فهرست مطالب

ریاضی (۲)

شماره صفحه	فهرست مطالب

آزمـــــــون نوبت اول (۱)

الف) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. ۲

۱ اگر شیب ۲ خط متمایز با هم برابر باشد، آن‌گاه ۲ خط با هم موازی‌اند. درست ☐ نادرست ☐

۲ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطهٔ ثابت به یک فاصله باشند، دایره نام دارد. درست ☐ نادرست ☐

۳ $[-\pi] = -۴$ درست ☐ نادرست ☐

۴ $\frac{D}{R} = \frac{۱۸۰}{\pi}$ درست ☐ نادرست ☐

ب) جاهای خالی را با عبارات مناسب پرکنید. ۲/۵

۵ اگر A و B دو نقطهٔ هم طول در صفحه باشند، آن گاه فاصلهٔ آن‌ها ...... است.

۶ هر نقطه که روی نیم‌ساز زاویه قرار داشته باشد، از ...... است.

۷ یک رادیان ...... از یک درجه است.

۸ دامنهٔ تابع $y = \frac{x}{x^۲ - ۴x + ۱۰}$ ...... است.

۹ نوعی از استدلال که در آن از جزء به کل می‌رسیم ...... نامیده می‌شود.

ج) وصل کنید. ۲

۱۰ هر یک از عبارات ستون سمت راست را به حاصل آن در ستون سمت چپ وصل کنید.(دو مورد در ستون سمت چپ اضافی است.)

طول مستطیل طلایی به عرض ۱	$\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$
ضرب ریشه‌های یک معادلهٔ درجه دو که ریشه دارد.	$\frac{-c}{a}$
دو مثلث متساوی الاضلاع	$\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$
مجموع زوایای داخلی یک چهار ضلعی محدب	متشابه هستند.
	$\frac{c}{a}$
	۲π رادیان

د) به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱۱ هر یک از معادلات زیر را حل کنید. ۴

الف) $\frac{۱}{x} + \frac{۱}{x-۲} = ۵$

ب) $۳x^۲ + ۵x = ۲$

۱۲ دامنهٔ تابع زیر را به‌دست آورید. ۲

$$f(x) = \frac{x}{[x] + [-x]}$$

آزمـــــــون نوبت اول (۱)

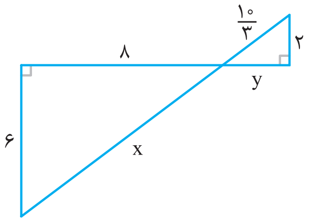
۱۳ عمود منصف پاره‌خط AB را رسم کنید. (روش رسم را توضیح دهید.) ۱/۵

۱۴ اگر $\tan x = \frac{۳}{۴}$ حاصل عبارت $\frac{۳}{\sin x} - \frac{۴}{\cos x}$ چقدر است؟ ۱

۱۵ ثابت کنید تابع $f(x) = \frac{x-۴}{x+۵}$ یک به یک است. ۱/۵

۱۶ تابع با ضابطه $f(x) = ۲[x] - ۱$ و دامنه $D_f = [-۲,۲)$ را رسم کنید. ۱/۵

۱۷ در شکل داده شده مقادیر مجهول x و y را به‌دست آورید. ۲



الف) درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید. ۲

۱ یک معادلهٔ درجه دو حداقل ۲ ریشه دارد. ☐ درست ☐ نادرست

۲ اگر $\frac{c}{c+d}=\frac{a}{b+a}$ آن‌گاه $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$. ☐ درست ☐ نادرست

۳ هر تابع وارون پذیر حتماً یک به یک است. ☐ درست ☐ نادرست

۴ اگر $\frac{c+d}{d}=\frac{a+b}{b}$ آنگاه $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ ☐ درست ☐ نادرست

ب) جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. ۲

۵ اگر $A=(x_1,y_1)$ و $B=(x_2,y_2)$ آن گاه فاصلهٔ این دو نقطه برابر است با -------

۶ اگر دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC} \simeq \overset{\triangle}{A'B'C'}$ و $\frac{AB}{A'B'}=\frac{1}{3}$ باشد، آن‌گاه $\frac{\text{محیط مثلث } ABC}{\text{محیط مثلث } A'B'C'}$ برابر است با -------

۷ دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ برابر است با -------.

۸ هر گزاره با ------- خود معادل است.

ج) گزینهٔ درست را انتخاب کنید. ۲

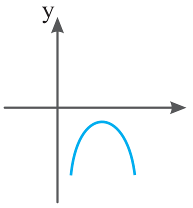
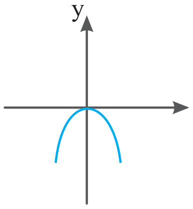
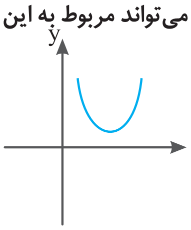
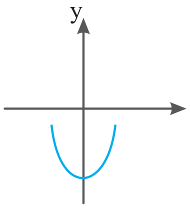
۹ اگر β و α ریشه‌های معادلهٔ درجه دو $ax^2+bx+c=0$ باشند و S و P به‌ترتیب نشان دهندهٔ مجموع دو ریشه و ضرب دو ریشه باشند،
آن‌گاه $\alpha^3+\beta^3$ بر حسب S و P چند است؟

۱) S^2-2P ۲) S^3-3PS ۳) S^3-3PS^2 ۴) S^3-PS

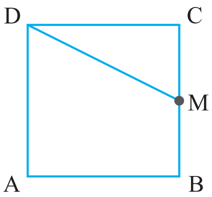
۱۰ فاصلهٔ دو خط $ax+by+c=0$ و $-ax-by+2c=0$ که c و b و a هر سه مخالف صفر هستند، کدام گزینه است؟

۱) $\frac{|3c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ۲) $3c$ ۳) $\frac{-\sqrt{1}}{2}$ ۴) $\frac{3c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

۱۱ در معادلهٔ درجه ۲، $ax^2+bx+c=0$ اگر $\Delta<0$ و $a>0$ کدام شکل می‌تواند مربوط به این معادله باشد؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۱۲ مربع ABCD به ضلع $\sqrt{5}$ مفروض است. اگر نقطهٔ M وسط ضلع BC باشد، آنگاه فاصلهٔ رأس A تا پاره‌خط DM کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$
۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

د) به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱۳ معادلهٔ خط گذرنده از نقطه $A=(2,0)$ که با قسمت مثبت محور xها زاویهٔ 60° می‌سازد را به‌دست آورید. ۳

۱۴ اگر داشته باشیم $\tan\theta=\frac{-1}{3}$ و بدانیم که θ در ربع چهارم قرار ندارد، در این صورت مقدار $\sin\theta+\cos\theta$ را به دست آورید. ۱

ریاضی (۲) — پاسخ آزمون نوبت اول (۱)

۱ درست

۲ درست

۳ درست

۴ درست

۵ قدر مطلق تفاضل عرض‌های دو نقطه

۶ دو ضلع زاویه به یک فاصله

۷ بزرگ‌تر

۸ تمام اعداد حقیقی

۹ استدلال استقرایی

۱۰

طول مستطیل طلایی به عرض ۱	$\dfrac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$
ضرب ریشه‌های یک معادلهٔ درجه دو که ریشه دارد.	$\dfrac{c}{a}$
دو مثلث متساوی الاضلاع	متشابه هستند.
مجموع زوایای داخلی یک چهار ضلعی محدب	۲π رادیان

(گزینه‌های اضافی: $\dfrac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$ ، $\dfrac{-c}{a}$)

۱۱

الف) $\dfrac{۱}{x}+\dfrac{۱}{x-۲}=۵ \Rightarrow \dfrac{x-۲+x}{x(x-۲)}=۵ \Rightarrow \dfrac{۲x-۲}{x^۲-۲x}=۵$

$\Rightarrow ۵x^۲-۱۰x=۲x-۲ \Rightarrow ۵x^۲-۱۲x+۲=۰$

$\Delta=(-۱۲)^۲-۴(۵)(۲)=۱۴۴-۴۰=۱۰۴$

$\Rightarrow x_۱=\dfrac{۱۲+\sqrt{۱۰۴}}{۱۰} \ ,\ x_۲=\dfrac{۱۲-\sqrt{۱۰۴}}{۱۰}$

هیچ‌یک از ریشه‌ها باعث صفر شدن مخرج نمی‌شود پس هر دو جواب قابل قبول هستند.

ب) $۳x^۲+۵x=۲ \Rightarrow ۳x^۲+۵x-۲=۰$

$\Delta=b^۲-۴ac=۲۵-۴(۳)(-۲)=۴۹$

$x_۱=\dfrac{-۵+\sqrt{۴۹}}{۶}=\dfrac{۲}{۶}=\dfrac{۱}{۳}$ و $x_۲=\dfrac{-۵-\sqrt{۴۹}}{۶}=\dfrac{-۱۲}{۶}=-۲$

۱۲

الف) D_f: (دامنهٔ صورت $\cap$ دامنهٔ مخرج) − {ریشه‌های مخرج}

$f(x)=\dfrac{x}{[x]+[-x]}$

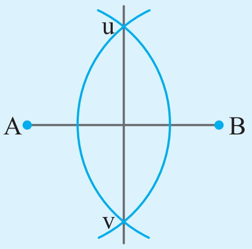
تابع صورت: $x \Leftarrow$ دامنهٔ صورت $\mathbb{R}$ و تابع مخرج: $[x]+[-x] \Leftarrow y=$ دامنهٔ مخرج $\mathbb{R}$. حال ریشه‌های مخرج را حساب می‌کنیم.

$[x]+[-x]=۰ \Rightarrow x\in\mathbb{Z}$

پس: $D_f=(\mathbb{R}\cap\mathbb{R})-\{x \mid x\in\mathbb{Z}\} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

۱۳

پاره خط AB را در نظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول پاره‌خط AB باز کرده و یک بار از نقطه A و بار دیگر از نقطه B با همان شعاع قبلی کمان می‌زنیم تا یک دیگر را در دو نقطهٔ مثلاً v و u قطع کنند. حال با خط‌کش v و u را به هم وصل می‌کنیم.



uv عمودمنصف پاره خط AB است.

۱۴

$\tan x=\dfrac{۳}{۴} \Rightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{۳}{۴} \Rightarrow \sin x=\dfrac{۳}{۴}\cos x(*)$

$\dfrac{۴}{\cos x}-\dfrac{۳}{\sin x} \overset{(*)}{\Rightarrow} \dfrac{۴}{\cos x}-\dfrac{۳}{\frac{۳}{۴}\cos x}=\dfrac{۴}{\cos x}-\dfrac{۴}{\cos x}=۰$

۱۵

$f(x)=f(y) \Rightarrow \dfrac{x-۴}{x+۵}=\dfrac{y-۴}{y+۵} \Rightarrow (x-۴)(y+۵)=(x+۵)(y-۴)$

$\Rightarrow xy+۵x-۴y-۲۰=xy-۴x+۵y-۲۰ \Rightarrow ۵x-۴y=-۴x+۵y$

$\Rightarrow ۵x+۴x=۵y+۴y \Rightarrow ۹x=۹y \Rightarrow x=y$

۱۶

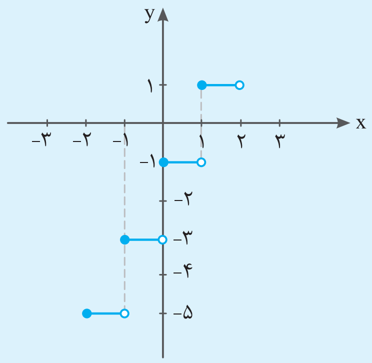
$f(x)=۲[x]-۱ \ ،\ D_f=[-۲،۲)$

$-۲\le x<-۱ \Rightarrow [x]=-۲ \Rightarrow f(x)=۲(-۲)-۱=-۵$

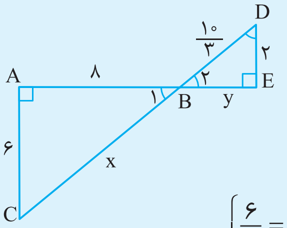
$-۱\le x<۰ \Rightarrow [x]=-۱ \Rightarrow f(x)=۲(-۱)-۱=-۳$

$۰\le x<۱ \Rightarrow [x]=۰ \Rightarrow f(x)=۲(۰)-۱=-۱$

$-۱\le x<۲ \Rightarrow [x]=۱ \Rightarrow f(x)=۲(۱)-۱=۱$



۱۷



$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}_1=\hat{B}_2\\ \hat{A}=\hat{E}\end{array}\right\}\xRightarrow{(\text{ز ز})}\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{BDE}$$

$$\frac{AC}{DE}=\frac{BC}{DB}=\frac{AB}{BE}$$

$$\Rightarrow\frac{6}{2}=\frac{x}{\frac{10}{3}}=\frac{8}{y}\Rightarrow\begin{cases}\frac{6}{2}=\frac{x}{\frac{10}{3}}\Rightarrow x=\frac{6}{2}\times\frac{10}{3}=10\\ \frac{6}{2}=\frac{8}{y}\Rightarrow y=\frac{8\times 2}{6}=\frac{8}{3}\end{cases}$$

ریاضی (۲) — پاسخ آزمون نوبت اول (۲)

۱ نادرست

۲ درست؛ با تفضیل در مخرج تبدیل به $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ می‌شود.

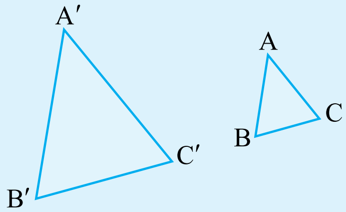
۳ درست

۴ درست

۵ $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

۶ دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ مانند شکل زیر را در نظر بگیرید. چون $\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{A'B'C'}$ و $\frac{AB}{A'B'}=\frac{1}{3}$

$$\begin{cases}AB=\frac{1}{3}A'B'\\ AC=\frac{1}{3}A'C'\\ BC=\frac{1}{3}B'C'\end{cases}$$



حال داریم:

$$\frac{\text{محیط مثلث } \overset{\Delta}{ABC}}{\text{محیط مثلث } \overset{\Delta}{A'B'C'}}=\frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}A'B'+\frac{1}{3}A'C'+\frac{1}{3}B'C'}{A'B'+A'C'+B'C'}=\frac{\frac{1}{3}(A'B'+A'C'+B'C')}{A'B'+A'C'+B'C'}=\frac{1}{3}$$

۷ $(D_f\cap D_g)-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$

۸ عکس نقیض

۹

گزینهٔ «۲»

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=(\alpha+\beta)((\alpha^2+\beta^2)-\alpha\beta)$$

$$=(\alpha+\beta)((\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta)-\alpha\beta)$$

$$=(\alpha+\beta)((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-\alpha\beta)$$

$$=(\alpha+\beta)((\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta)\xrightarrow[\alpha\beta=P]{\alpha+\beta=S}S(S^2-3P)=S^3-3PS$$

۱۰

گزینهٔ «۱»؛ $-ax-by+2c=0\Rightarrow ax+by-2c=0$ پس دو خط با هم موازی هستند. پس کافی است یک نقطهٔ دلخواه روی یک خط در نظر گرفته و فاصلهٔ آن تا خط دیگر را اندازه بگیریم این فاصله همان فاصلهٔ دو خط است. حال نقطهٔ (x_0,y_0) را روی خط $ax+by-2c=0$ در نظر می‌گیریم و فاصلهٔ آن تا خط $ax+by+c=0$ را به‌دست می‌آوریم.

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\qquad(I)$$

از طرفی چون (x_0,y_0) روی خط $ax+by-2c=0$ قرار دارد در مختصات آن صدق می‌کند. پس:

$$ax_0+by_0-2c=0\Rightarrow ax_0+by_0=2c\,(II)$$

$$\xRightarrow{I,II}d=\frac{|2c+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

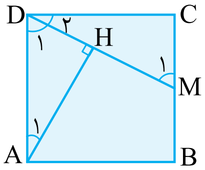
۱۱

گزینهٔ «۳»؛ چون $\Delta<0$ پس تابع نباید محور x ها را قطع کند. گزینه‌های «۲» و «۴» رد می‌شوند. از طرفی چون $a>0$ و $\Delta<0$ بنابراین این تابع همواره مثبت است، پس تنها گزینهٔ «۳» می‌تواند صحیح باشد.

۱۲

گزینهٔ «۴»؛ با توجه به شکل زیر داریم:

به علت تساوی دو زاویه $\overset{\Delta}{HAD}\sim\overset{\Delta}{CDM}$، زیرا هر کدام یک زاویهٔ 90° دارند و زاویهٔ D_2 و A_1 با هم برابرند.



$$\begin{cases}\hat{A}_1+\hat{D}_1=90^\circ\\ \hat{D}_2+\hat{D}_1=90^\circ\end{cases}\Rightarrow\hat{A}_1=\hat{D}_2$$

$$(I)\ \frac{AH}{DC}=\frac{AD}{DM}$$

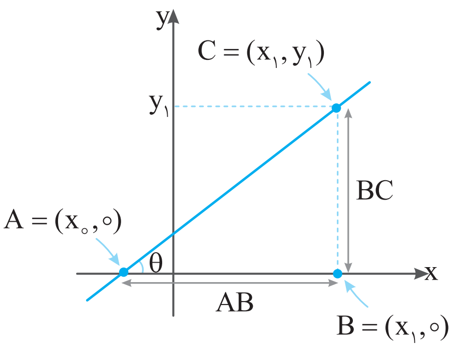
$$(II)\,DM=\sqrt{(DC)^2+(CM)^2}=\sqrt{5+\frac{5}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

$$\xRightarrow{(II),(I)}\frac{AH}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{\frac{5}{2}}\Rightarrow AH=2$$

۱۳

نکته: شیب یک خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد.

اثبات برای علاقه‌مندان: خط $y=ax+b$ را در نظر بگیرید.



دو خط غیرموازی با محورهای مختصات، بر هم عمودند، هرگاه حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر (-1) باشد، یعنی اگر شیب‌های دو خط m و m' باشد، آن‌گاه شرط عمود بودن آن‌ها آن است که $mm' = -1$، به عبارت دیگر شیب هر کدام، قرینه معکوس شیب دیگری باشد.

فاصله دو نقطه:

- اگر A و B دو نقطه هم عرض در صفحه باشند، آن‌گاه $AB = |x_A - x_B|$
- اگر C و D دو نقطه هم طول در صفحه باشند، آن‌گاه $CD = |y_C - y_D|$
- فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ برابر است با: $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$
- مختصات نقطه وسط پاره خط AB عبارتست از: $M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$
- فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با: $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

روش‌های حل معادله:

۱- روش تجزیه: اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB = 0$، آن‌گاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است. به عبارت دیگر:

$$AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0$$

در حل معادله درجه دوم به روش تجزیه، ابتدا معادله درجه دوم را به حاصلضرب دو عبارت جبری تجزیه کرده سپس از ویژگی فوق استفاده می‌کنیم.

۲- روش ریشه‌گیری: فرض کنید a یک عدد حقیقی و $a \geq 0$ باشد، در این صورت:

$$x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$، $b = 0$ و اعداد a و c مختلف العلامت باشند برای یافتن ریشه‌های این معادله، می‌توان از این روش استفاده کرد و در واقع داریم:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

توجه کنید که چون طبق فرض a و c مختلف العلامت هستند، پس $-\frac{c}{a}$ مثبت بوده و در نتیجه معادله دارای دو جواب قرینه می‌باشد. بدیهی است که اگر a و c هم‌علامت باشند، معادله در این حالت ریشه نخواهد داشت.

۳- روش مربع کامل:

الف) جملات شامل مجهول x را در یک طرف نگه داشته و عدد ثابت را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم.

ب) اگر ضریب x^2 عددی غیر از یک باشد، طرفین معادله را بر این ضریب تقسیم می‌کنیم تا ضریب x^2 برابر یک شود.

پ) به طرفین معادله، مربع نصف ضریب x را اضافه می‌کنیم تا یک طرف معادله به مربع کامل تبدیل شود.

ث) اگر دو طرف معادله مثبت شد به روش ریشه‌گیری ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم.

> نکته: در حل معادلات درجه دوم به روش مربع کامل، $x^2 + Ax = 0$ را می‌توان با استفاده از فرمول $x^2 + Ax = (x + \frac{A}{2})^2 - (\frac{A}{2})^2 = 0$ به مربع کامل تبدیل کرد.

۴- روش فرمول کلی (دلتا):

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$، به عبارت $b^2 - 4ac$ که وجود ریشه‌های معادله به علامت آن بستگی دارد، دلتای معادله می‌گوییم و آن‌را با Δ نمایش می‌دهیم، در این صورت با توجه به علامت Δ، داریم:

الف) اگر $\Delta < 0$ باشد معادله ریشه حقیقی ندارد.

ب) اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای یک ریشه است که به آن ریشه مضاعف یا مکرر مرتبهٔ دوم می‌گوییم و ریشه مضاعف معادله برابر است با:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

ج) اگر $\Delta > 0$ باشد معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است که از روابط مقابل به‌دست می‌آیند: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادله درجه ۲:

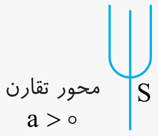
اگر α و β ریشه‌های معادله $(a \neq 0)$ $ax^2+bx+c=0$ باشند، آن‌گاه: $\alpha\beta = P = \frac{c}{a}$ $\alpha+\beta = S = \frac{-b}{a}$

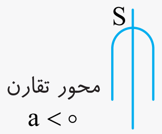
معادله درجه دومی که مجموع ریشه‌های آن S و حاصلضرب ریشه‌های آن P باشد، به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ است.

سهمی

نمودار هر معادله به شکل $y = ax^2 + bx + c$ را که در آن، a ،b ،c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$، یک سهمی قائم و یا به اختصار یک سهمی است.

در شکل‌های روبه‌رو به نقطه S راس سهمی می‌گوییم.





اگر $a > 0$ باشد سهمی دارای پایین‌ترین نقطه یا مینیمم و اگر $a < 0$ باشد سهمی دارای بالاترین نقطه یا ماکزیمم می‌باشد که در هر صورت نقطه مینیمم یا ماکزیمم سهمی همان راس سهمی است. همچنین خط عمودی که از راس سهمی می‌گذرد، خط تقارن یا محور تقارن سهمی نامیده می‌شود.

صفرهای تابع درجه ۲:

نقاط برخورد نمودار یک تابع مانند f با محور x ها را صفرهای تابع می‌نامیم که در واقع ریشه‌های $f(x) = 0$ هستند، به عبارت دیگر، در این نقاط مقدارتابع برابر صفر است.

برای رسم سهمی به معادله $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ و $(a \neq 0)$ فرایند زیر را انجام می‌دهیم:

۱) با توجه به علامت a ، مشخص می‌کنیم که دهانه سهمی رو به بالا باز می‌شود یا رو به پایین

۲) مختصات راس سهمی، یعنی نقطه $S(\alpha,\beta)$ را مشخص می‌کنیم.

۳) دو نقطه با طول‌های دلخواه در طرفین راس را مشخص می‌کنیم. (ترجیحا دو نقطه با طول‌های متقارن نسبت به طول راس) می‌دانیم که مزیت انتخاب دو نقطه با طول‌های متقارن نسبت به طول راس، در این است که عرض این نقاط همواره برابر یکدیگر خواهد بود.

۴) نقاط مشخص شده را به صورت منحنی به یکدیگر وصل کرده و با توجه به علامت a نمودار را امتداد می‌دهیم.

خواص سهمی به معادله $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ و $(a \neq 0)$

۱) نقطه $S(\alpha,\beta)$ راس این سهمی است.

۲) خط به معادله $x = \alpha$ معادله خط تقارن (محور تقارن) سهمی است.

۳) اگر $a > 0$ باشد، دهانه سهمی رو به بالا و اگر $a < 0$ باشد، دهانه سهمی رو به پایین باز می‌شود.

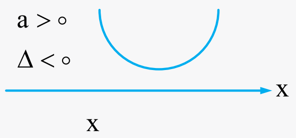
اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، $\Delta > 0$ باشد و α , β ریشه‌های آن باشند، آن‌گاه:

۱) $P < 0 \Rightarrow$ معادله دارای دو ریشه مختلف العلامت است

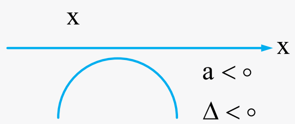
۲) $P > 0 \Rightarrow$ دو ریشه متحدالعلامت اند $\Rightarrow \begin{cases} S > 0 \Rightarrow \text{هر دو ریشهٔ مثبت} \\ S < 0 \Rightarrow \text{هر دو ریشهٔ منفی} \end{cases}$

۳) $P = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -\frac{b}{a} \end{cases}$

اگر $\Delta < 0$، در این صورت معادله ریشه حقیقی ندارد. در واقع تابع $y = ax^2 + bx + c$ ، محور x ها را قطع نمی‌کند و نمودار تابع به یکی از دو صورت زیر است:

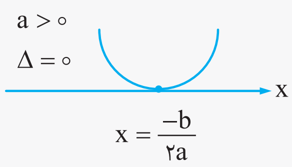


نمودار همواره بالای محورxها قرار دارد.

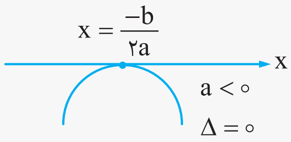


نمودار همواره پایین محورxها قرار دارد.

◈ اگر $\Delta = 0$ در این صورت معادله دارای ریشه مضاعف $x = \frac{-b}{2a}$ است. در این حالت نمودار تابع بر محور x ها مماس است. نمودار کلی تابع در این حالت به یکی از دو صورت زیر است:



نمودار تابع بالای محورxها و بر آن مماس است.



نمودار تابع زیر محورxها و بر آن مماس است.

◈ **مستطیل طلایی:**

مستطیلی را که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد را مستطیل طلایی می‌گوییم. می‌خواهیم نسبت طول به عرض را در مستطیل طلایی به‌دست آوریم. فرض کنیم طول مستطیل x و عرض آن y باشد. طبق فرض داریم:

$$\frac{\text{مجموع طول و عرض}}{\text{طول}} = \frac{\text{طول}}{\text{عرض}} \Rightarrow \frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{x} + \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow 1 + \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \quad (*)$$

فرض کنیم $A = \frac{x}{y}$ باشد. در این صورت، $\frac{y}{x}$ عکس $\frac{x}{y}$ است. پس:

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\frac{x}{y}} = \frac{1}{A} \xRightarrow{(*)} 1 + \frac{1}{A} = A \xRightarrow[A \neq 0]{\times A} A + 1 = A^2 \Rightarrow A^2 - A - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(-1) = 5 \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2(1)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ A_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2(1)} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

عدد $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ عددی منفی است پس نمی‌تواند نسبت دو عدد مثبت باشد و در نتیجه غیرقابل قبول است.

پس $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ نسبت طول به عرض مستطیل طلایی است. اگر $y = 1$ باشد، آن‌گاه $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.

عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ را عدد طلایی می‌گوییم.

◈ **معادلات گویا:**

برای حل یک معادله گویا می‌توان دو طرف تساوی را پس از تجزیه کردن مخرج‌ها در کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج‌ها ضرب کرد تا معادله از شکل کسری خارج شود. جواب‌های به‌دست آمده نباید مخرج کسرها را صفر کنند و این جواب‌ها باید در معادله اولیه صدق کنند.

◈ **معادلات رادیکالی:**

برای حل یک معادله رادیکالی می‌توان جملات را طوری در طرفین تساوی جابه جا کرد که یک عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار بگیرد. سپس با به توان رساندن طرفین معادله و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکال خارج کرد. پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جواب‌های حاصل در معادله اولیه صدق می‌کنند.

فصل دوم هندسه

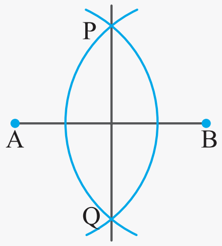
ترسیم‌های هندسی

برخی خواص عمودمنصف

۱) هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

۲) هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به فاصله یکسان باشد حتما روی عمودمنصف آن واقع است.

از (۱) و (۲) نتیجه میگیریم: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد از دوسر پاره‌خط به یک فاصله و هر نقطه که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.



رسم عمودمنصف یک پاره‌خط داده شده:

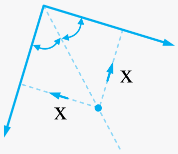
دهانه پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک‌بار به مرکز نقطه A و بار دیگر به همان شعاع و به مرکز نقطه B کمان بزنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاط P و Q قطع کنند. فاصله P و Q از نقاط A و B یکسان است. پس P و Q روی عمودمنصف AB قرار دارند. خط گذرنده از دو نقطه P و Q، عمودمنصف AB است.

از رسم عمودمنصف یک پاره‌خط برای سه رسم زیر استفاده می‌شود:

۱) رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن

۲) رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیرواقع بر آن.

۳) رسم خط موازی با خط داده شده از نقطه‌ای غیرواقع بر آن.



برخی خواص نیمساز و ترسیم آن:

۱) هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

۲) هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

از (۱) و (۲) نتیجه میگیریم: هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

- دایره‌ای را که از سه راس مثلث میگذرد، دایره محیطی مثلث گوییم. مرکز این دایره محل تلاقی عمودمنصف‌های مثلث است.
- دایره‌ای که بر سه ضلع مثلث مماس باشد دایره محاطی گوییم. مرکز دایره محاطی مثلث، محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث است.

استدلال و قضیه تالس

نسبت و تناسب: اگر a و b دو عدد حقیقی و $b \neq 0$ باشد کسر $\frac{a}{b}$ را نسبت و تساوی بین دو نسبت را تناسب می‌گوییم.

خواص تناسب $(a,b,c,d \neq 0)$:

۱) اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ آن‌گاه $ad=bc$

۲) اگر b و d دو عدد حقیقی غیرصفر و $ad=bc$ آن‌گاه $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

۳) اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ آن‌گاه $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

۴) اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ آن‌گاه $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$ و $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

۵) اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ آن‌گاه $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

۶) اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ آن‌گاه $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

استدلال استقرایی: این نوع از استدلال که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی از آن گرفته می‌شود، (یعنی از