بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضیات گسسته

پایه دوازدهم

مؤلف:

رسول حاجی‌زاده

انتشارات خوشخوان

پیشگفتار ناشر

خنده و گریه

تا حالا شده توی یه مکان عمومی مثل رستوران، بانک و ... یه موضوع خنده‌داری براتون اتفاق بیفته بخواید از ته دل بخندید، اونم در حد انففجار؟!!! چی کار می‌کنید؟ خجالت رو می‌ذارید کنار و از ته دل می‌خندید اونم طوری‌که همه با خنده‌تون بخندن یا نه، یکم چاشنی شو می‌آرید پایین طوری‌که چند نفر اطرافتون بفهمن یا فقط به یه لبخند کوچک بسنده می‌کنید؟!

حالا اگر یه اتفاق ناراحت‌کننده افتاده باشه چی؟ گریه‌تونو پنهون می‌کنید، یا به چند قطره اشک اکتفا می‌کنید، یا نه بیشتر، با چشمای گریون شروع می‌کنید تو خیابون قدم زدن؟!

نمی‌دونم کدموشون منطقی به نظر میاد!!

از نظر شما کدومش درسته؟! خنده‌ای که باعث خنده دیگران بشه یا گریه‌ای که غم رو تو دل دیگران راه بده.

اگر خنده‌تون باعث شه که یه لحظه یه نفر از غم های دنیا رها شه، باید این کار رو بکنید یا نکنید؟! من که باشم می‌کنم (البته طوری‌که لودگی به نظر نیاد). اگر گریه‌تون باعث بشه بغض دل یه نفر دیگه بترکه و اونم شروع کنه به گریه، باید این کار رو بکنید یا نکنید؟! من که باشم می‌کنم.

خب شاید بگید که چی؟!

احتمالا هر کدوم از ما لذت خنده‌هایی که با خنده‌ی خودمون ایجاد کردیم رو تجربه کردیم. چه حس جالبی داره، وقتی بلند می‌خندی و همه به صدای خنده‌ی تو می خندن، یکی از ته دل و بدون قضاوت تو، یکی با دلیل اینکه چه خوب! دلش شاده و یکی با این فکر که بابا اینم رد داده. ولی هر کدوم با هر دیدی با تو همراه می‌شن شروع می کنن به خندیدن.

حس جالبیه اگر تجربه نکردید حتما تو یه مکان و فضای مناسب امتحان کنید (نرید وسط مراسم عزاداری بعد بگید حرفت جواب نداد).

هر کاری توش یه لذتی داره. اگر آدم ته دلش صاف و صادق باشه شاید کوچک‌ترین کارش هم همراه با لذت باشه.

شما تو چه چیزی استعداد دارید؟

من یکی از استعدادهامو تو ریاضی پیدا کردم، همه یه استعداد یا توانایی ندارن، به قول اساتید علوم تربیتی و اجتماعی، سی و چند شاخه‌ی توانایی و استعداد داریم که هر فردی می‌تونه توی چندتا از شاخه‌ها استعداد داشته باشه و هیچ کسی هم نیست که توی تمام شاخه‌ها توانایی داشته باشه. یکی استعداد ورزشی داره اونم نه تو همه‌ی رشته‌ها یکی شناگر خوبیه، یکی فوتبالیست، یکی ژیمناست، یکی تنیسور و ....، یکی استعداد تو هنر نقاشی‌داره، یکی مجسمه‌سازی، یکی بازیگری، یکی گلدوزی، یکی فرشبافی و ... ، یکی استعداد ریاضی داره، یکی فیزیک، یکی تاریخ، یکی ادبیات و ...

گفتم یه انسان تک بعدی نیست ممکنه یه تاجرِ ورزشکارِ مهندس باشی مثل علی دایی یا پزشکِ آهنگسازِ خواننده باشی مثل محمد اصفهانی یا استادِ مجریِ برنامه‌سازِ مهندس باشی مثل عادل فردوسی‌پور یا ...

حالا اگر بپرسید چطور باید استعدادهاتونو بشناسید می‌گم یکی از راه‌هاش مدرسه است که به دلیل سیستم آموزشی نادرست یا ناقص ممکنه نتونه کمک لازم رو بهتون بکنه. ولی شما می‌تونید استعدادتونو با مطالعه، مشاوره، روابط اجتماعی، علایق و ... پیدا کنید.

خب یکی از توانایی‌ها و استعدادهایی که من در دوران مدرسه در خودم پیدا کردم ریاضیه، عاشق ریاضی‌ام شاید بهتر بگم گاهی دیوونه‌شم. خب بر طبق یه قاعده‌ی روانشناسی باید دوست و همکارایی داشته باشم که اونها هم عاشق یا دیوونه‌ی یه شاخه علمی باشن (بازم می‌گم صددرصد نیست). اونا هم علاقه، استعداد و آرامششون رو تو ریاضی، فیزیک، شیمی، هنر، ادبیات و ... یافتن. باز هم می‌گم ممکنه من همین آرامش، هیجان، عشق و ... رو تو گفتن شعر یا نوشتن متنی مثل همین متن هم داشته باشم (فکر نکنین یه آدم تک بعدی هستین هیچ آدمی تک بعدی نیست).

خوشخوان انتشاراتی ویژه‌ی دانش آموزان ممتاز

آره این شعار ما در بدو تاسیس بود؛ وقتی که کسی زیاد به ممتازها اهمیت نمی داد! اگر هم بود در حد چند مدرسه و چند کتاب خاص. ما اومدیم که بگیم تو همه‌ی کشور ممتاز داریم نه فقط شهرهای بزرگ. خواستیم بگیم ممتازهایی که توی روستای گرمسیر و سردسیر هستین ما هواتونو داریم، چون خودمون هم از همون ریشه‌ایم. خب به مرور مثل هر شغل و حرفه‌ای دوستان دیگه هم وارد زمینه‌ی توجه به دانش‌آموزان ممتاز شدن (ما با ممتازها بودیم وقتی ممتاز بودن مد نبود).

ما می‌نوشتیم تا اونی که مثل خودمون عاشق درس و مبحث خاصیه سیرآب بشه. ما تالیف می‌کردیم تا دانش‌آموزهای خوبمون هی دنبال این کتاب اون کتاب نرن و گذشت ...

ما به هدفمون رسیدیم، شدیم ویژه‌ی ویژه ... . ولی همین ویژه بودن یه روزایی شد دردسر، روزایی که به دلیل تغییر فرهنگ و شرایط درس خوندن (گاهی بی‌ارزش شدن ادامه تحصیل و کم علاقگی به علم و بی‌ارزش شدن مدارج تحصیلی)، دانشگاه رفتن ساده‌تر از گذشته شد و کم بهاتر (که چه خوب) و شکر که استرس کمتر شد و ای کاش کمتر بشه و روزی برسه که روی دوش هیچ جووونی استرس کنکور نباشه تا راحت به پرورش استعدادهای واقعیش فکر کنه و اونها رو فدای کنکور نکنه (ولی هنوز تشنه‌ها هستن).

بگذریم، پس از ۱۷ سال می‌خواهیم بگیم که ما نه تنها علاقه‌مندان هر شاخه‌ی علمی خاص مختص به دبیرستان رو رها نکردیم بلکه می‌خواهیم روش آموزشی رو ارائه بدیم تا هر دانش‌آموزشی با هر استعدادی بتونه در زمینه‌ی خاص در حد توانش (تاکید می‌کنم در حد ظرفش و نه بیشتر) رشد کنه تا علاوه بر ایجاد علاقه در زمینه‌ی علمی مورد نظر، بتونیم راهی رو برای رسیدن به اهداف آینده‌اش باز کنیم. شاید ریاضی برای من شیرین باشه و برای شما سخت، فیزیک برای یکی شیرین باشه و برای دیگری سخت، ولی مهم این که یاد بگیریم رشد کنیم و راه رشد کردن رو یاد بگیریم. به قول یه جمله معروف ما می‌خواهیم به‌جای ماهی، ماهیگیری (روش حل، لذت بردن و فکر کردن) رو به شما یاد بدیم تا هر کسی به اندازه‌ی توانش بتونه از دریای بزرگ جلوی روش ماهی بگیره. یکی با یه ماهی خودشو سیر می‌کنه، یکی با چند تا خانواده شو و یکی با ماهی‌های بیشتری جامعه و فرهنگشو.

امیدوارم در سالی که پیش رو دارید کلی ماهی از دریای موفقیت بگیرید، کنکور آینده‌ی کسی رو نمی‌سازه شمایید که آینده رو می‌سازید.

ساختار

کتب‌های دوازدهمی که از انتشارات به چاپ رسیده، به شکل زیرند:

درس‌نامه: درسنامه‌ی هر فصل به‌صورت جلسه‌بندی به همراه مثال‌ها و تست‌های متنوع ارائه شده، تا ضمن عمق بخشی به مطالب موجود در کتاب درسی، دانش‌آموزهای عزیز رو برای امتحان‌های مختلف از جمله امتحان نهایی آماده کنن.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای: پرسش‌ها چهار دسته دارن:

۱. سطح ساده ۲. سطح متوسط ۳. سطح دشوار ۴. ترکیب سطوح

برای این‌که کتاب، برای بیشتر دانش‌آموزان قابل استفاده باشه، پرسش‌ها سطح‌بندی شده‌اند تا دانش‌آموزان متوسط به پایین لزوما دنبال پرسش‌های سطح سخت نرن و دانش‌آموزهای متوسط به بالا وقت خودشونو برای پرسش‌های ساده خیلی سپری نکنن. برای این‌که مهارت دوستای عزیز رو در تشخیص سوالات ساده، متوسط و سخت بالا ببریم، پرسش‌های ترکیب سطوح رو آوردیم تا هر دانش‌آموزی بتونه متناسب با سطح تواناییش سوالات مربوط به سطحشو تشخیص بده.

پرسش‌های تکمیلی فصل: چون بعد از تموم شدن هر جلسه دانش‌آموز با ذهنیت نکات همون بخش شروع به حل کردن سوالات می‌کنه، شاید این موضوع در نهایت ایده‌آل نباشه، چون هنر شما زمانی نشون داده می‌شه که بتونید تشخیص بدید هر سوال برای کدوم مبحثه، پس با آوردن سوالات ترکیبی با یه تیر دو نشون زدیم یکی بالا بردن قدرت تشخیص مبحث مرتبط با سوال و دوم مرور فصل.

سوالات کنکور مرتبط با فصل: سعی کردیم سوالات کنکور داخل و خارج سال‌های اخیر مربوط به هر فصل رو برای شما جمع کنیم تا با شکل سوالات کنکور هم آشنا بشید.

پاسخ کلیدی و تشریحی پرسش‌ها: هم پاسخ‌نامه‌ی کلیدی و هم تشریحی سوالات رو بعد از اتمام فصل آوردیم، حتی برای بعضی از سوالات بیشتر از یک راه‌حل آوردیم. راستی، همه به پاسخ‌نامه‌ی تشریحی حتما سر بزنا!!!!!!!

آزمون‌های سه گانه: در آخر هر فصل سه آزمون استاندارد برای کنکوریای عزیز آوردیم تا سطح یادگیری مطالب رو برای خودشون بسنجن. راستی فقط جواب کلیدی رو داخل کتاب قرار دادیم تا خدایی نکرده اگر تو سوالی مشکل داشتید سعی کنید با جست‌وجو داخل کتاب یا مراجعه به دبیرتون به اون بخش مسلط بشین. (البته سعی می‌کنیم جوابا رو داخل سایت قرار بدیم تا دوستایی که احیانا مراجعه به دبیر براشون سخته دچار مشکل نشن).

آخر

با تشکر از تمام دوستانی که ما رو در تالیف و چاپ این کتاب یاری کردند و با طلب عفو و بخشش برای نواقص و کاستی‌ها از شما، برای همه‌ی شما در زندگی موفقیت و سربلندی رو از خداوند متعال خواستارم.

رسول حاجی‌زاده
مدیر انتشارات خوشخوان

مقدمه مؤلف

خدا را شاکرم که چندین سال است توفیق خدمت به دانش‌آموزان ممتاز این مرز و بوم را به اینجانب عطا کرده است. تدریس در مدارس ممتاز را با عشق و علاقه‌ی وافر و وصف ناشدنی شروع کردم و از همان اوایل دوره‌ی دانشجویی که در رشته‌ی مهندسی برق مشغول به تحصیل بودم به موازات تحصیل، تدریس پیشه‌ی من شده بود و پس از اتمام دوره‌ی تحصیلم شرایط چنان پیش رفت که تدریس را به شغل مهندسی ترجیح دهم. الحق و الانصاف، پس از گذشت نزدیک به سه دهه از شروع تدریسم، نه تنها علاقه و عشقم کم نشده است، بیش‌تر هم شده است و از خداوندمنان خواسته‌ام که آخرین روز عمر من را در پای تخته قرار دهد. شوق دیگرم انتقال آموخته‌هایم در ریاضی، به نسل بعد در قالب تالیف کتب آموزشی است. در نوشتن این کتب همیشه سعی داشته‌ام لذتی را که از ریاضیات می‌برم در قالب تالیف و تدوین به خواننده انتقال دهم و کتاب حاضر نیز از این امر مستثنی نیست.

شغل اولم که معلمی است زندگیم را دگرگون کرد چرا که در طول این سه دهه از نظر آموزشِ مطالب ریاضی من معلم بچه‌ها بودم ولی در عمل به اندازه‌ی همان سه دهه از تکتک آن عزیزان مطلب‌ها، معرفت‌ها و مرام‌ها یاد گرفته‌ام و در واقع آن‌ها معلم من بوده‌اند. اثر دعای خیرشان همیشه در زندگی‌ام جاری بوده و ان شاء ا... جاری خواهد بود، ولی در مورد شغل دومم که تالیف است دل نگرانم چرا که توفیق دیدار حضوری با مخاطبین گرامی میسر نیست و همیشه بیم آن را دارم که نکند مطلبی نابه‌جا نوشته شود و یا در تعمیق مبحثی کوتاهی شده باشد و مخاطب یا مخاطبینی دل آزرده شده و ناخرسندی‌ای از مولف به دل بگیرد که در این صورت به‌جای آن‌که ثواب کرده باشیم، کباب کرده‌ایم! ولی از طرف دیگر چون اعتقاد دارم هر آنچه از دل برآید بر دل بشیند، دل نگرانی‌ام کاهش پیدا کرده و با شوقی بیش از پیش به نگارشم ادامه می‌دهم، و امیدوار می‌شوم که هر چه در نوشته‌هایم خلوص و پاک بودن را رعایت کنم خدا نظر لطفی کرده و این نوشته‌ها را در نظر مخاطبین زیبا جلوه می‌دهد. البته این دلیل بر آن نمی‌شود که کتاب بی‌عیب و نقص باشد ولی امید است که عیوب می‌نیمم باشد که تقاضا می‌شود بر ما بخشیده شود.

در نوشتن این کتاب به موارد زیر توجه شده است:

* هر فصل به تعدادی جلسه تقسیم شده است و این تقسیم‌بندی با تقسیم‌بندی کتاب درسی تفاوت دارد. از نظر ما هر جلسه به مقدار مباحثی اطلاق می‌شود که در انتهای آن مباحث بتوان به تعداد کافی به دانش‌آموز تمرین ارائه داد و آن‌ها را تا اتمام فصل منتظر نگذاشت.

* درس‌نامه‌های هر جلسه به اندازه‌ی کافی عمق داده شده‌اند و انتظار می‌رود دانش‌آموزان ممتاز با مطالعه‌ی آن‌ها که توام با مثال‌های متنوع است، مشکلی در فهم درس نداشته باشند. البته بدیهی است که مقداری از این مباحث جهت عمق بخشی مطالب است و قسمتی از آن‌ها چنان است که در ارزیابی‌های آموزش و پرورش مورد سوال قرار نمی‌گیرند، لذا اگر دانش‌آموزانی در درک بعضی از مباحث ناتوان باشد می‌تواند از آن‌ها گذر کند.

* در انتهای هر جلسه تعدادی سوال چهارگزینه‌ای ارائه شده است که به غیر از فصل صفر، در مورد مابقی جلسات همان‌طور که در پیشگفتار اشاره شده است سوالات به چهار گروه دسته‌بندی شده‌اند.

* به تمام پرسش‌های مورد اشاره پاسخ تشریحی توام با آموزش‌های لازم، داده شده است.

❋ در طراحی پرسش‌ها به ظاهر پا را فراتر از کتاب درسی گذاشته و حاشیه رفته‌ایم که دلایل زیر را دارد:

۱. ارائه‌ی برخی از مطالب در درک بهتر مبحثی از کتاب کمک قابل توجهی می‌کند. به عنوان مثال برای درک اصل شمول و عدم شمول که در فصل سوم کتاب درسی ارائه شده است حل معادلاتی مانند $x+y+z=۲۰$ با شرایط $۷>y\geq ۱$، $x\geq ۰$ و $۶>z\geq ۲$ می‌توانند کمک خوبی داشته باشند در حالی که مولفین گرامیِ کتاب درسی در پاورقی حل معادلات سیال اشاره کرده‌اند که از بیان چنین مثال‌هایی پرهیز شود!

۲. ارائه‌ی این مطالب برای دانش‌آموزان ممتاز جذابیت خاصی دارد که آن‌ها را بیش از پیش به ریاضیات علاقمندتر می‌کند.

۳. تجربه نشان داده است که طراحان کنکور نگاهی همانند مولفین کتاب درسی ندارند که سوالات را فقط در چارچوب مطالب کتب درسی طرح کنند. برای این مطلب مستندات فراوانی از سوالات کنکور در سنوات قبل وجود دارد، به عنوان مثال در فصل تئوری اعداد در سال ۹۱ باقی مانده‌ی $۱۰^{۵}$ بر ۱۱ خواسته شده بود که اگر کسی قضیه‌ی فرما را بلد بود خیلی سریع‌تر از بقیه جواب را انتخاب می کرد. در فصل گراف بارها انواع گراف‌ها خواسته شده بود که در کتاب درسی به تنوع گراف‌ها بها داده نمی‌شد. در ترکیبیات نیز سوالاتی مانند حل نابرابری $x+y+z\leq ۵$ بارها در کنکور آمده است (که آخرین آنها در سال ۹۷ مطرح شد) در حالی که در کتاب درسی به هیچ عنوان آموزش این مطالب موجود نبود.

در تالیف و ویرایش این کتاب دوستان خوبم آقایان محمدجمال صادقی و فرشید باطنی کمک شایانی داشتند و همچنین در نمونه‌خوانی این اثر دوستان خوبم آقایان سجاد علیزاده و ارشیا شجاعی زحمات زیادی کشیدند که لازم می‌دانم کمال تشکر را داشته باشم و همچنین در آماده‌سازی و حروف چینی کتاب گروه فنی هیمه به سرپرستی دکتر اسماعیل یوسفی سنگ تمام گذاشتند که از آن عزیزان نیز قدردانی می‌شود.

در پایان از دبیران و همکاران گرامی و نیز دانش‌آموزان عزیز تقاضا می‌شود نواقص و کمبودها را بر ما بخشیده و اشتباهات و ایرادات احتمالی را از طریق ایمیل یا طرق دیگر به دست ما برسانند تا در چاپ‌های بعدی اصلاحات لازم صورت گیرد.

رسول حاجی‌زاده

تابستان ۱۳۹۷

فهرست مطالب

۵ جلسه‌ی پنجم: مسیر، دور، همبندی و ناهمبندی، گراف اویلری

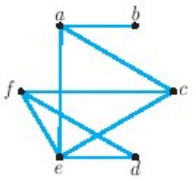
درگراف ساده‌ی G یک مسیر از رأس u به رأس v عبارت است از دنباله‌ای از رئوس آن گراف به طوریکه در هر سه شرط زیر صدق کند:

۱. شروع و پایان دنباله دو رأس u و v باشد.

۲. هر دو عضو متوالی آن دنباله دو رأس مجاوری ازگراف G باشند.

۳. هیچ یک از رئوس گراف بیش از یک بار در نوشتن آن دنباله به کار نرود.

مثال ۱۷ تمام مسیرهای موجود از رأس a به رأس e درگراف مقابل را بنویسید:



حل. تمام مسیرها به شکل زیر می‌باشند:

۱) a, e ۲) a, c, e

۳) a, c, f, e ۴) a, c, f, d, e

اگر در نوشتن دنباله‌ی متناظر به یک مسیر m عضو به کار رود $m - ۱$ را طول آن مسیر گویند. به عنوان مثال طول مسیرهای ذکر شده در مثال قبلی به ترتیب برابر ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌باشد.

نکته ۱۴ در گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p طول یک مسیر حداکثر می‌تواند برابر با $p - ۱$ باشد.

نکته ۱۵ قرارداد می‌کنیم که دنباله‌ای متشکل از فقط یک راس مانند v از گراف، مسیری به طول صفر از راس v به راس v می‌باشد.

نکته ۱۶ اگر دنباله‌ی متناظر به یک مسیر را وارونه کنیم مسیر به دست آمده همان مسیر قبلی محسوب می‌شود.

مثال ۱۸ درگراف k_p تعداد مسیرهای به طول i از رأس دلخواه u به رأس v را بیابید.

حل. برای آنکه طول مسیر برابر i باشد علاوه‌بر دو رأس u و v به $(i - ۱)$ رأس دیگر نیاز داریم که این $(i - ۱)$ رأس باید از بین $(p - ۲)$ رأس گراف k_p انتخاب شوند. این کار به $\binom{p-۲}{i-۱}$ طریق امکان‌پذیراست. پس از انتخاب رئوس موردنظر می‌فهمیم که آنها به $(i - ۱)!$ طریق جابه‌جا می‌شوند بنابراین جواب موردنظر $\binom{p-۲}{i-۱}(i - ۱)!$ می‌باشد.

تست ۱۶ u و v دو رأس متمایز ازگراف $k_۶$ می‌باشند. تعداد مسیرهای به طول ۴ از u به v کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰

۱ ۲ ✓ ۴

با توجه به مثال قبلی جواب موردنظر برابر $۳! \times \binom{۴}{۳}$ یعنی ۲۴ می‌باشد.

تست ۱۷ u و v دو رأس دلخواه ازگراف $k_۶$ می‌باشند. تعداد کل مسیرها از u به v کدام است؟

۱) ۶۲ ۲) ۶۳ ۳) ۶۴ ۴) ۶۵

۱ ۲ ۳ ✓

$$\binom{۴}{۰} \times ۰! = ۱ = \text{تعداد مسیرهای به طول ۱}$$

$$\binom{۴}{۱} \times ۱! = ۴ = \text{تعداد مسیرهای به طول ۲}$$

$$\binom{۴}{۲} \times ۲! = ۱۲ = \text{تعداد مسیرهای به طول ۳}$$

$$\binom{۴}{۳} \times ۳! = ۲۴ = \text{تعداد مسیرهای به طول ۴}$$

$$\binom{۴}{۴} \times ۴! = ۲۴ = \text{تعداد مسیرهای به طول ۵}$$

$$\text{تعداد کل مسیرها} = ۱ + ۴ + ۱۲ + ۲۴ + ۲۴ = ۶۵$$

تست ۱۸ درگراف $k_۵$ کلاً چند مسیر به طول ۳ وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۴۸ ۳) ۳۶ ۴) ۶۰

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

ابتدا دو رأس ابتدا و انتهای مسیر را انتخاب می‌کنیم که این کار به $\binom{۵}{۲}$ یعنی ۱۰ طریق ممکن است. از سه رأس باقی‌مانده دو رأس دیگر برای تکمیل مسیر موردنظر نیاز است. آن دو رأس را به $\binom{۳}{۲}$ طریق انتخاب کرده و به !۲ طریق می‌توانیم بین دو رأس ابتدا و انتها قرار دهیم. بنابراین تعداد کل مسیرهای مطلوب برابر $\binom{۵}{۲} \times \binom{۳}{۲} \times ۲!$ یعنی ۶۰ خواهد شد.

تست ۱۹ درگراف $k_۴$ کلاً چه تعداد مسیر وجود دارد؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۴ ۳) ۳۵ ۴) ۳۸

۱ ✓ ۳ ۴

$$\text{تعداد مسیرهای به طول ۰} = ۴$$

$$\binom{۴}{۲} \times \binom{۲}{۰} \times ۰! = ۶ = \text{تعداد مسیرهای به طول ۱}$$

$$\binom{۴}{۲} \times \binom{۲}{۱} \times ۱! = ۱۲ = \text{تعداد مسیرهای به طول ۲}$$

$$\binom{۴}{۲} \times \binom{۲}{۲} \times ۲! = ۱۲ = \text{تعداد مسیرهای به طول ۳}$$

$$\text{تعداد کل مسیرها} = ۴ + ۶ + ۱۲ + ۱۲ = ۳۴$$

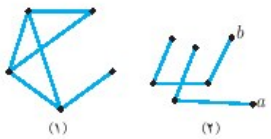
گراف P_n

گرافی که فقط از یک مسیر n رأسی مانند شکل مقابل تشکیل شده باشدگراف P_n نامیده می‌شود. معلوم است که در P_n بین هر دو رأس متمایز دقیقاً یک مسیر وجود دارد.

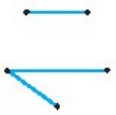
نکته ۱۷ در گراف P_n تعداد مسیرهای به طول $۰, ۱, ۲, \cdots, n-۱$ به ترتیب برابر $n, n-۱, n-۲, \cdots, ۱$ بوده و تعداد کل مسیرها برابر $\binom{n+۱}{۲}$ و تعداد کل مسیرهای با طول ۱ یا بیشتر برابر $\binom{n}{۲}$ است.

گراف همبند و ناهمبند

گراف ساده‌ی G را همبند گویند هرگاه بین هر دو رأس متمایز دلخواه از آن حداقل یک مسیر موجود باشد، در غیر این صورت آن گراف را ناهمبند می‌گویند. به عنوان مثال در اشکال مقابل گراف (۱) یک گراف همبند است ولی گراف (۲) ناهمبند است، زیرا از رأسی مانند a به رأس b مسیری وجود ندارد:

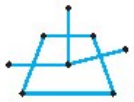


تست ۲۰ کدام یک از گراف‌های ساده‌ی زیر همبند است؟


(۴)


(۳)


(۲)


(۱)

۱ ✓ ۳ ۴

تست ۲۱ گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۷ و اندازه‌ی q مفروض است. حداکثر مقدار q باید چقدر باشد تا گراف G بتواند ناهمبند باشد؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۱ ۲ ✓ ۴

اگر گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q ناهمبند باشد وقتی بیشترین یال ممکن را دارد که آن گراف از یک گراف k_{p-1} و یک رأس تنها تشکیل یافته باشد. معلوم است که چنین گرافی دارای $\binom{p-1}{2}$ یا $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ یال می‌باشد. بنابراین جواب موردنظر برابر $\binom{6}{2}$ یعنی ۱۵ می‌باشد.

تست ۲۲ گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۸ و اندازه‌ی q مفروض است. حداقل مقدار q باید چقدر باشد تا مطمئن شویم گراف G همبند است؟

۱) ۷ ۲) ۱۵ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۱ ۲ ۳ ✓

گرافی از مرتبه‌ی ۸ وقتی می‌تواند ناهمبند باشد که تعداد یال‌های آن کمتر یا مساوی $\binom{7}{2}$ یعنی ۲۱ باشد. بنابراین اگر تعداد یال‌های آن گراف ۲۲ یا بیشتر باشد آن گراف یقیناً همبند خواهد بود.

دور

درگراف ساده‌ی G یک دور عبارت است از دنباله‌ای از رئوس آن گراف به طوریکه شرایط زیر برقرار باشد:

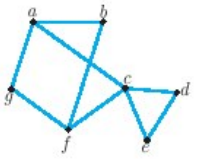
۱. تعداد اعضاء آن دنباله حداقل برابر ۴ باشد.
۲. شروع و پایان آن دنباله یکسان باشد.
۳. هر دو عضو متوالی آن دنباله دو رأس مجاوری ازگراف G باشند.
۴. هیچ رأسی ازگراف بیش از یک بار در نوشتن آن دنباله به کار نرود (به غیر از رأس شروع و پایان که دو بار نوشته می‌شود).

اگر تعداد اعضاء دنباله‌ی متناظر به یک دور m باشد، $m-1$ را طول آن دور گویند.

نکته ۱۸ اگر جهت چرخش را در نوشتن دنباله‌ی متناظر به یک دور یا نقطه‌ی شروع دور را عوض کنیم دور جدیدی ایجاد نمی‌شود.

نکته ۱۹ در گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p طول هر دور کوچکتر یا مساوی p می‌باشد.

مثال ۱۹ تمام دورهای موجود در شکل مقابل را بنویسید:



حل- تمام دورهای موجود در شکل فوق به‌صورت زیر می‌باشد:

۱) a, b, f, g, a ۲) a, c, f, g, a

۳) a, b, f, c, a ۴) c, d, e, c

طول دورهای فوق به ترتیب برابر ۴، ۴، ۴، ۳ می‌باشد.

مثال ۲۰ تعداد دورهای به طول i درگراف k_p را بیابید.

حل- برای ساختن دوری به طول i نیاز به انتخاب i رأس بین p رأس موجود درگراف k_p می‌باشد که این کار به $\binom{p}{i}$ طریق ممکن است، و اما تعداد دورهای به طول i متشکل از i رأس منتخب برابر $\frac{(i-1)!}{2}$ می‌باشد. (تعداد جایگشت‌های دوری n شیء متمایز به طوریکه جهت دور اهمیت نداشته باشد برابر $\frac{(n-1)!}{2}$ می‌باشد). بنابراین تعداد کل دورهای مطلوب برابر $\frac{(i-1)!}{2} \times \binom{p}{i}$ خواهد شد.

تست ۲۳ درگراف k_6 چه تعداد دور با طول ۴ موجود است؟

۱) ۴۵ ۲) ۶۰ ۳) ۴۸ ۴) ۷۲

✓ ۲ ۳ ۴

با توجه به مثال قبل معلوم می‌شود که تعداد دورهای مطلوب برابر $\binom{6}{4} \times \frac{3!}{2}$ یعنی ۴۵ می‌باشد.

تست ۲۴ درگراف k_5 چه تعداد دور موجود است؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۷ ۳) ۳۸ ۴) ۳۹

۱ ✓ ۳ ۴

تعداد دورهای به طول ۳ $= \binom{5}{3} \times \frac{2!}{2} = 10$

تعداد دورهای به طول ۴ $= \binom{5}{4} \times \frac{3!}{2} = 15$

تعداد دورهای به طول ۵ $= \binom{5}{5} \times \frac{4!}{2} = 12$

تعداد کل دورها $= 10 + 15 + 12 = 37$

تست ۲۵ چه تعداد از دورهای گراف مقابل شامل رأس a نمی‌باشند.

۱) ۵ ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۸

۱ ✓ ۲ ۴

چون a در هیچ یک از دورهای مطلوب وجود ندارد پس آن رأس به همراه یال‌هایش را حذف می‌کنیم که یک گراف k_4 باقی خواهد ماند. تمام دورهای موجود در این گراف جواب مطلوب می‌باشند. تعداد دورهای به طول ۳ و ۴ درگراف k_4 به ترتیب برابر ۴ و ۳ می‌باشد که تعداد کل دورهای مطلوب برابر ۷ خواهد شد.

تست ۲۶ چه تعداد از دورهای به طول ۴ ازگراف مقابل شامل رأس a می‌باشند.

۱) ۶ ۲) ۱۲

۳) ۱۳ ۴) ۱۴

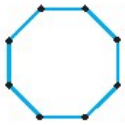
۱ ✓۲ ۳ ۴

راه حل اول. تعداد کل دورهای به طول ۴ در گراف k_5 برابر $\binom{5}{4} \times \frac{3!}{2}$ یعنی ۱۵ می‌باشد که سه تا از آنها شامل رأس a نمی‌باشند (در تست قبلی مشاهده کردید). بنابراین جواب مورد نظر ۳ − ۱۵ یعنی ۱۲ می‌باشد.

راه حل دوم. برای تشکیل دوری به طول ۴ علاوه بر رأس a به سه رأس دیگر نیاز داریم که این سه رأس باید از چهار رأس دیگر گراف داده شده انتخاب شوند. این عمل به $\binom{4}{3}$ طریق ممکن است. با چهار رأس موجود (رأس a و سه رأس منتخب) به تعداد $\frac{(4-1)!}{2}$ یعنی ۳ دور به طول ۴ می‌توان ساخت. بنابراین تعداد دورهای مطلوب برابر $\binom{4}{3} \times 3$ یعنی ۱۲ خواهد بود.

گراف C_i

گرافی به شکل مقابل را که فقط از یک دور به طول i تشکیل شده باشد گراف C_i گویند.
در شکل مقابل C_8 رسم شده است.



مثال ۲۱ گراف مقابل مفروض است:

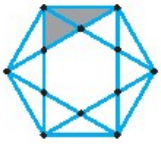
(الف) در آن گراف چند دور به طول ۳ وجود دارد؟
(ب) در آن گراف چند دور به طول ۴ وجود دارد؟
(ج) چند دور به طول ۵ وجود دارد؟
(د) در آن گراف دوری به طول m وجود دارد، بزرگترین مقدار ممکن برای m را بیابید.

حل. (الف) رئوس را به دو دسته‌ی بیرونی (۶تا) و درونی (آن هم ۶تا) تقسیم می‌کنیم. برای ساخت دوری به طول ۳ یکی از چهار امکان زیر وجود دارد:

- هر سه رأس از بیرونی‌ها باشد که در این شکل چنین چیزی وجود ندارد.
- هر سه رأس از درونی‌ها باشد که در این شکل چنین چیزی وجود ندارد.
- دو رأس بیرون و یک رأس درون باشد که مطابق شکل مقابل ۶ تا از این دورها وجود دارد.

- یک رأس بیرون و دو رأس درون باشد که مطابق شکل مقابل ۶ تا از این دورها وجود دارد.

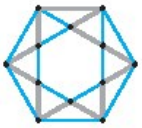
(ب) اگر همانند قسمت قبل حالت‌بندی کنیم فقط در حالتی دور به طول ۴ وجود دارد که دو رأس از بیرونی‌ها باشد و دو رأس از درونی‌ها. نمونه‌ای از این دورها در گراف مقابل نمایش داده شده است و تعداد این دورها برابر ۱۲ است (هر ضلعِ شش ضلعیِ بیرونی در دوتا از دورهای به طول ۴ مشارکت دارد).



(ج) همانند قسمت‌های قبل حالت‌بندی کرده و جواب‌ها را در جدول زیر مشاهده می‌کنید:

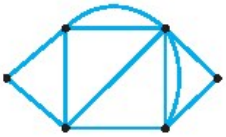
نمونه شکل	شمارش	درون	بیرون
-	۰	۰	۵
-	۰	۱	۴
	۶	۲	۳
	۶	۳	۲
-	۰	۴	۱
-	۰	۵	۰

(د) چون گراف از مرتبه‌ی ۱۲ است پس دوری به طول بزرگتر از ۱۲ ندارد و اما مطابق شکل مقابل دوری به طول ۱۲ وجود دارد.



گراف اویلری

گراف G (نه لزوماً ساده) را یک گراف اویلری گویند هرگاه بتوان آن را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ و با شروع از یک رأس چنان رسم کرد که اولاً از هر یال یک و فقط یک بار عبورکرده باشیم و ثانیاً از تمام رئوس بگذریم و ثالثاً نقطه‌ی پایان همان نقطه‌ی شروع باشد. به عنوان مثال گراف مقابل یک گراف اویلری می‌باشد:



نکته ۲۰

یکی از شرایط لازم برای اویلری بودن گراف G همبند بودن آن است. شرط لازم دیگر آن است که درجه‌ی هر یک از رئوس آن زوج باشد.

تست ۲۷ کدام یک از گراف‌های زیر اویلری است؟

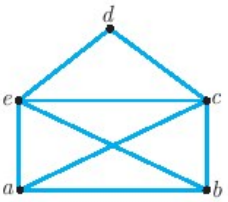
۱) k_{10} ۲) k_{13} ۳) k_{16} ۴) k_{18}

۱ ✓ ۳ ۴

درجه‌ی هر یک از رئوس گراف k_p برابر $p-1$ می‌باشد، پس درجه‌ی هر یک از رئوس گراف‌های k_{10}، k_{16}، k_{18} به ترتیب ۹، ۱۵ و ۱۷ می‌شود که اعدادی فرد هستند و چنین گراف‌هایی نمی‌توانند اویلری باشند.

گراف نیمه اویلری (شبه اویلری)

گراف G را نیمه اویلری گویند هرگاه بتوان آن را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ و با شروع از یک رأس چنان رسم کرد که اولاً از هر یال یک و فقط یک بار عبورکرده باشیم و ثانیاً از تمام رئوس بگذریم و ثالثاً نقطه‌ی پایان متمایز از نقطه‌ی شروع باشد. به عنوان مثال گراف مقابل یک گراف نیمه اویلری می‌باشد که می‌توان آن را با شروع از رأس a و پایان در b با شرایط فوق رسم کرد:



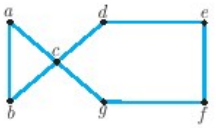
نکته ۲۱

یکی از شرایط لازم برای نیمه اویلری بودن گراف G همبند بودن آن است و شرط لازم دیگر آن است که دو راس از آن (رئوس شروع و پایان) از درجه‌ی فرد و مابقی رئوس همگی از درجه‌ی زوج باشند.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس جلسه‌ی پنجم

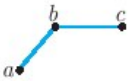
پرسش‌های سطح ساده درس جلسه‌ی پنجم

۲۴۱ در شکل مقابل چند مسیر از a به b وجود دارد؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۴۲ در گراف مقابل کلاً چند مسیر وجود دارد؟



۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۴۳ اگر u و v دو رأس متمایز از گراف k_4 باشند، آن‌گاه چند مسیر متمایز از u به v وجود دارد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۲۴۴ کدام یک از جملات زیر ارزش درستی دارد؟

۱) مکمل هرگراف همبندی، همبند است. ۲) مکمل هرگراف همبندی، ناهمبند است.
۳) مکمل هرگراف ناهمبندی، ناهمبند است. ۴) مکمل هرگراف ناهمبندی، همبند است.

۲۴۵ گراف ساده‌ی ناهمبند از مرتبه‌ی ۱۲ حداکثر چند یال دارد؟

۱) ۵۴ ۲) ۵۵ ۳) ۵۶ ۴) ۵۷

۲۴۶ گراف G دارای ۷ رأس است. اگر تعداد یال‌های آن q باشد حداقل مقدار q چقدر باشد تا مطمئن شویم که آن گراف همبند است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۱ ۳) ۱۵ ۴) ۲۲

۲۴۷ در گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۲۵ اندازه‌ی آن حداکثر چقدر باشد تا مطمئن شویم آن گراف ناهمبند باشد؟

۱) ۲۷۶ ۲) ۲۷۵ ۳) ۲۴ ۴) ۲۳

۲۴۸ گراف نامنتظم و همبند G اندازه‌ای برابر ۱۰ دارد، مرتبه‌ی آن گراف چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۷

۲۴۹ چند نوع گراف ناهمبند ۵- منتظم از مرتبه ۱۲ وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۵۰ حداقل مرتبه‌ی یک گراف ۶- منتظم ناهمبند کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۲۵۱ در گراف P_n مجموع مرتبه و اندازه کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۳۰ ۴) ۲۸

۲۵۲ در گراف P_{15} چند زیرگراف به فرم P_9 وجود دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۵۳ در C_{12} چند مسیر با طول ۵ وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۲۵۴ اگر مکمل گراف C_n خود به فرم C_n باشد آن‌گاه برای n چند جواب یافت می‌شود؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیش از ۲

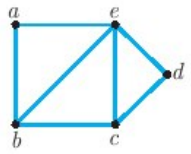
۲۵۵ اندازه‌ی مکمل گراف C_n از دو برابر اندازه‌ی خود آن، ۹ واحد بیشتر است n کدام است؟

۱) عددی اول است ۲) مربع کامل است ۳) بر ۵ بخش‌پذیر است ۴) بر ۴ بخش‌پذیر است

۲۵۶ در گراف C_8 حاصل $\Delta + \delta$ چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بیش از ۳

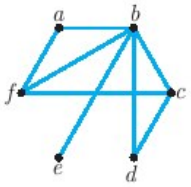
۲۵۷ در گراف مقابل چند دور به طول ۴ وجود دارد؟



۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

۲۵۸ در مورد گراف مقابل کدام گزینه درست است؟



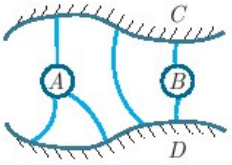
۱) دوری به طول ۵ دارد ۲) دوری به طول ۶ دارد

۳) تعداد دورهای به طول ۴ برابر یک ۴) تعداد دورهای به طول ۳ برابر چهار است

۲۵۹ گرافی با ۴۵ رأس درجه‌ی ۲ حداکثر چند دور به طول ۴ دارد؟

۱) ۱۱ ۲) ۱ ۳) ۱۵ ۴) ۱۰

۲۶۰ در شبکه‌ی مقابل A، B، C و D خشکی هستند. برای آنکه بتوان با آغاز از یکی از مناطق و پس از عبور از هر پل دقیقاً یک بار دوباره به همان منطقه برگشت، حداقل چند پل دیگر لازم است احداث شود؟



۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

پرسش‌های سطح متوسط درس جلسه‌ی چهارم

۲۶۱ u و v دو رأس متمایز از گراف k_5 هستند. چند مسیر متمایز از u به v وجود دارد؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۳ ۳) ۱۶ ۴) ۱۵

۲۶۲ در گراف k_7 با رئوس v_1 تا v_7، چند مسیر به طول ۴ از v_1 به v_2 وجود دارد؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۸ ۳) ۶۰ ۴) ۶۶

۲۶۳ در گراف مقابل چند مسیر از a به b وجود دارد به طوریکه e نیز عضوی از آن مسیر باشد؟

۱) ۵ ۲) ۷

۳) ۹ ۴) ۱۱

۲۶۴ گراف G از مرتبه‌ی ۱۲ ناهمبند است. تعداد مقادیر مختلف که q می‌تواند داشته باشد کدام است؟

۱) ۵۵ ۲) ۵۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۱

۲۶۵ چه تعداد از زیرگراف‌های گراف k_3 همبند هستند؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۲۶۶ a و b دو رأس متمایز از گراف ناهمبند ۳- منتظم از مرتبه‌ی ۸ هستند. $|N_G(a) - N_G(b)|$ چند عدد متمایز می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بیش از ۳

۲۶۷ تعداد یال‌های گراف ۷- منتظم از مرتبه‌ی n با تعداد یال‌های گراف P_i برابر است که در آن $i = 4n - 5$. n کدام است؟

۱) عددی اول ۲) مربع کامل ۳) دارای عامل ۵ ۴) دارای عامل ۳

۲۶۸ در گراف P_9 حداقل چند یال انتخاب کنیم تا اجتماع مجموعه یال‌های مجاور آنها کل مجموعه یال‌های P_9 شود؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۶۹ در P_{16} کلاً چند مسیر وجود دارد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۳۰ ۴) ۱۳۶

۲۷۰ گراف P_6 چند زیرگراف با اندازه‌ی ۲ دارد؟

۱) ۵۶ ۲) ۴۶ ۳) ۸۰ ۴) ۴۰

۲۷۱ a و b دو رأس متمایز از گراف P_n هستند. اگر مجموعه‌ی $|N_G(a) \cup N_G(b)|$ مجموعه‌ای یک عضوی باشد آن‌گاه n چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیش از ۲

۲۷۲ گراف ۶- منتظم، ناهمبند بوده و اندازه‌ی آن ۴۲ است. در آن گراف چند دور به طول ۴ وجود دارد؟

۱) ۱۰۵ ۲) ۱۴۰ ۳) ۱۷۵ ۴) ۲۱۰

۲۷۳ در گرافی ناهمبند که $p = 10$ و $q = 36$ چند دور به طول ۳ وجود دارد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۸۴ ۳) ۴۰ ۴) ۳۵

۲۷۴ در گرافی با درجه رئوس "۲, ۲, ۲, ۲, ۲, ۲, ۲, ۷, ۷" که دو رأس با درجه ۷ مجاور نیستند. چند دور وجود دارد؟

۱) ۷ ۲) ۱۴ ۳) ۲۱ ۴) ۲۸

۲۷۵ گراف همبند G فقط دو دور دارد. اگر p مرتبه و q اندازه‌ی آن گراف باشد آن‌گاه حداقل مقدار $p + q$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

۲۷۶ در گراف k_6 با رئوس $v_1, v_2, \cdots, v_6$ چند دور با طول ۴ شامل رأس v_3 وجود دارد؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۰ ۳) ۳۶ ۴) ۴۲

۲۷۷ هر دو یال از گراف C_n با هم مجاورند. آن گراف چند زیرگراف دارد؟

۱) ۱۷ ۲) ۳۷ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

۲۷۸ در C_{10} کلاً چند مسیر وجود دارد؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۹۹ ۳) ۹۰ ۴) ۸۱

۲۷۹ در گراف C_8 چند زیرگراف به فرم P_i وجود دارد؟

۱) ۶۴ ۲) ۵۶ ۳) ۲۸ ۴) ۳۲

۲۸۰ هر دو گراف G و مکمل آن اویلری هستند. مرتبه‌ی G کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۲۸۱ در گراف k_7 با رئوس v_1 تا v_7 چند مسیر به طول ۴ شامل رأس v_3 از v_1 به v_2 وجود دارد؟

۱) ۶۰ ۲) ۵۴ ۳) ۴۲ ۴) ۳۶

۲۸۲ در گراف k_7 با رئوس v_1 تا v_7 چند مسیر از v_1 به v_2 شامل رأس v_3 وجود دارد؟

۱) ۲۵۹ ۲) ۲۶۰ ۳) ۲۶۱ ۴) ۲۶۲

۲۸۳ در گراف k_7 با رئوس v_1 تا v_7 از v_1 به v_2 کلاً چند مسیر وجود دارد؟

۱) ۳۲۵ ۲) ۳۲۶ ۳) ۱۹۱ ۴) ۱۹۲

۲۸۴ در گراف مقابل چند مسیر از a به b وجود دارد به طوریکه شامل رأس c بوده ولی شامل رأس d نباشند.

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۷

۲۸۵ چند نوع گراف همبند با چهار رأس داریم؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۸۶ با چهار رأس متمایز a، b، c و d چند گراف همبند از مرتبه‌ی ۴ می‌توان ساخت؟

۱) ۳۷ ۲) ۳۸ ۳) ۳۹ ۴) ۴۰

۲۸۷ قرار است از گرافی ۶- منتظم از مرتبه‌ی ۱۲، k یال برداریم. حداقل مقدار k برای آن که گراف باقی‌مانده بتواند ناهمبند شود را m و حداکثر مقدار k برای آن گراف باقی‌مانده بتواند همبند باقی بماند را n می‌نامیم. $n - m$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۰− ۳) ۱۹ ۴) ۱۹−

۲۸۸ در گراف P_8 چند زیرگراف از مرتبه‌ی ۳ وجود دارد؟

۱) ۹۸ ۲) ۱۰۴ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۱۲

۲۸۹ در گراف P_5 چند زیرگراف وجود دارد؟

۱) ۸۸ ۲) ۸۰ ۳) ۷۸ ۴) ۷۰

۲۹۰ زیرگرافی از گراف C_4 به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه همبند باشد تقریباً چقدر است؟

۱) ۰٫۱۹ ۲) ۰٫۲۵ ۳) ۰٫۳۷ ۴) ۰٫۴۶

۲۹۱ چه تعداد از زیرگراف‌های گراف ۲- منتظم از مرتبه‌ی ۵ ناهمبند هستند؟

۱) ۸۴ ۲) ۹۰ ۳) ۹۶ ۴) ۱۰۲

۲۹۲ اگر درجه‌های رئوس گراف G به‌صورت ۲، ۳، ۳، ۴، ۴ باشد آن‌گاه آن گراف چند دور به طول ۳ دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

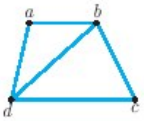
۲۹۳ در گراف مقابل چند دور به طول ۴ وجود دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۲۹۴ در گراف از مرتبه‌ی ۴ به تعداد n عدد دور وجود دارد. n کدام یک از اعداد زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) ۲ و ۴ ۲) فقط ۲ ۳) فقط ۳ ۴) فقط ۴

۲۹۵ چه تعداد از زیرگراف‌های گراف مقابل دارای دور هستند؟



۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

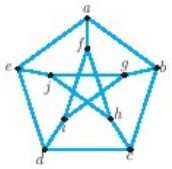
۲۹۶ در گراف k_6 که a و b نیز رئوسی از رئوس آن هستند چند دور به طول ۵ وجود دارد که در هر یک از آن دورها a و b موجود بوده و با هم مجاور باشند؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۰ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

۲۹۷ در گراف مقابل چند دور به طول ۶ وجود دارد؟

۱) ۳۵ ۲) ۲۸ ۳) ۲۴ ۴) ۲۱

۲۹۸ در گراف مقابل چند دور به طول ۹ وجود دارد؟



۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۱۲

۲۹۹ در گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۲ روابط $\deg(a) = ۵$ و $|N_G(a) \cap N_G(b)| = ۵$ برقرارند. چند دور به طول ۴ در آن گراف وجود دارد که a و b هم عضوی از آن دور باشند؟

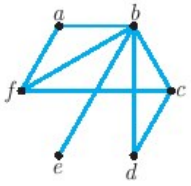
۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۳۰۰ در گراف C_5 چند زیرگراف وجود دارد؟

۱) ۸۲ ۲) ۷۹ ۳) ۱۲۹ ۴) ۱۲۲

پرسش‌های ترکیب سطوح درس جلسه‌ی پنجم

۳۰۱ در مورد گراف مقابل کدام گزینه درست است؟

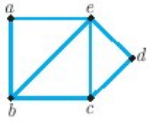


۱) از a به d مسیری به طول ۴ وجود دارد.
۲) از b به e مسیری به طول ۲ وجود دارد.
۳) از a به e مسیری به طول ۵ وجود ندارد.
۴) از a به e مسیری به طول ۴ وجود ندارد.

۳۰۲ در گراف k_8 چند مسیر به طول ۲ وجود دارد؟

۱) ۱۶۸ ۲) ۱۶۰ ۳) ۱۵۲ ۴) ۱۴۴

۳۰۳ در گراف مقابل چند مسیر از a به b وجود دارد؟



۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۰۴ اگر $q(P_i) + q(P_j) + q(P_k) = ۱۹$ آن‌گاه $i + j + k$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۲ ۳) ۲۱ ۴) ۱۹

۳۰۵ در گراف k_p که u و v دو رأس متمایز آن هستند تعداد مسیرهای به طول ۳ از رأس u به رأس v برابر ۴۲ است. p کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۳۰۶ در یک گراف کامل از مرتبه‌ی ۵ چند مسیر به طول ۳ وجود دارد؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۹۰

۳۰۷ گراف ساده‌ی همبند از مرتبه‌ی ۱۲ حداقل چند یال دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۳۰۸ گراف ساده‌ی ناهمبند G با اندازه‌ی ۸۴ از اجتماع تعدادی گراف کامل یکسان تشکیل شده است. اگر مرتبه‌ی آن گراف ۲۸ باشد آن‌گاه با اضافه کردن حداقل چند یال به آن گراف به گرافی همبند تبدیل می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۰۹ گراف همبند G دارای ۲۷ یال است. ماکزیمم مرتبه‌ای که این گراف می‌تواند داشته باشد کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۲۷ ۳) ۲۶ ۴) ۲۵

۳۱۰ گراف همبند G با حذف ۸۲ یال به P_n و با اضافه کردن ۱۴۹ یال به k_n تبدیل می‌شود. n کدام است؟

۱) عددی اول ۲) مربع کامل ۳) دارای عامل ۵ ۴) دارای عامل ۳

۳۱۱ به گراف ۱- منتظم از مرتبه‌ی ۱۲ حداکثر چند یال می‌توان اضافه کرد تا همچنان ناهمبند باقی بماند؟

۱) ۴۱ ۲) ۲۴ ۳) ۴۰ ۴) ۱۴

۳۱۲ اگر مکمل P_i خود نیز P_i باشد آن‌گاه برای i چند جواب یافت می‌شود؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیش از ۲

۳۱۳ در مکمل گراف P_{11} مقدار $2\Delta + 3\delta$ کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۲ ۳) ۴۷ ۴) ۴۴

۳۱۴ گراف G از مرتبه‌ی ۱۲ دور ندارد. تعداد مقادیر مختلف که q می‌تواند داشته باشد کدام است؟

۱) ۵۵ ۲) ۵۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۱

۳۱۵ در گرافی با رئوس a، b، c، d و e و درجه رئوس $(4, 4, 4, 3, 3)$ چند دور به طول ۳ وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۳۱۶ در گراف k_6 چه تعداد دور وجود دارد؟

۱) ۱۹۵ ۲) ۱۹۶ ۳) ۱۹۷ ۴) ۱۹۸

۳۱۷ در گراف k_6 با رئوس v_1 تا v_6 چند دور با طول ۴ فاقد رأس v_3 وجود دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

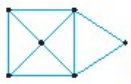
۳۱۸ در گراف C_7 چند زیرگراف به فرم P_7 دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۷

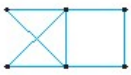
۳۱۹ برای تبدیل گراف C_p به گراف k_p باید تعداد $4p$ یال به آن اضافه کنیم. p کدام است؟

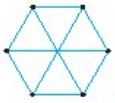
۱) عددی اول است ۲) مربع کامل است ۳) عامل ۵ دارد ۴) عامل ۳ دارد

۳۲۰ کدام یک از گراف‌های زیر را می‌توان با شروع از یک رأس و با گذر از هر یال دقیقاً یک بار چنان رسم کرد به طوریکه نقطه‌ی پایان همان نقطه‌ی شروع باشد؟

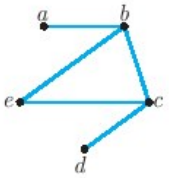
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۶ جلسه‌ی ششم: مجموعه‌های احاطه‌گر



در گراف ساده‌ی G مجموعه A متشکل از تعدادی از رئوس G را مجموعه‌ی احاطه‌گر گویند هرگاه هر رأسی از G یا در A باشد و یا با حداقل یکی از اعضاء A مجاور باشد.
به عنوان مثال تمام مجموعه‌های احاطه‌گر برای گراف مقابل به شکل زیر هستند:

- خود مجموعه‌ی پنج عضوی V (مجموعه رئوس)
- هر زیرمجموعه‌ای چهار عضوی از V
- هر زیرمجموعه‌ای سه عضوی از V به غیر از $\{a, b, e\}$ و $\{c, d, e\}$
- زیر مجموعه‌هایی دو عضوی از V به‌صورت $\{a, c\}$ و $\{b, c\}$ و $\{b, d\}$

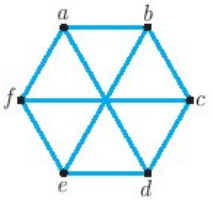
تست ۲۸ در گراف k_4 چند مجموعه‌ی احاطه‌گر وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱ ۲ ۳ ✓

هر زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس به غیر از تهی جواب مسئله است.

مثال ۲۲ گراف مقابل چند مجموعه‌ی احاطه‌گر دارد؟



حل.

- تمام زیرمجموعه‌های ۶ عضوی V (۱ حالت)
- تمام زیرمجموعه‌های ۵ عضوی V (۶ حالت)
- تمام زیرمجموعه‌های ۴ عضوی V (۱۵ حالت)
- تمام زیرمجموعه‌های ۳ عضوی V (۲۰ حالت)
- تمام زیرمجموعه‌های ۲ عضوی V که با هم مجاورند (۹ حالت)

با توجه به حالت بندی فوق جواب موردنظر ۵۱ به دست می‌آید.

مثال ۲۳ گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۹ و اندازه‌ی ۸ مجموعه‌ی احاطه‌گر یک عضوی دارد. در آن گراف چند مسیر به طول ۲ وجود دارد؟

حل. رأسی وجود دارد که به تمام رئوس دیگر متصل است بنابراین گراف متناظر به این سئوال به شکل مقابل است:

به ازای انتخاب هر دو یال متمایز دقیقاً یک مسیر به طول ۲ معرفی خواهد شد، بنابراین جواب موردنظر $\binom{8}{2}$ یعنی ۲۸ است.

مثال ۲۴ گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۰ مفروض است:

(الف) حداقل مقدار q چقدر باشد تا آن گراف مجموعه‌ی احاطه‌گر یک عضوی داشته باشد؟

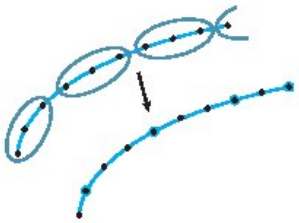
(ب) حداکثر مقدار q چقدر باشد تا آن گراف مجموعه‌ی احاطه‌گر یک عضوی نداشته باشد؟

(ج) اگر آن گراف به‌صورت p_{10} باشد آن‌گاه مجموعه‌ی احاطه‌گر آن حداقل چند عضو دارد؟

حل. (الف) اگر گراف ناهمبند باشد نمی‌تواند مجموعه‌ی احاطه‌گر یک عضوی داشته باشد بنابراین حداقل مقدار q برابر $p - ۱$ یعنی ۹ است. با توجه به مثال قبلی معلوم است که اگر یک رأس را با ۹ یال به ۹ رأس دیگر وصل کنیم جواب به دست می‌آید.

(ب) کافی است یال‌های ab, cd, ef, gh و ij را از $k_{۱۰}$ بردارید. این گراف ۴۰ یال داشته و خاصیت موردنظر را دارد.

(ج) از هر سه رأس متوالی حداقل یکی باید در مجموعه‌ی احاطه‌گر موجود باشد، بنابراین مجموعه‌ی احاطه‌گر حداقل چهار عضوی است.



مجموعه‌ی احاطه‌گری مینیمم

در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر یک گراف، مجموعه‌ای که کمترین عضو را دارد مجموعه‌ی احاطه‌گری مینیمم نامیده می‌شود و تعداد اعضاء آن مجموعه را عدد احاطه‌گری آن گراف خوانده و به‌صورت $\gamma(G)$ نمایش می‌دهند و گاهی مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم یک گراف را γ مجموعه می‌خوانند.

به عنوان مثال عدد احاطه‌گری در گراف موجود در مثال ۲۲ برابر ۲ است و عدد احاطه‌گری هر گراف کاملی برابر ۱ است.

نکته ۲۲

عدد احاطه‌گری برای گراف‌های k_n، C_n و P_n به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\gamma(k_n) = ۱ \ , \ \gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil \ , \ \gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$$

لازم به ذکر است که اگر t عدد صحیح باشد آن‌گاه $\lceil t \rceil = t$ و اگر t صحیح نباشد آن‌گاه $\lceil t \rceil = e$ که در آن e کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از t است و به $\lceil t \rceil$ سقف t گفته می‌شود.

مثال ۲۵ عدد احاطه‌گری در یک گراف ۲- منتظم از مرتبه‌ی ۱۲ حداکثر چقدر می‌تواند باشد؟

حل. گراف ۲- منتظم از مرتبه‌ی ۱۲ به یکی از ۹ حالت زیر است:

- ۱۲ ضلعی
- ۹ ضلعی و ۳ ضلعی
- ۸ ضلعی و ۴ ضلعی
- ۷ ضلعی و ۵ ضلعی
- دو تا ۶ ضلعی
- ۶ ضلعی و دو تا ۳ ضلعی
- ۵ ضلعی، ۴ ضلعی و ۳ ضلعی
- سه تا ۴ ضلعی
- چهارتا ۳ ضلعی

عدد احاطه‌گر در هر یک از نه حالت فوق به ترتیب به شکل زیر است:

$$\gamma_۱ = \lceil \frac{۱۲}{۳} \rceil = ۴ \qquad \gamma_۲ = ۳ + ۱ = ۴ \qquad \gamma_۳ = ۳ + ۲ = ۵ \qquad \gamma_۴ = ۳ + ۲ = ۵$$

$$\gamma_۵ = ۲ + ۲ = ۴ \qquad \gamma_۶ = ۲ + ۱ + ۱ = ۴ \qquad \gamma_۷ = ۲ + ۲ + ۱ = ۵ \qquad \gamma_۸ = ۲ + ۲ + ۲ = ۶$$

$$\gamma_۸ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۴$$

یعنی اگر گراف ۲- منتظم از مرتبه‌ی ۱۲ به‌صورت سه تا ۴ ضلعی باشد بیشترین عدد احاطه‌گری را داشته که برابر ۶ است.

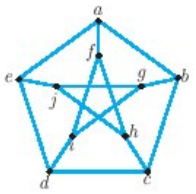
مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال

اگر در یک گراف مجموعه‌ی احاطه‌گری مانند A چنان باشد که با حذف هر عضوی از آن، از حالت احاطه‌گری خارج شود آن‌گاه A را احاطه‌گر مینیمال گویند.

مثال ۲۶ گراف مقابل که به گراف پترسن معروف است مفروض است:

(الف) حاصل $\gamma(G)$ را بیابید.

(ب) مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمالی پیدا کنید که مینیمم نباشد.



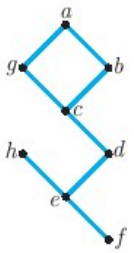
حل. (الف) مجموعه‌ی احاطه‌گر نمی‌تواند دو عضوی باشد زیرا با ورود هر عضوی به مجموعه‌ی احاطه‌گر حداکثر ۴ عضو احاطه می‌شوند ولی با انتخاب ۳ عضو مناسب مانند مجموعه‌ی $A = \{a, i, h\}$ مقدار $\gamma(G)$ برابر ۳ پیدا می‌شود.

(ب) اگر مجموعه‌ی B را به‌صورت $B = \{a, c, i, j\}$ درنظر بگیریم آن گراف احاطه‌گر مینیمال است ولی مینیمم نیست.

همان‌طور که در سئوال قبل مطرح شد هر رأسی از یک گراف مانند x حداکثر $\deg(x) + 1$ رأس می‌تواند احاطه کند، بنابراین بیشترین احاطه را رأس متناظر به Δ درگراف G دارد و آن تعداد برابر $\Delta + 1$ است. بنابراین برای آنکه تمام n رأس یک گراف احاطه شوند آن‌گاه n را به دسته‌های $(\Delta + 1)$تایی تقسیم می‌کنیم، معلوم می‌شود که از دسته‌ای حداقل یک عضو باید وارد مجموعه‌ی احاطه‌گر شود به این معنا که:

نکته ۲۳ *اگر n تعداد رأس گراف G و مجموعه‌ی D مجموعه‌ی احاطه‌گری از آن گراف باشد آن‌گاه $|D| \geq \lceil \frac{n}{\Delta + 1} \rceil$ و یا به عبارت دیگر در هر گرافی از مرتبه‌ی n رابطه‌ی $\gamma \geq \lceil \frac{n}{\Delta + 1} \rceil$ برقرار است.*

مثال ۲۷ اگر گراف G به شکل مقابل باشد آن‌گاه $\gamma(G)$ را بیابید.



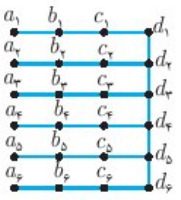
حل.
- با توجه به نکته‌ی ۲۳ نابرابری $\gamma \geq \lceil \frac{8}{4} \rceil$ یعنی $\gamma \geq 2$ برقرار است.
- حداقل دو عضو از اعضاء a، b، c، d و g باید در مجموعه‌ی احاطه‌گر باشد که در این حالت h و f احاطه نمی‌شوند. به این معنا که $\gamma \neq 2$.
- برای $\gamma = 3$ جوابی مانند $D = \{a, d, e\}$ وجود دارد.

مثال ۲۸ (الف) گرافی مثال بزنید که در آن $\gamma(G) = \lceil \frac{n}{\Delta + 1} \rceil$

(ب) گرافی مثال بزنید که در آن $\gamma(G) = \lceil \frac{n}{\Delta + 1} \rceil + 2$

حل. (الف) درگراف P_2 چنین اتفاق می‌افتد.

(ب) گرافی مانند گراف مقابل را درنظر بگیرید:



در هر سطر از بین دو عضو a_i و b_i حداقل یکی باید در مجموعه‌ی احاطه‌گر باشد که اگر b_iها را قرار دهیم همه‌ی a_iها، b_iها و c_iها احاطه می‌شوند. برای احاطه شدن d_iها وجود حداقل دوتا از آنها در مجموعه‌ی احاطه‌گر لازم است، بنابراین $\gamma \geq 8$. مجموعه‌ی $D = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, d_2, d_5\}$ مثالی برای $\gamma = 8$ است. در حالیکه $\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \rceil$ در این گراف برابر $\lceil \frac{24}{4} \rceil$ یعنی ۶ است و تساوی خواسته شده برقرار است.

نکته ۲۴ *مثال قبلی نشان می‌دهد که نابرابری $\gamma \geq \lceil \frac{n}{\Delta + 1} \rceil$ نابرابری ضعیفی است و حتی اگر $\frac{n}{\Delta + 1}$ عددی صحیح باشد، لزوماً γ برابر آن عدد نیست و بین γ و $\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \rceil$ می‌تواند اختلاف زیادی باشد.*

پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس جلسه‌ی ششم

پرسش‌های سطح ساده درس جلسه‌ی ششم

۳۲۱ گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۰ چنان است که در آن $\Delta = ۴$. حداکثر مقدار $\gamma(G)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

۳۲۲ گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۰ چنان است که در آن $\Delta = ۴$. حداقل مقدار $\gamma(G)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

۳۲۳ مجموع اعداد احاطه‌گری گراف‌های زیر کدام است؟

$k_{۱۰}$ ● $C_{۱۰}$ ● $P_{۱۰}$ ● $\overline{k}_{۷}$ ●

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

۳۲۴ گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p که در آن $p \geq ۳$ چنان است که $\gamma(G) = p$. اندازه‌ی آن گراف کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱

۳) p ۴) به طور یکتا تعیین نمی‌شود

۳۲۵ گراف $P_۳$ چند مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۲۶ گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p مفروض است. حداقل مقدار p چقدر باشد تا عدد احاطه‌گری آن گراف ۶ باشد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۳۲۷ حداکثر مقدار n چقدر باشد تا عدد احاطه‌گری گراف P_n برابر ۶ باشد؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

۳۲۸ گرافی از مرتبه‌ی $p(p \geq ۸)$ و اندازه‌ی ۵ مفروض است. حداقل مقدار ممکن برای γ کدام است؟

۱) $p - ۵$ ۲) $p - ۶$ ۳) $p - ۸$ ۴) $p - ۱۰$

۳۲۹ در گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p مقدار $\gamma(G)$ برابر ۱ بوده و مجموعه احاطه‌گر مینیمم منحصر به فرد است. چند رأس از درجه‌ی Δ وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) به طور یکتا تعیین نمی‌شود

۳۳۰ گرافی از مرتبه‌ی p چنان است که در آن $\gamma = ۲$. حداقل مقدار برای اندازه‌ی آن گراف کدام است؟

۱) ۲ ۲) $p - ۳$ ۳) $p - ۲$ ۴) $p - ۱$

۳۳۱ در چه تعداد از زیرگراف‌های $P_۳$ مقدار γ برابر ۳ است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۳۲ با پنج رأس a، b، c، d و e چند گراف ساده می‌توان ساخت به طوریکه در هر یک از آن گراف‌ها مجموعه‌ی $\{a\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر باشد؟

۱) ۱ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۳۳۳ در گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ای بزرگتر از ۲ می‌دانیم $\gamma(G) = ۱$ در این صورت $\overline{G}$:

۱) حتماً همبند است.
۲) حتماً ناهمبند است.
۳) هم می‌تواند همبند باشد و هم ناهمبند
۴) حتماً تهی است.

۳۳۴ مقدار γ در زیرگرافی از گراف G که از مرتبه‌ی ۸ است حداکثر چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

۳۳۵ گراف ساده‌ی G اندازه‌ای برابر ۵ داشته و رأس تنهایی ندارد. اگر H زیرگرافی از G باشد آن‌گاه حداکثر مقدار $\gamma(H)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۰

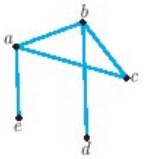
۳۳۶ گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۵ و اندازه‌ی ۳ چنان است که $\gamma(G) = ۲$ حاصل حداقل مقدار ممکن برای $۳\Delta + ۲\delta$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۳۳۷ در گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۳ حاصل $\gamma(G) + \gamma(G')$ حداقل چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۳۸ در گراف مقابل اگر مجموعه‌ی D مجموعه‌ای احاطه‌گر مینیمال باشد آن‌گاه حداکثر تعداد اعضاء D کدام است؟

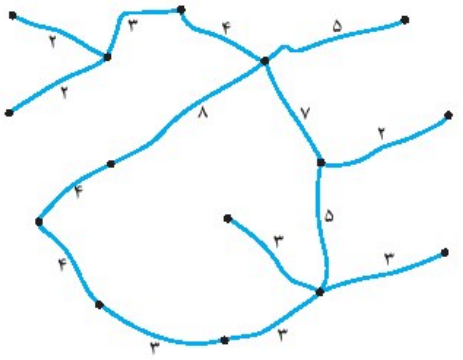


۱) ۲ ۲) ۳
۳) ۴ ۴) ۵

۳۳۹ در گرافی از مرتبه‌ی ۱۰ و اندازه‌ی ۹ مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمالی مانند D وجود دارد. حداکثر تعداد اعضاء D کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۷

۳۴۰ در نقشه‌ی زیر می‌خواهیم در برخی از روستاها بیمارستان احداث کنیم. به‌گونه‌ای که فاصله هر روستا تا نزدیکترین بیمارستان به آن روستا از n کیلومتر $(n \in \mathbb{N})$ بیشتر نباشد. n حداکثر چند باشد تا در مدل‌سازی مسئله‌ی موردنظر با گراف، گراف حاصل ناهمبند باشد؟



۱) ۷ ۲) ۸
۳) ۶ ۴) ۵

پرسش‌های سطح متوسط درس جلسه‌ی پنجم

۳۴۱ گراف $C_۵$ چند مجموعه‌ی احاطه‌گر دارد؟

۱) ۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۲۱

۳۴۲ گراف $C_۸$ چند مجموعه‌ی احاطه‌گر پنج عضوی دارد؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۸ ۳) ۵۲ ۴) ۵۶

۳۴۳ گراف P_7 چند مجموعه‌ی احاطه‌گر پنج عضوی دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۲۱

۳۴۴ گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۷ چنان است که در آن $\gamma(G) = 2$. اندازه‌ی آن گراف حداکثر کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۳۴۵ به ازای چند مقدار برای n بزرگتر از ۲ گراف C_n مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم یکتا دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیش از ۲

۳۴۶ گراف P_n مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم یکتا دارد. n چه تعداد از اعداد ۱، ۲، ۳، ... ، ۱۰۰،۰۰۰ را می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳۳ ۴) ۳۴

۳۴۷ گراف P_6 چند مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال دارد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۳۴۸ گراف P_4 چند مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۳۴۹ کدام یک از گزاره‌های زیر در گرافی از مرتبه n نادرست است؟

۱) $\gamma(G) \geq \frac{n}{\Delta + 1}$ ۲) $\gamma(G) \geq \lceil \frac{n}{\Delta + 1} \rceil$ ۳) $\gamma(G) \leq n - \Delta$ ۴) $\gamma(G) \leq n - \Delta - 1$

۳۵۰ در گراف P_n مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمی وجود دارد که شامل هیچ یک از دو رأس انتهای مسیر نباشد. n چه تعداد از اعداد ۲، ۳، ۴، ... ، ۹۹،۰۰۰ را می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۰ ۲) ۳۲ ۳) ۴۸ ۴) ۹۷

۳۵۱ در گراف P_7 تعداد اعضاء مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال t عضو دارد. حداکثر مقدار ممکن برای t کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۵۲ در گراف P_n مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیممی وجود دارد که شامل هر دو رأس انتهای مسیر باشد. n چه تعداد از اعداد ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ را می‌تواند داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۵۳ در گراف P_n مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمالی وجود دارد که مینیمم نیست. حداقل مقدار ممکن برای n کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۵۴ چند نوع گراف از مرتبه‌ی ۴ وجود دارد که در هر یک از آنها $\gamma = 2$ باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۵۵ گراف G از مرتبه‌ی ۱۰ چنان است که در آن $\gamma(G) = 3$. حداقل مقدار ممکن برای اندازه‌ی G کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

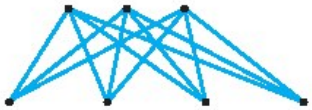
۳۵۶ چند نوع گراف ۲- منتظم از مرتبه‌ی ۹ وجود دارد که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۵۷ گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p $(p \geq 3)$ که در آن $\gamma(G) = p - 1$ مفروض است. اندازه‌ی G چند مقدار مختلف می‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۵۸ مجموع اعداد احاطه‌گری گراف‌های $\overline{C}_{۱۰}$، $\overline{P}_{۱۰}$ و G' کدام است که در آن گراف G به شکل مقابل است:

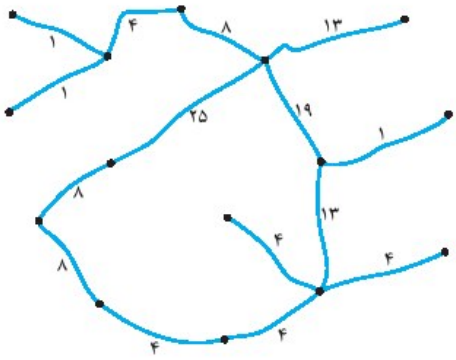


۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۳۵۹ گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی $p(p \geq ۸)$ و اندازه‌ی ۵ مفروض است. حداکثر مقدار ممکن برای γ کدام است؟

۱) $p-۴$ ۲) $p-۳$ ۳) $p-۲$ ۴) $p-۱$

۳۶۰ نقشه‌ی زیر نقشه‌ی یک منطقه شامل چند روستا و جاده‌های بین روستاهاست و مسافت بین روستاها مشخص شده است. قصد داریم تعدادی بیمارستان در برخی از روستاها احداث کنیم به گونه‌ای که فاصله هر روستا تا نزدیکترین بیمارستان از n کیلومتر بیشتر نباشد. به ازای چند مقدار طبیعی برای n در مدل‌سازی مسئله‌ی موردنظر با گرافی مناسب، دقیقاً ۸ یال خواهیم داشت؟



۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پرسش‌های سطح دشوار درس جلسه‌ی ششم

۳۶۱ در گراف $C_۸$ مجموعه‌های A و B هر دو مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال هستند به طوریکه A کمترین عضو ممکن و B بیشترین عضو ممکن را دارد. حاصل $|A| + |B|$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۳۶۲ در گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p که در آن $p \geq ۳$ و $\gamma(G) = p - ۲$، تعداد یال‌ها چند مقدار مختلف می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۶۳ اگر a_n نشانگر تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم C_n، باشد آن‌گاه حاصل $a_۳ + a_۴ + a_۵ + a_۶$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۲۲

۳۶۴ گرافی ۲- منتظم از مرتبه‌ی ۹ مفروض است. آن گراف حداکثر چند مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۲۷ ۴) ۳۰

۳۶۵ چند نوع گراف ساده از مرتبه‌ی ۵ با عدد احاطه‌گری ۱ وجود دارد که مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیممش یکتا باشد؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۳۶۶ در گراف $P_۹$ مجموعه‌ی D مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال است. حداکثر تعداد اعضاء آن کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۶۷ در گراف $C_۶$ مجموعه‌ی D مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال است. حداکثر تعداد اعضاء D کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۶۸ در گراف C_n مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمالی وجود دارد که مینیمم نیست، حداقل مقدار n کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳۶۹ گراف P_4 چند مجموعه‌ی احاطه‌گر دارد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۳۷۰ گراف P_5 چند مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۷۱ برای یافتن حداقل تعداد مهره‌ی وزیر که می‌تواند با چینش مناسب تمام صفحه‌ی شطرنج را بپوشاند گرافی مدل‌سازی کرده‌ایم. اندازه‌ی آن گراف کدام است؟

۱) ۶۷۲ ۲) ۷۲۸ ۳) ۱۳۴۴ ۴) ۱۴۵۶

۳۷۲ P_6 چند زیرگراف مثل G دارد به طوریکه $\gamma(G)$ برابر ۱ باشد؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۵

۳۷۳ بین P_n و $\overline{P_n}$ رابطه $\gamma(P_n) \leq \gamma(\overline{P_n})$ برقرار است، n چند مقدار طبیعی می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۷۴ در گراف C_4 چند زیرگراف مانند G وجود دارد به طوریکه $\gamma(G) = 3$ باشد؟

۱) ۱۰ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۳۷۵ در گراف C_3 چند زیرگراف مانند G وجود دارد به طوریکه در هر یک از آنها γ برابر ۱ باشد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۳۷۶ گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۸ و اندازه‌ی ۲۴ مفروض است. مقدار $\gamma(G)$ چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۷۷ گراف $\overline{P_6}$ چند احاطه‌گر مینیمم دارد؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۵

۳۷۸ گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۰ چنان است که $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = 3$ حاصل $\Delta_G + \Delta_{\overline{G}}$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۷

۳) ۱۸ ۴) به طور یکتا نمی‌توان تعیین کرد

۳۷۹ چند گراف ساده با رئوس $\{a, b, c, d\}$ وجود دارد که مجموعه‌ی احاطه‌گر آن $D = \{a, b\}$ باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

۳۸۰ در بین تمام گراف‌هایی که بین مرتبه و اندازه آنها رابطه‌ی $pq = 20$ برقرار است مقدار $\gamma(G)$ چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پرسش‌های ترکیب سطوح درس جلسه‌ی ششم

۳۸۱ به ازای چند عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ برای n گراف ساده‌ای مانند G از مرتبه‌ی n وجود دارد به طوریکه هم $\gamma(G)$ برابر ۱ باشد و هم $\gamma(G')$؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیش از ۲

۳۸۲ گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۶ و اندازه‌ی ۲ حداکثر چند مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۸۳ به ازای چند مقدار طبیعی بزرگتر از ۲ نابرابری $\gamma(C_n) \leq \gamma(\overline{C_n})$ برقرار است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) بیش از ۴