۴) $y=2x^2+4x-2$

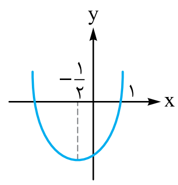
۲۸۰- شکل مقابل نمودار کدام تابع زیر است؟ (انسانی خارج ۹۵)



۱) $y=\frac{1}{2}x^2-2x+2$ ۲) $y=\frac{1}{2}x^2-x+2$

۳) $y=x^2-2x+2$ ۴) $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+2$

۲۸۱- شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=2x^2+ax+b$ است. مقدار b کدام است؟ (انسانی خارج ۹۶)



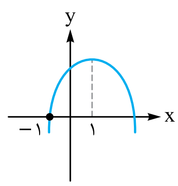
۱) -4

۲) $-3/5$

۳) -3

۴) $-2/5$

۲۸۲- شکل مقابل نمودار تابع $y=-2x^2+ax+b$ است. b کدام است؟ (انسانی ۹۶)



۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

مسائل ماکزیمم و مینیمم (بهینه‌سازی)

۲۸۳- کم‌ترین مقدار تابع $y=\frac{x^2}{2}+x-1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) -1

۲۸۴- اگر بیشترین مقدار تابع $y=-x^2+kx+1$ برابر ۵ باشد، مقدار k کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۸۵- به ازای کدام مقدار a بیشترین مقدار تابع $f(x)=ax^2+20x-120$ برابر ۱۸۰ می‌باشد؟ (انسانی ۹۱)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۸۶- اگر $2a+b=40$، مقدار a کدام باشد تا $y=ab$ ماکزیمم شود؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۲۰ ۴) ۱۵

۲۸۷- بیشترین مقدار تفاضل $\frac{1}{9}$ مربع عددی، از ۶ برابر آن عدد کدام است؟ (انسانی ۹۴)

۱) ۵۴ ۲) ۶۳ ۳) ۷۲ ۴) ۸۱

۲۸۸- بیشترین مقدار اختلاف مربع نصف عددی از ۶ برابر همان عدد کدام است؟ (انسانی خارج ۹۴)

۱) ۳۶ ۲) ۳۸ ۳) ۴۲ ۴) ۴۸

۲۸۹- اگر عدد حقیقی x بین صفر و ۳ تغییر کند، بیشترین اختلاف ۳ برابر آن عدد با مربع خودش کدام است؟ *(انسانی ۸۷)*

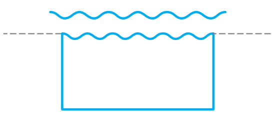
۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{9}{2}$

۲۹۰- از بین مستطیل‌هایی با طول a و عرض b که محیط آن‌ها ۲۸ است، بیشترین مقدار مساحت کدام است؟

۱) ۴۹ ۲) ۹۸ ۳) ۱۴ ۴) ۲۴/۵

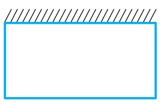
۲۹۱- مستطیل‌هایی با ابعاد متفاوت موجود است. باریک‌ترین آن‌ها به ابعاد ۲۰ و ۶۰ می‌باشد. به ازای هر یک واحد که به عرض آن افزوده شود، ۲ واحد از طول آن کم می‌شود. بیشترین مساحت این مستطیل‌ها کدام است؟ *(انسانی ۸۹)*

۱) ۱۲۵۰ ۲) ۱۲۷۵ ۳) ۱۳۲۵ ۴) ۱۳۵۰



۲۹۲- با سیمی به طول ۶۰۰ متر می‌خواهیم قطعه زمینی به شکل مستطیل را که یک طرف آن رودخانه است، محصور کنیم. ماکزیمم مساحت این زمین کدام است؟ *(انسانی ۹۵)*

۱) ۴۲۰۰۰ ۲) ۴۵۰۰۰ ۳) ۴۶۰۰۰ ۴) ۴۸۰۰۰



۲۹۳- می‌خواهیم با یک قطعه سیم به طول ۵۶ متر، زمینی به شکل مستطیل که یک طرف آن دیوار است محصور شود. بیشترین مساحت زمین محصور شده کدام است؟ *(انسانی ۹۸)*

۱) ۳۶۴ ۲) ۳۷۸ ۳) ۳۹۲ ۴) ۴۰۶

۲۹۴- در یک زمین گلخانه‌ای اگر با فاصله‌های یکسان ۴۰ بوتهٔ گوجه‌فرنگی کاشته شود به طور متوسط از هر بوته ۸ کیلوگرم محصول به دست می‌آید. به ازای هر بوتهٔ اضافی که کاشته شود به مقدار $\frac{1}{8}$ کیلوگرم از میانگین محصول بوته‌ها کاسته می‌شود. در این صورت بیشترین محصول برداشتی کدام است؟ *(انسانی خارج ۸۹)*

۱) ۳۳۶ ۲) ۳۳۸ ۳) ۳۴۰ ۴) ۳۴۲

۲۹۵- در یک قطعه زمین اگر ۲۰۰ بذر با فاصله‌های مناسب کاشته شود، میانگین قیمت محصول برداشتی از هر بذر ۹۰۰ تومان پیش‌بینی شده است. به ازای هر یک بذر اضافی که کاشته شود، مبلغ ۳ تومان از میانگین قیمت محصول برداشتی کم می‌شود. بیشترین قیمت محصول برداشتی کدام است؟ *(انسانی خارج ۹۳)*

۱) ۱۸۷۵۰۰ ۲) ۱۸۸۵۰۰ ۳) ۱۹۱۵۰۰ ۴) ۱۹۲۵۰۰

۲۹۶- در یک قطعه زمین اگر ۳۰ بوتهٔ گوجه‌فرنگی با فاصله‌های مساوی از هم کاشته شوند هر بوته ۴ کیلو محصول می‌دهد. به ازای هر بوتهٔ اضافی که کاشته شود $\frac{1}{10}$ کیلو از میانگین محصول بوته‌ها کم می‌شود. بیشترین محصول برداشتی برحسب کیلوگرم کدام است؟ *(انسانی ۹۷)*

۱) ۱۲۲/۵ ۲) ۱۲۷/۵ ۳) ۱۳۰/۵ ۴) ۱۳۲/۵

۲۹۷- در یک کارگاه تولیدی یکی از کارگران متعهد شده است که در پایان هر هفته ۸۰ قطعه با دستمزد هر قطعه ۴۵۰ تومان تحویل دهد. به ازای قطعهٔ اضافه بر تعهد مبلغ ۵ تومان از دستمزد هر قطعهٔ تحویلی کم می‌شود. بیشترین دستمزد هفتهٔ آن کدام است؟ *(انسانی ۹۳)*

۱) ۳۶۰۷۵ ۲) ۳۶۱۲۵ ۳) ۳۶۱۷۵ ۴) ۳۶۲۲۵

تابع هزینه و سود

۲۹۸- در یک کارگاه تولیدی هزینه‌های ثابت ۲۰۰۰۰ تومان و هزینهٔ تولید هر واحد ۴۰۰۰ تومان است. هزینهٔ تولید چند واحد از این کالا ۸۴۰۰۰ تومان است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۲۱

۲۹۹- در یک شرکت اگر معادلهٔ تقاضا به صورت $x = 180 - 6p$ باشد، برای به دست آوردن بیشترین درآمد، کالا باید با چه قیمتی به فروش برسد؟ (x تعداد کالا و p قیمت کالا برحسب تومان است.) *(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)*

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۳۰۰- یک شرکت تولیدی، برای هر کالای تولیدی روزانهٔ خود قیمتی به مبلغ $1500 - x$ تومان در نظر گرفته است که x تعداد کالای تولیدی در روز می‌باشد. اگر هزینهٔ ثابت روزانه ۳۰۰۰۰ تومان باشد و همچنین به ازای تولید هر کالا ۳۰۰ تومان هزینه کند، تابع سود شرکت برحسب تعداد تولید روزانه کالا کدام است؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۹)*

۱) $P(x) = -x^2 + 1800x + 30000$ ۲) $P(x) = -x^2 + 1400x + 30000$

۳) $P(x) = -x^2 + 1200x - 30000$ ۴) $P(x) = -x^2 + 1500x - 30000$

۳۰۱- تابع درآمد یک کارخانهٔ خودروسازی به صورت $R(x) = -3x^2 + 280x$ (به ازای تولید x خودرو) و تابع هزینهٔ آن به صورت $C(x) = 100x + 15$ (به ازای تولید x خودرو) است. این کارخانه به ازای تولید چند خودرو به بیشترین سود دست پیدا می‌کند؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)*

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۰۰

۳۰۲- اگر تابع درآمد به صورت $y = -\frac{1}{4}x^2 + 30x$ و تابع هزینه به صورت $y = 18x + 80$ باشد، ماکزیمم مقدار سود کدام است؟ *(انسانی ۸۳)*

۱) ۴۸ ۲) ۶۴ ۳) ۷۲ ۴) ۹۶

۳۰۳- اگر برای x تعداد کالا، تابع درآمد به صورت $R(x) = 240x - \frac{1}{20}x^2$ و تابع هزینه به صورت $C(x) = 36000 + 40x$ باشد، ماکزیمم سود چه‌قدر است؟ *(انسانی ۹۲)*

۱) ۱۳۲۰۰۰ ۲) ۱۴۴۰۰۰ ۳) ۱۵۶۰۰۰ ۴) ۱۶۴۰۰۰

۳۰۴- اگر x تعداد واحد کالا باشد، معادلهٔ درآمد به صورت $R = ۱۰۰x - ۰/۱x^۲$ و معادلهٔ هزینه $C = ۴۰۰ + ۶۰x$ است. ماکزیمم سود کدام است؟ (انسانی خارج ۹۵)

۱) ۲۴۰۰ ۲) ۳۲۰۰ ۳) ۳۶۰۰ ۴) ۴۸۰۰

۳۰۵- اگر تابع درآمد به صورت $y = \frac{-۱}{۳}x^۲ + ۲۸x$ و تابع هزینه $y = ۱۶x + ۵۵$ باشد، ماکزیمم مقدار سود کدام است؟ (انسانی خارج ۹۸)

۱) ۴۵ ۲) ۴۸ ۳) ۵۳ ۴) ۵۷

۳۰۶- در یک تولیدی قطعه‌ای از خودرو تولید می‌شود. این تولیدی هر کدام از قطعات را به قیمت ۱۵۰۰ تومان می‌فروشد. اگر در هر روز x واحد از این قطعه تولید کند و بفروشد و تابع هزینهٔ آن برابر $C(x) = x^۲ + ۵۰۰x + ۱۰۰۰$ باشد، بیشترین سود روزانهٔ این تولیدی کدام است؟

۱) ۲۶۹۰۰۰ ۲) ۲۴۹۰۰۰ ۳) ۲۵۹۰۰۰ ۴) ۲۳۹۰۰۰

۳۰۷- در یک شرکت تولیدی تابع درآمد به صورت $y = \frac{-۱}{۲}x^۲ + ۳۰x$ و تابع هزینه به صورت $y = ۱۸x + ۱۰$ می‌باشد، بیشترین سود شرکت چه‌قدر است؟

۱) ۵۲ ۲) ۶۲ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴ (کانون فرهنگی آموزش ۹۹)

فصل ۳ تابع

۱۹۷- گزینه ۱ در گزینهٔ (۲) دو زوج مرتب $(۲,-۱)$ و $(۱-,۱-)$ مؤلفه‌های اول یکسان دارند ولی مؤلفه‌های دوم آن‌ها برابر نیست.

در گزینهٔ (۳) با توجه به این‌که $۲=\sqrt{۴}$ است، پس زوج مرتب‌های $(۲,۲)$ و $(۳,\sqrt{۴})$ مؤلفه‌های اول یکسان دارند ولی مؤلفه‌های دوم آن‌ها برابر نیست.

در گزینهٔ (۴) هم وجود زوج مرتب‌های $(۲,۴)$ و $(۲,۱)$ باعث می‌شود گزینه نادرست باشد.

۱۹۸- گزینه ۴ برای تابع‌بودن رابطهٔ داده‌شده باید زوج مرتب‌های $(۱,۲)$ و $(۱,x+۲)$ برابر باشند، پس:

$$x+۲=۲ \Rightarrow x=۰$$

چون x صفر شد، باید زوج مرتب‌های $(x,y-۱)$ و $(۰,۳)$ هم برابر باشند.

$$y-۱=۳ \Rightarrow y=۴$$

$$x+y=۰+۴=۴$$

۱۹۹- گزینه ۳ رابطهٔ داده‌شده، تابع است، پس اگر مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب برابر باشند باید مؤلفه‌های دومشان هم برابر باشند.

با توجه به زوج مرتب‌های $(۳,۷)$ و $(۳,a+۲b)$ و زوج مرتب‌های $(۵,۲a-b)$ و $(۵,۴)$ داریم:

$$\begin{cases} a+۲b=۷ \\ ۲a-b=۴ \end{cases} \xrightarrow[\text{دو برابر می‌کنیم}]{\text{عبارت بالایی را}} \begin{cases} ۲a+۴b=۱۴ \\ ۲a-b=۴ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{از هم کم می‌کنیم}]{\text{دو معادله را}} ۲a+۴b-۲a+b=۱۴-۴ \Rightarrow ۵b=۱۰$$

$$\Rightarrow b=۲ \Rightarrow a+۲b=۷ \xrightarrow{b=۲} a+۴=۷$$

$$\Rightarrow a=۳ \Rightarrow a^۲-b^۲=۹-۴=۵$$

۲۰۰- گزینه ۱ دو زوج مرتب وقتی با هم برابرند که مؤلفه‌های اول آن‌ها با هم و مؤلفه‌های دوم آن‌ها با هم برابر باشند. پس داریم:

$$\begin{cases} a+b=۳ \\ a-b=۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} ۲a=۵ \Rightarrow a=\frac{۵}{۲}$$

حالا با جای‌گذاری مقدار a در یکی از معادلات بالا، مقدار b را به دست می‌آوریم.

$$a-b=۲ \xrightarrow{a=\frac{۵}{۲}} \frac{۵}{۲}-b=۲ \Rightarrow b=\frac{۱}{۲}$$

در نهایت $\frac{a}{b}$ برابر است با:

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{۵}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=۵$$

۲۰۱- گزینه ۳ یک نمودار ون زمانی تابع است که از هر عضو مجموعهٔ A دقیقاً یک پیکان خارج شده باشد. در گزینهٔ (۳) از عدد ۴، دو پیکان خارج شده است. پس تابع نیست.

۲۰۲- گزینه ۲ از عدد ۴، دو پیکان خارج شده، چون نمودار مربوط به تابع است، پس:

$$a+۱=-۲ \Rightarrow a=-۳$$

$a-۱=-۴$ است و چون -۴ به عدد ۸ وصل شده، پس برای تابع‌بودن باید مقداری که $a-۱$ به آن وصل‌شده هم ۸ باشد، پس:

$$۲b+۱=۸ \Rightarrow ۲b=۷ \Rightarrow b=\frac{۷}{۲}$$

$$a+b=-۳+\frac{۷}{۲}=-\frac{۶}{۲}+\frac{۷}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

۲۰۳- گزینه ۴ در نمودار گزینهٔ (۴) دو نقطه با طول یکسان ولی عرض متفاوت داریم. به عبارت دیگر، اگر خط قائم $x=۰$ را رسم کنیم از دو نقطه رد می‌شود، پس تابع نیست!

۲۰۴- گزینه ۴ فقط در گزینهٔ (۴) است که اگر خطهایی موازی محور عرض‌ها رسم کنیم، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند و بنابراین تابع است.

۲۰۵- گزینه ۲

جدول داده‌شده، زوج مرتب‌های $(۵,-۲),(۰,۵),(۱,۳),(-۱,۱)$ را نشان می‌دهد که این زوج مرتب‌ها فقط در گزینهٔ (۲) حضور دارند.

در گزینه‌های (۱) و (۳) زوج مرتب‌ها به صورت زیر هستند:

۱ $\{(-۱,۱),(۱,۳),(۰,۵),(-۵,۲)\}$

۳ $\{(-۵,۲),(-۱,۱),(۰,۵),(۱,۳)\}$

۲۰۶- گزینه ۲ حداکثر یک پیکان خارج شود یعنی یا خارج نشود یا یکی خارج شود در صورتی که برای تابع‌بودن نمودار پیکانی باید دقیقاً یک پیکان از هر عضو A خارج شود.

۲۰۷- گزینه ۳ باید عبارت کلامی سؤال را به عبارت جبری تبدیل کنیم. اگر ورودی را x فرض کنیم، مجذور ورودی برابر با $x^۲$ می‌شود. در این صورت تابعی که مجذور ورودی خود را تقسیم بر ۲ می‌کند برابر با $f(x)=\frac{x^۲}{۲}$ است.

۲۰۸- گزینه ۲ سؤال $x^۲+x$ را به زبان فارسی می‌خواهد که می‌شود مجموع مربع عددی با خود آن عدد.

بد نیست ضابطهٔ سایر گزینه‌ها را هم ببینید.

۱ $(x+x)^۲=(۲x)^۲=۴x^۲$

۳ $۲(x+x)=۲(۲x)=۴x$

۴ $x+\sqrt{x}$

۲۰۹- گزینه ۴ باید مقدار مؤلفهٔ y را به ازای مقادیر $x=-۱,۰$ از روی نمودار پیدا کنیم.

روی نمودار نقاط $(۰,-۲)$ و $(-۱,۲)$ قرار دارند، پس: $f(۰)=-۲, f(-۱)=۲$

$۲f(۰)\times f(-۱)=۲\times(-۲)\times۲=-۸$

۲۱۰- گزینه ۴ با توجه به زوج مرتب‌های $(۱,۲)$ و $(-۱,-۲)$ داریم:

$f(۱)-f(-۱)=۲-(-۲)=۴$

۲۱۱- گزینه ۴ برای محاسبهٔ $f(۳)$ در $f(x)$ به جای x مقدار ۳ را قرار می‌دهیم.

$f(x)=x^۲-۲x+۱ \xrightarrow{x=۳} f(۳)=۳^۲-۲\times۳+۱=۹-۶+۱=۴$

۲۱۲- گزینه ۴ با جای‌گذاری ۲- و $\frac{۱}{۲}$ در $f(x)$، $f(-۲)$ و $f(\frac{۱}{۲})$ را حساب می‌کنیم.

$f(-۲)=\sqrt{|۲\times(-۲)-۵|}=\sqrt{|-۹|}=\sqrt{۹}=۳$

$f(\frac{۱}{۲})=\sqrt{|۲\times\frac{۱}{۲}-۵|}=\sqrt{|۱-۵|}=\sqrt{۴}=۲$

$f(-۲)+۲f(\frac{۱}{۲})=۳+۲\times۲=۷$

۲۱۳- گزینه ۲ با قراردادن مقادیر ۲ و $-\frac{۱}{۴}$ در تابع، مقادیر $f(۲)$ و $f(-\frac{۱}{۴})$ را حساب می‌کنیم:

$f(۲)=۲\times\sqrt{۲+|۲|}=۲\sqrt{۴}=۴$

$f(-\frac{۱}{۴})=-\frac{۱}{۴}\times\sqrt{۲+|-\frac{۱}{۴}|}=-\frac{۱}{۴}\times\sqrt{۲+\frac{۱}{۴}}=-\frac{۱}{۴}\times\sqrt{\frac{۹}{۴}}$

$=-\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۲}=-\frac{۳}{۸}$

$f(۲)+۴f(-\frac{۱}{۴})=۴+۴\times(-\frac{۳}{۸})=۴-\frac{۳}{۲}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$

۲۱۴- گزینه ۳ ۴ و $۲\sqrt{۲}$ را در تابع f به جای x قرار می‌دهیم:

$f(۴)=\sqrt{۴^۲-۷}=\sqrt{۹}=۳$

$f(۲\sqrt{۲})=\sqrt{(۲\sqrt{۲})^۲-۷}=\sqrt{۱}=۱$

$f(۴)-f(۲\sqrt{۲})=۳-۱=۲$

۲۱۵- گزینه ۱ مقدار تابع را در نقاط خواسته‌شده حساب می‌کنیم.

$f(۲+\sqrt{۲})=|۲(۲+\sqrt{۲})-۵|=|\underbrace{۲\sqrt{۲}-۱}_{\text{مثبت}}|=۲\sqrt{۲}-۱$

$f(۱+\sqrt{۲})=|۲(۱+\sqrt{۲})-۵|=|\underbrace{۲\sqrt{۲}-۳}_{\text{منفی}}|=-(۲\sqrt{۲}-۳)=۳-۲\sqrt{۲}$

حاصل: $\cancel{۲\sqrt{۲}}-۱+۳-\cancel{۲\sqrt{۲}}=۲$

۲۱۶- گزینه ۲ با جای‌گذاری $\frac{۱}{۲}$ در f و g حاصل را به دست می‌آوریم:

$f(\frac{۱}{۲})=|۳\times\frac{۱}{۲}-۵|=|\underbrace{\frac{۳}{۲}-۵}_{\text{منفی}}|=۵-\frac{۳}{۲}=\frac{۷}{۲}$

$g(\frac{۱}{۲})=\sqrt{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}+۲}=\sqrt{\frac{۹}{۴}}=\frac{۳}{۲}$

$f(\frac{۱}{۲})+g(\frac{۱}{۲})=\frac{۷}{۲}+\frac{۳}{۲}=\frac{۱۰}{۲}=۵$

۲۱۷- گزینه ۱ در تابع به جای x مقدار $۲-\sqrt{۵}$ را قرار می‌دهیم:

$f(۲-\sqrt{۵})=\frac{۱}{۴}(۲-\sqrt{۵})^۲+|\underbrace{۲-\sqrt{۵}}_{\text{منفی}}|=\frac{۱}{۴}(۴+۵-۴\sqrt{۵})+\sqrt{۵}-۲$

$=\frac{۹}{۴}-\sqrt{۵}+\sqrt{۵}-۲=\frac{۹}{۴}-۲=\frac{۱}{۴}=۰/۲۵$

۲۱۸- گزینه ۱ بدون ترس در تابع به جای x، عبارت $۲\sqrt{۲}-۳$ را قرار می‌دهیم!

$f(۲\sqrt{۲}-۳)=-\frac{۱}{۳}\times(۲\sqrt{۲}-۳)^۲+|۲(۲\sqrt{۲}-۳)|$

$=\frac{-۱}{۳}\times(۸+۹-۱۲\sqrt{۲})+|\underbrace{۴\sqrt{۲}-۶}_{\text{منفی}}|=-\frac{۱۷}{۳}+\cancel{۴\sqrt{۲}}+۶-\cancel{۴\sqrt{۲}}$

$=-\frac{۱۷}{۳}+\frac{۱۸}{۳}=\frac{۱}{۳}$

۲۱۹- گزینه ۴ با محاسبهٔ $f(-۲)$ و $g(۲)$، حاصل را به دست می‌آوریم.

$f(-۲)=|(-۲)^۲-۵|=|-۱|=۱$

$g(۲)=\frac{۲}{۱+۲^۲}=\frac{۲}{۵}$

$\frac{۱+f(-۲)}{g(۲)}=\frac{۱+۱}{\frac{۲}{۵}}=\frac{۲}{\frac{۲}{۵}}=۵$

۲۲۰- گزینه ۱ در تابع $f(x)$ مقادیر $۱+\sqrt{۲}$ و $۱-\sqrt{۲}$ را به جای x قرار می‌دهیم:

$f(۱+\sqrt{۲})=۱+\sqrt{۲}+\frac{۲}{۱+\sqrt{۲}}$

$f(۱-\sqrt{۲})=۱-\sqrt{۲}+\frac{۲}{۱-\sqrt{۲}}$

$f(۱+\sqrt{۲})+f(۱-\sqrt{۲})=۱+\cancel{\sqrt{۲}}+\frac{۲}{۱+\sqrt{۲}}+۱-\cancel{\sqrt{۲}}+\frac{۲}{۱-\sqrt{۲}}$

$=۲+\frac{۲(۱-\sqrt{۲})+۲(۱+\sqrt{۲})}{(۱+\sqrt{۲})(۱-\sqrt{۲})}=۲+\frac{۲-\cancel{۲\sqrt{۲}}+۲+\cancel{۲\sqrt{۲}}}{۱^۲-(\sqrt{۲})^۲}=۲+\frac{۴}{۱-۲}$

$=۲-۴=-۲$

یادآوری اگر در کسری عبارت $\frac{1}{a\pm\sqrt{b}}$ را داشته باشیم می‌توانیم صورت و مخرج را در مزدوج مخرج کسر ضرب کرده تا کسر گویا شود:

$$\frac{1}{a\pm\sqrt{b}}\times\frac{a\mp\sqrt{b}}{a\mp\sqrt{b}}=\frac{a\mp\sqrt{b}}{a^2-b}$$

۲۲۱- گزینه ۱ نترسید و در تابع داده‌شده، $1-\sqrt{2}$ را به جای x قرار دهید!

$$f(1-\sqrt{2})=\frac{-2(1-\sqrt{2})^2+5(1-\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}-2}=\frac{-2(1+2-2\sqrt{2})+5-5\sqrt{2}}{-1-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{-6+4\sqrt{2}+5-5\sqrt{2}}{-1-\sqrt{2}}=\frac{-1-\sqrt{2}}{-1-\sqrt{2}}=1$$

۲۲۲- گزینه ۲ در تابع $f(x)$، عبارت $3+2\sqrt{6}$ را به جای x می‌گذاریم و حاصل را به دست می‌آوریم.

$$f(3+2\sqrt{6})=\sqrt{(3+2\sqrt{6})^2-6(3+2\sqrt{6})+10}$$

$$\sqrt{9+24+12\cancel{\sqrt{6}}-18-12\cancel{\sqrt{6}}+10}=\sqrt{25}=5$$

۲۲۳- گزینه ۳ مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌های تابع، همان دامنهٔ تابع هستند.

بنابراین دامنهٔ تابع برابر است با: $\{3,0,2,4\}=$ دامنه

۲۲۴- گزینه ۴ هر یک از اعضای دامنه را در تابع جای‌گذاری می‌کنیم تا برد مشخص شود.

$$f(0)=2\times0-1=-1 \qquad f(-1)=2\times(-1)-1=-3$$
$$f(2)=2\times2-1=3 \qquad f(1)=2\times1-1=1$$

پس برد تابع برابر است با: $\{-3,-1,1,3\}=$ برد

۲۲۵- گزینه ۳ مجموعهٔ $\{-2,-1,0,1,2\}$ دامنهٔ تابع را نشان می‌دهد، هر یک از اعضای دامنه را در تابع قرار می‌دهیم تا برد مشخص شود.

$$f(-1)=(-1)^2-1=0 \qquad f(-2)=(-2)^2-1=3$$
$$f(1)=1^2-1=0 \qquad f(0)=(0)^2-1=-1$$
$$f(2)=2^2-1=3$$

پس مجموعهٔ برد تابع برابر با $\{-1,0,3\}$ است و سه عضو دارد.

تذکر همان‌طور که در این سؤال مشخص است تعداد اعضای دامنه و برد ارتباطی با هم ندارند؛ در حل این‌گونه سؤالات حتماً محاسبات را انجام دهید.

۲۲۶- گزینه ۲ دامنه را می‌توان همان سایهٔ نمودار بر روی محور xها دانست. فقط دقت کنید $x=-4$ عضو دامنه است اما $x=3$ چون توخالی است عضو دامنه نیست. پس بازهٔ دامنهٔ تابع برابر با $-4\le x<3$ است.

۲۲۷- گزینه ۱ دامنهٔ تابع $\mathbb{R}-\{3,5\}$ است؛ یعنی همهٔ اعداد حقیقی به‌جز ۳ و ۵ در دامنه هستند.

۱ در نقاط $x=3$ و $x=5$ نمودار توخالی است ولی برد (سایهٔ روی محور yها) برابر $\mathbb{R}$ است. ۲ بازهٔ $3\le y\le5$ در برد نیست. ۳ بازهٔ $3\le x\le5$ در دامنه نیست. ۴ نقاط $y=3,5$ در برد نیستند.

۲۲۸- گزینه ۲ محور yها نشان‌دهندهٔ خروجی تابع یا همان برد است. اگر دقت کنید کم‌ترین مقدار y برابر با -3 و بیشترین مقدار آن ۲ است و تمام نقاط بین این دو عدد نیز در برد تابع حضور دارند.

۲۲۹- گزینه ۲ دامنه برابر ۳ است و چون رابطهٔ داده‌شده تابع است، پس هر سه زوج مرتب با هم برابرند.

$$\begin{cases}x-y=-1\\4x+y=3\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع طرفین}}5x=2\Rightarrow x=\frac{2}{5}$$

$$x-y=-1\xrightarrow{x=\frac{2}{5}}\frac{2}{5}-y=-1\Rightarrow y=\frac{2}{5}+1=\frac{2}{5}+\frac{5}{5}\Rightarrow y=\frac{7}{5}$$

$$(5x,5y)=(5\times\frac{2}{5},5\times\frac{7}{5})=(2,7)$$

۲۳۰- گزینه ۳ برای تابع‌بودن باید زوج مرتب‌های $(2,4)$ و $(2,a+b)$ و همچنین $(1,4a-b)$ و $(1,6)$ با هم برابر باشند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}a+b=4\\4a-b=6\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع طرفین}}a+b+4a-b=4+6$$
$$\Rightarrow 5a=10\Rightarrow a=2$$

حالا با جای‌گذاری a در یکی از معادلات، مقدار b را محاسبه می‌کنیم.

$$a+b=4\xrightarrow{a=2}2+b=4\Rightarrow b=2$$

مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌های داده‌شده همان برد تابع هستند که عبارت‌اند از $\{4,4a-b,a+b,6,a\}$ که با جای‌گذاری مقدار a و b داریم:

$$4a-b=4\times2-2=6$$
$$a+b=2+2=4$$

در نتیجه برد برابر است با: $\{4,6,2\}$

۲۳۱- گزینه ۳ شیب خط گذرنده از دو نقطه برابر حاصل تقسیم تفاضل عرض‌ها بر تفاضل طول‌ها است. پس داریم: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-2}{2-0}=\frac{1}{2}$

۲۳۲- گزینه ۱ برای به دست آوردن عرض از مبدأ لازم است ابتدا معادلهٔ خط را بنویسیم. شیب گذرنده از نقاط $(3,-2)$ و $(1,2)$ برابر است با:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-(-2)}{1-3}=\frac{4}{-2}=-2$$

حالا با جای‌گذاری $m=-2$ و نقطهٔ $(1,2)$ در معادلهٔ خط $y=mx+h$ مقدار h یا همان عرض از مبدأ را به دست می‌آوریم:

$$y=mx+h\xrightarrow[(1,2)]{m=-2}2=-2\times(1)+h\Rightarrow h=4$$

۲۳۳- گزینه ۲ ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطه را به دست می‌آوریم:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5-1}{2-(-4)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

حالا با جای‌گذاری $m=\frac{2}{3}$ و نقطهٔ $(2,5)$ در معادلهٔ خط $y=mx+h$ مقدار h یا همان محل برخورد با محور yها را مشخص کنیم:

$$y=mx+h\xrightarrow[(2,5)]{m=\frac{2}{3}}5=\frac{2}{3}\times2+h\Rightarrow 5=\frac{4}{3}+h$$

$$\Rightarrow h=5-\frac{4}{3}=\frac{15-4}{3}=\frac{11}{3}=3\frac{2}{3}$$

۲۳۴- گزینه ۳ • روش اول: خط از نقاط $(0,-4)$ و $(-2,0)$ گذر کرده است.

شیب خط: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-(-4)}{-2-0}=-2$

معادلهٔ خط: $y-y_1=m(x-x_1)\xrightarrow[m=-2]{x_1=-2,y_1=0}y=-2(x-(-2))$

$$\Rightarrow y=-2x-4$$

نکته

اگر شیب خط مثبت باشد، خط از ناحیهٔ سه به ناحیهٔ یک می‌رود و اگر شیب خط منفی باشد، خط از ناحیهٔ دو به ناحیهٔ چهارم می‌رود.

• روش دوم: با یک نگاه معلوم است که شیب خط منفی است (از ناحیهٔ دو به چهار رفته) از طرفی عرض از مبدأ (محل برخورد با محور y) برابر -4 است. این ۲ مورد را هم که فقط گزینهٔ (۳) دارد.

۲۳۵- گزینه ۲ • روش اول در معادلهٔ خط $y+\frac{۱}{۲}x=۲$ یک بار x و بار دیگر y را برابر صفر قرار می‌دهیم که داریم:

$$\begin{cases} y+\frac{۱}{۲}x=۲ \xrightarrow{x=۰} y=۲ \\ y+\frac{۱}{۲}x=۲ \xrightarrow{y=۰} \frac{۱}{۲}x=۲ \Rightarrow x=۴ \end{cases}$$

پس خط مورد نظر هر دو محور را در عددی مثبت قطع می‌کند که این اتفاق در نمودار گزینهٔ (۲) افتاده است.

• روش دوم اگر معادلهٔ خط را استاندارد (شبیه $y=mx+h$) بنویسیم، داریم:

$$y=-\frac{۱}{۲}x+۲$$

شیب خط منفی و عرض از مبدأ مثبت است، پس نمودار گزینهٔ (۲) شبیه‌تر است.

یادآوری عرض از مبدأ همان محل برخورد با محور yها است. اگر مثبت باشد، خط محور y را بالای صفر و اگر منفی باشد، خط محور y را پایین صفر قطع می‌کند.

۲۳۶- گزینه ۱ می‌دانیم از هر دو نقطه فقط یک خط راست می‌گذرد، پس برای رسم نمودار تابع خط داده‌شده نیاز به ۲ نقطه از آن داریم. برای این کار نقاط ابتدا و انتهای دامنه را در تابع مورد نظر قرار داده و عرض آن‌ها را به دست می‌آوریم.

$y=۲-x \xrightarrow{x=۲} y=۰ \Rightarrow (۲,۰)$ جز تابع است پس باید توپر باشد.

$y=۲-x \xrightarrow{x=-۲} y=۴ \Rightarrow (-۲,۴)$ جزء تابع نیست پس باید توخالی باشد.

نقاط فوق با ویژگی‌های نوشته‌شده در نمودار گزینهٔ (۱) وجود دارد.

۲۳۷- گزینه ۱ ابتدا معادلهٔ خط گذرنده از ۲ نقطه را می‌نویسیم:

شیب خط: $m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۵-۳}{۲-(-۱)}=\frac{۲}{۳}$

حالا با شیب $m=\frac{۲}{۳}$ و یکی از نقاط مانند $(۲,۵)$ معادلهٔ خط را می‌نویسیم:

$$y-y_۱=m(x-x_۱) \xrightarrow[m=\frac{۲}{۳}]{x_۱=۲,\,y_۱=۵} y-۵=\frac{۲}{۳}(x-۲)$$

$$\Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x+\frac{۱۱}{۳}$$

برای به دست آوردن نقطهٔ تقاطع دو خط، آن‌ها را در دستگاه قرار می‌دهیم:

$$\begin{matrix}\times۲ \\ \times۳\end{matrix}\begin{cases} y=-x-۳ \\ y=\frac{۲}{۳}x+\frac{۱۱}{۳}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲y=-۲x-۶ \\ ۳y=۲x+۱۱\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع طرفین}} ۲y+۳y=-۲x-۶+۲x+۱۱ \Rightarrow ۵y=۵ \Rightarrow y=۱$$

نکته

برای این‌که نقطهٔ برخورد دو خط مشخص شود، باید آن دو خط را در دستگاه قرار دهیم. جواب دستگاه همان نقطهٔ تقاطع دو خط است.

۲۳۸- گزینه ۱ محل برخورد دو خط برابر است با:

$$\begin{matrix}\times(-۲) \\ \\ \end{matrix}\begin{cases} y=x-۸ \\ ۲y=-۵x-۹\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲y=-۲x+۱۶ \\ ۲y=-۵x-۹\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع طرفین}} ۰=-۷x+۷ \Rightarrow x=۱$$

با جای‌گذاری $x=۱$ در یکی از معادلات بالا مقدار y را به دست می‌آوریم:

$$y=x-۸ \xrightarrow{x=۱} y=۱-۸=-۷$$

پس نقطهٔ برخورد دو خط $(۱,-۷)$ است که شیب خطی که از آن و نقطهٔ $(-۳,۵)$ می‌گذرد برابر است با:

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۵-(-۷)}{-۳-۱}=\frac{۱۲}{-۴}=-۳$$

۲۳۹- گزینه ۲ ابتدا محل برخورد دو خط را به کمک دستگاه به دست می‌آوریم.

$$\begin{matrix} \\ \times۲\end{matrix}\begin{cases} ۲x+y=۵ \\ ۳y-x=-۶\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x+y=۵ \\ ۶y-۲x=-۱۲\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع طرفین}} ۲x+y+۶y-۲x=۵-۱۲ \Rightarrow ۷y=-۷ \Rightarrow y=-۱$$

حالا با جای‌گذاری $y=-۱$ در یکی از معادلات بالا مقدار x را به دست می‌آوریم:

$$۲x+y=۵ \xrightarrow{y=-۱} ۲x-۱=۵ \Rightarrow ۲x=۶ \Rightarrow x=۳$$

حالا شیب خط گذرنده از نقاط $(۳,-۱)$ و $(-۲,۴)$ را مشخص می‌کنیم:

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۴-(-۱)}{-۲-۳}=\frac{۵}{-۵}=-۱$$

۲۴۰- گزینه ۳ نقطهٔ $(۱,۲)$ روی خط قرار دارد. از طرفی در $y=mx+h$، مقدار h (عرض از مبدأ) برابر صفر است. پس یک جای‌گذاری خیلی ساده داریم!

$$y=mx \xrightarrow{(۱,۲)} ۲=m \Rightarrow y=۲x$$

۲۴۱- گزینه ۱ $f(۱)=۳$ است؛ یعنی تابع از نقطهٔ $(۱,۳)$ می‌گذرد، پس داریم:

$$f(۱)=۳ \Rightarrow m\times(۱)+۲=۳ \Rightarrow m=۱$$

۲۴۲- گزینه ۳ با استفاده از جای‌گذاری نقطهٔ $(-۱,+۲)$ و $m=۳$ در معادلهٔ تابع خطی $f(x)=mx+h$، ضابطهٔ تابع خطی f را مشخص می‌کنیم:

$$f(x)=mx+h \xrightarrow[(-۱,۲)]{m=۳} ۲=۳\times(-۱)+h \Rightarrow h=۵$$

پس ضابطهٔ f برابر است با:

$$f(x)=۳x+۵$$

حالا با جای‌گذاری $x=+۱$ در تابع f، مقدار $f(-۱)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=۳x+۵ \xrightarrow{x=+۱} f(+۱)=۳\times(+۱)+۵=+۳+۵=۸$$

۲۴۳- گزینه ۴ فرم کلی تابع خطی به صورت $f(x)=mx+h$ است. همچنین خط مورد نظر از نقاط $(۴,۵)$ و $(۲,۳)$ گذر می‌کند. با جای‌گذاری آن‌ها در معادلهٔ خط داریم:

$$\begin{cases} f(۴)=۵ \\ f(۲)=۳\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴m+h=۵ \\ ۲m+h=۳\end{cases} \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم } (-۱)]{\text{عبارت پایینی را در}} \begin{cases} ۴m+h=۵ \\ -۲m-h=-۳\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع طرفین}} ۴m+h-۲m-h=۵-۳ \Rightarrow ۲m=۲ \Rightarrow m=۱$$

حالا با جای‌گذاری $m=۱$ در یکی از معادلات بالا مقدار h را به دست می‌آوریم:

$$۴m+h=۵ \xrightarrow{m=۱} ۴+h=۵ \Rightarrow h=۱$$

پس $f(x)=x+۱$ و داریم:

$$f(\tfrac{۱}{۲})+f(\tfrac{۳}{۲})=\frac{۱}{۲}+۱+\frac{۳}{۲}+۱=۴$$

۲۴۴- گزینه ۲ تابع از نقاط $(۱,۳)$ و $(-۱,-۱)$ می‌گذرد. پس این نقاط را در ضابطه قرار می‌دهیم:

$$\begin{matrix} f(۱)=۳ \\ f(-۱)=-۱\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} m+n=۳ \\ -m+n=-۱\end{cases} \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} ۲n=۲$$

$$\Rightarrow n=۱,\ m+n=۳ \xrightarrow{n=۱} m+۱=۳ \Rightarrow m=۲$$

در نتیجه حاصل $m\times n$ برابر است با:

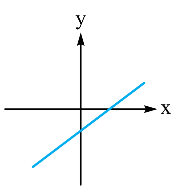
$$m\times n=۲\times۱=۲$$

۲۴۵- گزینه ۲ اگر معادلهٔ خط را شبیه $y=mx+h$ بنویسیم، داریم:

$$۲y-x+۱=۰ \Rightarrow ۲y=x-۱ \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}$$

شیب مثبت و عرض از مبدأ منفی است، پس نمودار شبیه نمودار مقابل است که فقط از ناحیهٔ ۳ عبور نمی‌کند.

برای رسم نمودار به صورت دقیق می‌توانید دو نقطه از تابع خطی را مشخص کرده و خط گذرنده از آن‌ها را رسم کنید.



۲۴۶- گزینه ۴ اگر دمای اولیه برحسب درجه، x بوده باشد، مقدار دما برحسب فارنهایت برابر است با:

$$F=\frac{۹}{۵}x+۳۲$$

چون حالا دما ۳۰ درجه بالا رفته، پس دما برحسب فارنهایت برابر است با:

$$F'=\frac{۹}{۵}(x+۳۰)+۳۲$$

اختلاف دو دما برابر است با:

$$F'-F=\cancel{\frac{۹}{۵}x}+۵۴+\cancel{۳۲}-\cancel{\frac{۹}{۵}x}-\cancel{۳۲}=۵۴$$

۲۴۷- گزینه ۱ درآمد این شرکت با فروش x کالا برابر $60x$ است. سوددهی وقتی آغاز می‌شود که میزان درآمد از میزان هزینه‌ها بیشتر شود. پس مشخص می‌کنیم چند کالا باید به فروش رود تا میزان درآمد و هزینه‌ها برابر شود.

هزینه‌ها = درآمد $\Rightarrow 2000+10x=60x \Rightarrow 2000=50x \Rightarrow x=40$

پس با تولید ۴۰ کالا، درآمد با هزینه‌ها برابر شده و از تولید ۴۱اُمین کالا سوددهی آغاز می‌شود.

۲۴۸- گزینه ۲ ابتدا طول رأس سهمی را محاسبه کرده و با جای‌گذاری آن در معادله، عرض رأس سهمی را به دست می‌آوریم:

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2\times 2}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$y=2x^2+4x+3 \xrightarrow{x=-1} y=2\times(-1)^2+4\times(-1)+3=1$$

۲۴۹- گزینه ۳ x رأس سهمی یا همان $\frac{1}{2}$ برابر $\frac{-b}{2a}$ است، پس:

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2m}=\frac{1}{2} \Rightarrow m=-2$$

۲۵۰- گزینه ۱ سهمی وقتی ماکزیمم دارد که ضریب x^2 کوچک‌تر از صفر باشد.

$$a-2<0 \Rightarrow a<2$$

۲۵۱- گزینه ۳ ابتدا معادله را به صورت مرتب‌شده می‌نویسیم:

$$y=-x^2+x+m$$

طول رأس سهمی برابر $\frac{-b}{2a}$ است. $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-1}{2\times(-1)}=\frac{1}{2}=n$

از طرفی مختصات رأس سهمی در معادلهٔ آن صدق می‌کند، پس:

$$y=-x^2+x+m \xrightarrow[y=2]{x=\frac{1}{2}} 2=-(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}+m$$

$$\Rightarrow m=\frac{7}{4} \Rightarrow m+n=\frac{7}{4}+\frac{1}{2}=\frac{9}{4}$$

۲۵۲- گزینه ۳ طول رأس سهمی که همان $\frac{-b}{2a}$ است:

$$-\frac{-2k}{2\times(-1)}=\frac{1}{2} \Rightarrow -k=\frac{1}{2} \Rightarrow k=-\frac{1}{2}$$

پس معادلهٔ داده‌شده به صورت $y=-x^2+x+4$ است که با جای‌گذاری طول رأس سهمی، عرض را به دست می‌آوریم:

$$y=-x^2+x+4 \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} y=-(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}+4=\frac{17}{4}$$

۲۵۳- گزینه ۴ طول رأس سهمی برابر $x=-\frac{b}{2a}=\frac{-8}{4}=-2$ است و عرض رأس سهمی برابر است با:

$$y=2x^2+8x-1 \xrightarrow{x=-2} =2\times(-2)^2+8\times(-2)-1=-9$$

پس رأس سهمی نقطهٔ $(-2,-9)$ است که در ناحیهٔ سوم محورهای مختصاتی قرار دارد. از طرفی چون ضریب x^2 مثبت است پس سهمی مینیمم دارد.

۲۵۴- گزینه ۳ معادلهٔ خط تقارن به صورت $x=\frac{-b}{2a}$ است.

$$x=-\frac{-12}{2\times(-4)}=-\frac{3}{2} \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$$

۲۵۵- گزینه ۴ معادلهٔ محور تقارن سهمی برابر $x=\frac{-b}{2a}$ است.

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-1}{3} \Rightarrow \frac{b}{a}=+\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{b}=+\frac{3}{2}$$

۲۵۶- گزینه ۳ با توجه به این‌که معادلهٔ محور تقارن برابر $x=\frac{-b}{2a}$ است، داریم:

$$x=\frac{-b}{2a} \Rightarrow 2=\frac{-m}{-2} \Rightarrow m=4$$

پس معادله به صورت $y=-x^2+4x+2$ است که با جای‌گذاری $x=2$ بیشترین مقدار سهمی به دست می‌آید. $y=-2^2+4\times2+2=-4+8+2=6$

۲۵۷- گزینه ۴ با توجه به نمودار معادلهٔ محور تقارن به صورت $x=2$ است که داریم: $x=\frac{-b}{2a} \Rightarrow 2=\frac{-a}{2} \Rightarrow a=-4$

۲۵۸- گزینه ۳ برای به دست آوردن محل برخورد هر نمودار با محور y (عرض‌ها) مقدار x را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$y=ax^2+bx+3 \xrightarrow{x=0} y=a\times0^2+b\times0+3 \Rightarrow y=3$$

۲۵۹- گزینه ۱ نقاط $(0,3)$ و $(-1,0)$ روی تابع قرار دارند.

$$y=mx^2+x+n \xrightarrow{(0,3)} n=3$$

پس معادله به صورت $y=mx^2+x+3$ است.

$$y=mx^2+x+3 \xrightarrow{(-1,0)} 0=m(-1)^2+(-1)+3$$

$$\Rightarrow 0=m-1+3 \Rightarrow m=-2$$

$$m\times n=-2\times3=-6$$

۲۶۰- گزینه ۲ نمودار سهمی محور xها را در ریشه‌های تابع قطع می‌کند. M و N یا ریشه‌های تابع داده‌شده برابر است با:

$x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow x=0$ یا $x=2$

پس ریشه‌ها برابر صفر و ۲ هستند که ۲ واحد از هم فاصله دارند.

۲۶۱- گزینه ۲ نقاط $(1,0)$ و $(2,0)$ روی تابع قرار دارند.

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+2 \xrightarrow{(1,0)} \\ y=ax^2+bx+2 \xrightarrow{(2,0)} \end{cases} \begin{cases} a+b+2=0 \\ 4a+2b+2=0 \end{cases}$$

با ضرب معادلهٔ بالا در ۲- و جمع طرفین معادله‌ها داریم: $\begin{cases} -2a-2b-4=0 \\ \underline{4a+2b+2=0} \end{cases}$

$$2a-2=0 \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1$$

$$a+b+2=0 \xrightarrow{a=1} 1+b+2=0 \Rightarrow b=-3$$

حاصل ab برابر است با: $ab=1\times(-3)=-3$

۲۶۲- گزینه ۱ برای این‌که بفهمیم نمودار سهمی محور طول‌ها را در چند نقطه قطع می‌کند باید مقدار y را برابر صفر قرار دهیم و تعداد ریشه‌های معادله را حساب کنیم.

$$y=0 \Rightarrow -x^2+2x-1=0$$

$$\Delta=2^2-4\times(-1)\times(-1)=4-4=0$$

$\Delta=0$ است پس معادله ریشهٔ مضاعف دارد و سهمی در یک نقطه با محور طول‌ها برخورد می‌کند. (نمودار در یک نقطه بر محور xها مماس است.)

۲۶۳- گزینه ۳ طول رأس سهمی که برابر $\frac{-b}{2a}$ است و ۱- شده است. پس:

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-a}{6}=-1 \Rightarrow a=6$$

پس معادلهٔ داده‌شده برابر $y=3x^2+6x+b$ است و نقطهٔ $A(-1,-4)$ (رأس سهمی) روی آن قرار دارد.

$$-4=3\times(-1)^2+6\times(-1)+b \Rightarrow -4=3-6+b \Rightarrow b=-1$$

دقت کنید محل برخورد با محور عرض‌ها (yها) در تابع $y=ax^2+bx+c$ برابر c است.

۲۶۴- گزینه ۲ ابتدا معادلهٔ خط را مشخص می‌کنیم:

$$y-y_۱=m(x-x_۱) \Rightarrow y-۴=۲(x+۲) \Rightarrow y=۲x+۸$$

حالا برای به دست آوردن محل برخورد دو منحنی باید معادله‌ها را برابر قرار داده و ریشه‌ها را محاسبه کنیم.

$$x^۲=۲x+۸ \Rightarrow x^۲-۲x-۸=۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۲)=۰$$

ریشه‌های معادله برابر ۴ و ۲- است. پس نقاط برخورد $(-۲,۴)$ و $(۴,۱۶)$ هستند که نقطهٔ وسط آن‌ها برابر است با: $(\frac{۴-۲}{۲},\frac{۱۶+۴}{۲})=(۱,۱۰)$

۲۶۵- گزینه ۲ برای به دست آوردن محل برخورد نمودارهای دو تابع، باید معادله‌های آن‌ها را مساوی یکدیگر قرار دهیم.

$$x^۲-x-۲=۲x^۲-۶x+۴ \Rightarrow x^۲-۵x+۶=۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۳)=۰$$

ریشه‌های معادلهٔ بالا همان طول نقاط برخورد دو سهمی هستند که برابر ۲ و ۳ می‌باشند، پس: $A+B=۵$

۲۶۶- گزینه ۴ با توجه به این‌که سهمی محور yها را در عرض ۳ قطع می‌کند پس نقطهٔ $(۰,۳)$ روی سهمی قرار دارد و در نتیجه $c=۳$ است. از طرفی معادلهٔ محور تقارن برابر $x=\frac{-b}{۲a}$ است، که داریم:

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-b}{-۴}=۱ \Rightarrow b=۴$$

در نتیجه معادلهٔ سهمی به صورت $y=-۲x^۲+۴x+۳$ است که عرض رأس سهمی با جای‌گذاری $x=۱$ به دست می‌آید. $y=-۲+۴+۳=۵$

۲۶۷- گزینه ۲ دو ضابطه را مساوی هم قرار می‌دهیم.

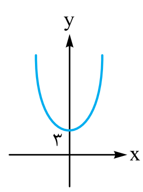
$$-x^۲+۶x+۱۰=x^۲+۴x-۲ \Rightarrow ۲x^۲-۲x-۱۲=۰ \Rightarrow x^۲-x-۶=۰$$
$$\Rightarrow (x+۲)(x-۳)=۰$$

دو سهمی در طول‌های ۲- و ۳ با هم برخورد دارند که مختصات این نقاط برابر است با:

$$y=x^۲+۴x-۲ \xrightarrow{x=۳} y=۳^۲+۴\times۳-۲=۱۹ \Rightarrow (۳,۱۹)$$
$$y=x^۲+۴x-۲ \xrightarrow{x=-۲} y=(-۲)^۲+۴\times(-۲)-۲=-۶ \Rightarrow (-۲,-۶)$$

۲۶۸- گزینه ۳ می‌دانیم طول رأس سهمی به معادله $y=ax^۲+bx+c$ برابر $\frac{-b}{۲a}$ است. پس طول رأس سهمی به معادلهٔ $y=۲x^۲+۳$ برابر $-\frac{۰}{۴}$ یعنی صفر است و عرض رأس سهمی برابر است با:

$$y=۲x^۲+۳ \xrightarrow{x=۰} y=۲(۰)^۲+۳=۳$$

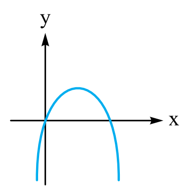


در نتیجه نقطهٔ $(۰,۳)$ رأس سهمی مورد نظر است و از آن‌جا که ضریب $x^۲$ عددی بزرگ‌تر از صفر است، پس شاخه‌های سهمی رو به بالا و شکلی شبیه نمودار مقابل دارد.

با توجه به نمودار مشخص است که نمودار سهمی داده‌شده از ناحیهٔ اول و دوم عبور می‌کند.

۲۶۹- گزینه ۲ • روش اول عرض نقاطی که در آن نمودار با محور xها برخورد می‌کند، برابر صفر است. بنابراین:

$$x-x^۲=۰ \Rightarrow x(۱-x)=۰ \Rightarrow x=۰,۱$$

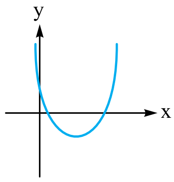


از طرفی چون ضریب $x^۲$ منفی است پس سهمی رو به پایین بوده و شکلی مانند نمودار مقابل دارد.

همان‌طور که مشخص است نمودار از ناحیهٔ دوم عبور نمی‌کند.

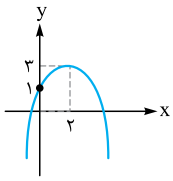
• روش دوم ضرب دو ریشه صفر و حاصل‌جمع آن‌ها عددی مثبت است. پس حتماً یکی از ریشه‌ها صفر و دیگری مثبت است. از طرفی چون $a<۰$ پس سهمی رو به پایین است و می‌توانیم نمودار را مانند بالا رسم کنیم.

۲۷۰- گزینه ۳ ضرب ریشه‌ها $(\frac{c}{a})$ برابر $\frac{۱}{۲}$ و جمع ریشه‌ها $(\frac{-b}{a})$ برابر ۴ است. پس هر دو ریشه عددی مثبت هستند و چون ضریب $x^۲$ عددی مثبت است، شکل سهمی تقریباً به صورت مقابل است که از ناحیهٔ سوم عبور نمی‌کند.



دقت کنید ضرب ریشه‌ها مثبت است پس ریشه‌ها هر دو یا مثبت یا هر دو منفی هستند ولی از آن‌جا که جمع آن‌ها مثبت است پس هر دو مثبت هستند.

۲۷۱- گزینه ۴ رأس سهمی به مختصات $y=a(x-h)^۲+k$ نقطهٔ (h,k) است، پس رأس سهمی $y=-\frac{۱}{۲}(x-۲)^۲+۳$ نقطهٔ $(۲,۳)$ است؛ با توجه به این‌که ضریب $x^۲$ عددی منفی است و مقدار تابع به ازای $x=۰$ برابر یک است پس شکل سهمی به صورت مقابل است و از هر چهار ناحیه عبور می‌کند.



۲۷۲- گزینه ۲ رأس سهمی به مختصات $y=a(x-h)^۲+k$ برابر (h,k) است، از طرفی با توجه به نمودار رأس سهمی برابر $(۱,-۲)$ است که فقط سهمی گزینهٔ (۲) همین رأس را دارد.

۲۷۳- گزینه ۲ ضریب $x^۲$ منفی است پس نمودار رو به پایین است و گزینه‌های (۳) و (۴) حذف می‌شوند. از طرفی طول رأس سهمی برابر $\frac{-b}{۲a}$ یا $\frac{۱}{۲}$ است که عددی مثبت بوده و طول رأس سهمی نمودار گزینهٔ (۲) هم عددی مثبت است.

۲۷۴- گزینه ۲ محل برخورد با محور yها (عرض از مبدأ) برابر ۴ است، پس در $y=ax^۲+bx+c$ باید c برابر ۴ باشد و گزینه‌های (۱) و (۴) حذف می‌شوند. همچنین نقطهٔ $(۲,۰)$ روی سهمی قرار دارد. پس:

۲ $y=-\frac{۱}{۲}x^۲+x+۴ \xrightarrow{x=۲} y=-\frac{۱}{۲}\times۴+۲+۴ \Rightarrow y=۴$

پس نقطهٔ $(۲,۰)$ روی این سهمی قرار ندارد.

۳ $y=-\frac{۱}{۲}x^۲-x+۴ \xrightarrow{x=۲} y=-\frac{۱}{۲}\times۲^۲-۲+۴ \Rightarrow y=۰$

پس نمودار داده‌شده مربوط به سهمی آمده در گزینهٔ (۳) است.

۲۷۵- گزینه ۳ سهمی رو به پایین است پس حتماً ضریب $x^۲$ عددی منفی است. (رد ۱ و ۲) از طرفی ریشه‌ها برابر ۵ و ۱- هستند که ضرب آن‌ها ۵- و جمع آن‌ها ۴ است که جمع و ضرب ریشه‌های گزینه‌های (۳) و (۴) عبارت‌اند از:

۳ $y=-x^۲+۴x+۵ \Rightarrow \begin{cases} S=\frac{-b}{a}=\frac{-۴}{-۱}=۴ \\ P=\frac{c}{a}=\frac{۵}{-۱}=-۵ \end{cases}$

بنابراین نمودار داده‌شده مربوط به همین سهمی است.

با این‌که جواب مشخص شده بد نیست جمع و ضرب ریشه‌ها را در گزینهٔ (۴) هم به دست بیاوریم که هم تمرینی کرده باشیم و هم خیالمان راحت شود که جواب نیست.

۴ $y=-x^۲-۴x+۵ \Rightarrow \begin{cases} S=\frac{-b}{a}=\frac{-(-۴)}{-۱}=-۴ \\ P=\frac{c}{a}=\frac{۵}{-۱}=-۵ \end{cases}$

۲۷۶- گزینه ۴ شاخه‌های سهمی رو به بالاست پس ضریب $x^۲$ مثبت است (رد ۳)، از طرفی طول رأس سهمی برابر یک است، طول رأس سهمی در سایر گزینه‌ها برابر است با:

۱ $y=x^2-x-3 \Rightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-1)}{2}=\frac{1}{2}$

۲ $y=2x^2+x-1 \Rightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{-1}{2\times 2}=-\frac{1}{4}$

۴ $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2} \Rightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-1)}{2\times\frac{1}{2}}=1$

همان‌طور که دیدید رأس سهمی فقط در گزینهٔ (۴) برابر یک است.

۲۷۷- گزینه ۴ چون سهمی رو به پایین است پس ضریب x^2 منفی است و گزینهٔ (۲) حذف می‌شود. ریشه‌ها هم برابر ۲ و ۱− هستند پس کافی است بررسی کنیم در کدام گزینه ضرب ریشه‌ها $(\frac{c}{a})$ برابر ۲− و جمع ریشه‌ها $(\frac{-b}{a})$ برابر یک است.

۱ $y=-x^2+2x+4 \Rightarrow \begin{cases} S=\frac{-b}{a}=\frac{-2}{-1}=2 \\ P=\frac{c}{a}=\frac{4}{-1}=-4 \end{cases}$

۳ $y=-2x^2-2x+4 \Rightarrow \begin{cases} S=\frac{-b}{a}=\frac{-(-2)}{-2}=-1 \\ P=\frac{c}{a}=\frac{4}{-2}=-2 \end{cases}$

۴ $y=-2x^2+2x+4 \Rightarrow \begin{cases} S=\frac{-b}{a}=\frac{-2}{-2}=1 \\ P=\frac{c}{a}=\frac{4}{-2}=-2 \end{cases}$

همان‌طور که دیدید جمع و ضرب ریشه‌ها فقط در گزینهٔ (۴) به ترتیب برابر ۱ و ۲− هستند.

۲۷۸- گزینه ۴ سهمی رو به پایین است پس ضریب x^2 باید منفی باشد و گزینهٔ (۱) حذف می‌شود. مختصات رأس سهمی برابر $(-2,5)$ است که بررسی می‌کنیم در معادله کدام‌یک از گزینه‌های باقی‌مانده صدق می‌کند.

۲ $y=-x^2-2x+4 \xrightarrow{x=-2} y=-(-2)^2-2\times(-2)+4$

$\Rightarrow y=-4+4+4 \Rightarrow y=4$

پس نقطهٔ $(-2,5)$ روی این سهمی قرار ندارد.

۳ $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+5 \xrightarrow{x=-2} y=-\frac{1}{2}(-2)^2-2\times(-2)+5$

$\Rightarrow y=-2+4+5 \Rightarrow y=7$

پس نقطهٔ $(-2,5)$ روی این سهمی قرار ندارد.

۴ $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+3 \xrightarrow{x=-2} y=-\frac{1}{2}(-2)^2-2\times(-2)+3$

$\Rightarrow y=-\frac{1}{2}\times 4+4+3 \Rightarrow y=5$

پس نقطهٔ $(-2,5)$ روی این سهمی قرار دارد.

۲۷۹- گزینه ۲ سهمی رو به پایین است پس ضریب x^2 منفی است و گزینهٔ (۴) حذف می‌گردد. همچنین مشخص است که طول رأس سهمی $(\frac{-b}{2a})$ عددی منفی است در نتیجه گزینهٔ (۱) هم حذف است. (زیرا طول رأس سهمی آن برابر $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2\times(-2)}=1$ است.) همچنین چون نمودار بر محور xها مماس است معادلهٔ $y=0$ ریشهٔ مضاعف دارد.

۲ $-2x^2-4x-2=0 \Rightarrow \Delta=(-4)^2-4\times(-2)\times(-2)=0$

۳ $-x^2-2x-2=0 \Rightarrow \Delta=(-2)^2-4\times(-1)\times(-2)=-4$

پس پاسخ گزینهٔ (۲) است.

۲۸۰- گزینه ۱ با توجه به این‌که نمودار بر محور xها مماس است پس در معادلهٔ $y=0$ هم Δ برابر صفر است.

بررسی گزینه‌ها:

۱ $\Delta=(-2)^2-4\times\frac{1}{2}\times 2=4-4=0$

۲ $\Delta=(-1)^2-4\times\frac{1}{2}\times 2=-3$

۳ $\Delta=(-2)^2-4\times 1\times 2=-4$

۴ $\Delta=2^2-4\times(-\frac{1}{2})\times 2=8$

ضمناً این گزینه ماکزیمم دارد و نیاز به چک‌کردن ندارد!

پس فقط تابع گزینهٔ (۱) می‌تواند پاسخ باشد.

۲۸۱- گزینه ۱ در معادلهٔ استاندارد سهمی، طول رأس برابر $\frac{-b}{2a}$ است.

طول رأس سهمی با توجه به نمودار برابر $-\frac{1}{2}$ است.

$x=\frac{-b}{2a} \Rightarrow -\frac{1}{2}=\frac{-a}{4} \Rightarrow a=2$

در نتیجه معادله به شکل $y=2x^2+2x+b$ است که با توجه به نمودار فقط $(1,0)$ در آن صدق می‌کند. $0=2\times 1+2+b \Rightarrow b=-4$

۲۸۲- گزینه ۴ طول رأس سهمی با توجه به نمودار برابر یک است. پس:

$\frac{-a}{-4}=1 \Rightarrow a=4$

در نتیجه معادله به صورت $y=-2x^2+4x+b$ است که از نقطهٔ $(-1,0)$ می‌گذرد.

$0=-2\times(-1)^2+4\times(-1)+b \Rightarrow b=6$

۲۸۳- گزینه ۲ کم‌ترین مقدار تابع همان عرض رأس سهمی است.

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-1}{2\times\frac{1}{2}}=-1$

با قراردادن طول رأس سهمی در ضابطهٔ تابع، عرض رأس را محاسبه می‌کنیم:

$y=\frac{(-1)^2}{2}+(-1)-1=-\frac{3}{2}$

۲۸۴- گزینه ۴ بیشترین مقدار همان عرض رأس سهی است.

$y=\frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow -\frac{k^2-4\times(-1)\times 1}{-4}=5$

$\Rightarrow k^2+4=20 \Rightarrow k^2=16 \Rightarrow k=\pm 4$

۲۸۵- گزینه ۲ باید بیشترین مقدار تابع (عرض رأس سهمی مورد نظر) را برابر ۱۸۰ قرار می‌دهیم و مقدار a را محاسبه کنیم:

$y=\frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow 180=-\frac{20^2-4\times a\times(-120)}{4a}$

$\Rightarrow -720a=400+480a \Rightarrow -1200a=400 \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$

۲۸۶- گزینه ۲ از $2a+b=40$ داریم $b=40-2a$، پس:

$y=ab=a\times(40-2a)=40a-2a^2$

بیشترین مقدار تابع y در رأس سهمی اتفاق می‌افتد، بنابراین داریم:

$y=-2a^2+40a \Rightarrow$ طول رأس سهمی: $a=\frac{-40}{2\times(-2)}=10$

۲۸۷- گزینه ۴ عدد مورد نظر را x فرض می‌کنیم، عبارت کلامی صورت سؤال برابر $6x-\frac{1}{9}x^2$ است، که ماکزیمم آن برابر است با: عبارت: $-\frac{1}{9}x^2+6x$

ماکزیمم: $\frac{-\Delta}{4a}=-\frac{36-4\times(\frac{-1}{9})\times 0}{4\times\frac{-1}{9}}=\frac{36}{\frac{4}{9}}=\frac{\cancel{36}^{\,9}\times 9}{\cancel{4}}=81$

۲۸۸- گزینه ۱ عدد مورد نظر را x فرض می‌کنیم و عبارت کلامی سؤال را تبدیل به عبارت جبری می‌کنیم. عبارت: $6x-(\frac{x}{2})^2$

ماکزیمم عبارت فوق برابر است با: ماکزیمم: $\frac{-\Delta}{4a}=-\frac{36-4\times(-\frac{1}{4})\times 0}{4\times(-\frac{1}{4})}=36$

۲۸۹- گزینه ۲ اختلاف ۳ برابر آن عدد با مربع خودش یعنی $3x-x^2$.
مقدار ماکزیمم عبارت فوق در نقطه‌ای به طول $\frac{-b}{2a}$ یعنی $\frac{3}{2}$ ایجاد می‌شود که چون بین صفر و سه قرار دارد پس قابل قبول بوده و مقدار ماکزیمم عبارت برابر است با:

$$3x-x^2 \xrightarrow{x=\frac{3}{2}} 3\times\frac{3}{2}-(\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}$$

۲۹۰- گزینه ۱ محیط مستطیل برابر است با:

$$2(a+b)=28 \Rightarrow a+b=14 \Rightarrow a=14-b$$

از طرفی مساحت برابر ab است که با توجه به جای‌گذاری a از عبارت بالا داریم:

$$S=a\times b=(14-b)b=14b-b^2$$

بیشترین مقدار مساحت به ازای $b=-\frac{14}{2\times(-1)}=\frac{-14}{-2}=7$ به دست می‌آید.

$$S=14\times 7-7^2=49$$

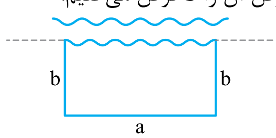
۲۹۱- گزینه ۱ اگر به عرض x واحد اضافه شود از طول آن 2x واحد کم می‌شود، پس مساحت برابر می‌شود با:

$$S=(60-2x)(20+x)=1200+60x-40x-2x^2$$
$$S=-2x^2+20x+1200$$

ماکزیمم عبارت بالا برابر است با: طول رأس سهمی: $\frac{-b}{2a}=\frac{-20}{-4}=5$

عرض رأس سهمی (ماکزیمم): $-2\times 5^2+20\times 5+1200=1250$

۲۹۲- گزینه ۲ طول مستطیل را a و عرض آن را b فرض می‌کنیم.



با توجه به طول سیم داریم:

$$a+2b=600 \Rightarrow a=600-2b$$

می‌دانیم مساحت مستطیل برابر ab است. پس:

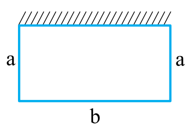
$$S=a\times b=(600-2b)b=600b-2b^2$$

برای به دست آوردن ماکزیمم عبارت بالا، ابتدا طول رأس سهمی و سپس با جای‌گذاری آن در ضابطهٔ فوق، عرض رأس یا همان ماکزیمم را حساب می‌کنیم.

طول رأس سهمی: $\frac{-600}{-4}=150$

عرض رأس سهمی (ماکزیمم): $600\times 150-2\times(150)^2=45000$

۲۹۳- گزینه ۳ عرض زمین را a و طول آن را b فرض می‌کنیم.



با توجه به طول سیم داریم:

$$2a+b=56 \Rightarrow b=56-2a$$

از طرفی مساحت زمین برابر ab است که با جای‌گذاری b داریم:

$$S=a\times b=a\times(56-2a)=56a-2a^2$$

بیشترین مساحت (ماکزیمم) عبارت بالا به ازای $\frac{-b}{2a}$ یعنی $\frac{-56}{-4}$ یا همان $a=14$ به دست می‌آید که برابر است با:

$$56\times 14-2\times(14)^2=392$$

۲۹۴- گزینه ۲ اگر x بوتهٔ اضافی کاشته شود تعداد بوته‌ها برابر $40+x$ و محصول هر کدام برابر $8-\frac{x}{8}$ می‌شود. پس محصول برداشتی برابر می‌شود با:

$$(40+x)(8-\frac{x}{8})=320-5x+8x-\frac{x^2}{8}=320+3x-\frac{x^2}{8}$$

بیشترین مقدار عبارت بالا به ازای $x=\frac{-b}{2a}$ یعنی $x=\frac{-3}{-\frac{2}{8}}=12$ به دست می‌آید که برابر است با:

$$320+3\times 12-\frac{12^2}{8}=338$$

۲۹۵- گزینه ۱ اگر x بذر اضافی بکاریم، تعداد بذرها برابر $200+x$ و قیمت محصول هر بذر برابر $900-3x$ می‌شود. در این صورت قیمت محصول برداشتی برابر است با:

$$(200+x)(900-3x)=180000-600x+900x-3x^2$$
$$=180000+300x-3x^2$$

بیشترین مقدار عبارت بالا به ازای $x=\frac{-b}{2a}$ یعنی $\frac{-300}{-6}=50$ به دست می‌آید که برابر است با:

$$180000+300\times 50-3\times 50^2=187500$$

۲۹۶- گزینه ۱ اگر x بوتهٔ اضافی بکاریم، تعداد بوته‌ها برابر $30+x$ و محصول هر بوته $4-\frac{x}{10}$ می‌شود که در این صورت محصول برداشتی برابر می‌شود با:

$$(30+x)(4-\frac{x}{10})=120-3x+4x-\frac{x^2}{10}=120+x-\frac{x^2}{10}$$

بیشترین مقدار عبارت بالا به ازای $x=\frac{-b}{2a}$ یعنی $\frac{-1}{-\frac{2}{10}}=5$ به دست می‌آید که برابر است با:

$$120+5-\frac{5^2}{10}=122/5$$

۲۹۷- گزینه ۲ اگر x قطعه اضافه‌تر تولید شود تعداد قطعه‌ها برابر $80+x$ و دستمزد هر قطعه برابر $450-5x$ می‌شود که در این صورت دستمزد کارگر برابر است با:

$$(80+x)(450-5x)=36000-400x+450x-5x^2$$
$$=36000+50x-5x^2$$

بیشترین مقدار عبارت بالا به ازای $x=\frac{-b}{2a}$ یعنی $x=\frac{-50}{-10}=5$ به دست می‌آید که برابر است با:

$$36000+50\times 5-5\times 5^2=36125$$

۲۹۸- گزینه ۳ هزینهٔ تولید x واحد کالا در این کارگاه برابر است با:

(تعداد × هزینهٔ هر واحد) + هزینهٔ ثابت = هزینهٔ تولید

هزینهٔ تولید $=20000+4000x$

حالا حساب می‌کنیم هزینهٔ تولید چند واحد از این کالا برابر ۸۴۰۰۰ تومان است.

$$20000+4000x=84000 \Rightarrow 4000x=64000 \Rightarrow x=\frac{64000}{4000}=16$$

پس هزینهٔ تولید ۱۶ واحد از این کالا برابر ۸۴۰۰۰ تومان است.

۲۹۹- گزینه ۴ درآمد برابر با تعداد ضربدر قیمت هر کالا است، پس:

درآمد $=p.x\ ,\ x=180-6p$

درآمد $=p.(180-6p)=180p-6p^2$

بیشترین مقدار عبارت بالا به ازای طول رأس سهمی آن یعنی $p=\frac{-180}{-12}=15$ به دست می‌آید.

۳۰۰- گزینه ۳ قبل از هر چیز تابع درآمد و تابع هزینهٔ شرکت را تشکیل می‌دهیم.

قیمت کالا × تعداد کالاهای تولیدی = تابع درآمد

$$R(x)=x\times(1500-x)=-x^2+1500x$$

هزینهٔ ثابت + تعداد کالای تولیدشده × هزینهٔ تولید هر کالا = تابع هزینه

$$C(x)=300\times x+30000=300x+3000$$

حالا تابع سود را از تفاضل تابع هزینه از تابع درآمد به دست می‌آوریم.

تابع هزینه − تابع درآمد = تابع سود

$$P(x)=R(x)-C(x)=-x^2+1500x-(300x+30000)$$
$$\Rightarrow P(x)=-x^2+1200x-30000$$

۳۰۱- گزینه ۱ ابتدا تابع سود کارخانه را مشخص می‌کنیم، تابع سود از تفاضل تابع هزینه از تابع درآمد به دست می‌آید.

$$P(x)=\text{درآمد}-\text{هزینه}=-3x^2+280x-(100x+15)=-3x^2+180x-15$$

ماکزیمم سود به ازای طول رأس سهمی که همان تعداد خودروی تولیدی است رخ می‌دهد. پس: $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{180}{-6}=30$

۳۰۲- گزینه ۲ تابع سود از اختلاف هزینه‌ها از درآمد به دست می‌آید.

سود = درآمد − هزینه

$$\text{سود}:=-\frac{1}{4}x^2+30x-(18x+80)=-\frac{1}{4}x^2+12x-80$$

ماکزیمم عبارت بالا به ازای $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-12}{-\frac{1}{2}}=24$ به دست می‌آید که برابر است با:

$$-\frac{1}{4}\times 24^2+12\times 24-80=64$$

۳۰۳- گزینه ۴ تابع سود از اختلاف تابع هزینه‌ها از درآمد به دست می‌آید.

$$P(x)=R(x)-C(x)=240x-\frac{1}{20}x^2-36000-40x$$

$$P(x)=200x-\frac{1}{20}x^2-36000$$

بیشترین مقدار عبارت بالا به ازای $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-200}{\frac{-1}{10}}=2000$ به دست می‌آید که برابر است با:

$$P(2000)=200\times 2000-\frac{1}{20}\times 2000^2-36000=164000$$

۳۰۴- گزینه ۳ تابع سود برابر است با:

$$P(x)=R(x)-C(x)\ \Rightarrow\ P(x)=40x-0/1x^2-400$$

ماکزیمم عبارت بالا به ازای $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-40}{-0/2}=200$ به دست می‌آید که برابر است با:

$$P(200)=40\times 200-0/1\times 200^2-400=3600$$

۳۰۵- گزینه ۳ می‌دانیم سود از اختلاف هزینه‌ها از درآمد به دست می‌آید.

$$-\frac{1}{3}x^2+28x-16x-55=-\frac{1}{3}x^2+12x-55$$

ماکزیمم عبارت بالا به ازای $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-12}{-\frac{2}{3}}=18$ به دست می‌آید که برابر است با:

$$-\frac{1}{3}\times 18^2+12\times 18-55=53$$

۳۰۶- گزینه ۲ تابع درآمد هر روز برابر $1500x$ است، از طرفی تابع سود هم که از اختلاف تابع هزینه‌ها از درآمد به دست می‌آید.

$$1500x-x^2-(500x+1000)=1000x-x^2-1000$$

ماکزیمم عبارت بالا به ازای $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-1000}{-2}=500$ به دست می‌آید که برابر است با:

$$1000\times 500-500^2-1000=249000$$

۳۰۷- گزینه ۲ تابع سود از اختلاف تابع هزینه‌ها از درآمد به دست می‌آید.

$$-\frac{1}{2}x^2+30x-(18x+10)=-\frac{1}{2}x^2+12x-10$$

ماکزیمم عبارت بالا به ازای $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-12}{-1}=12$ به دست می‌آید که برابر است با:

$$-\frac{1}{2}\times 12^2+12\times 12-10=62$$