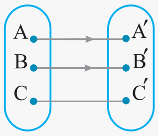
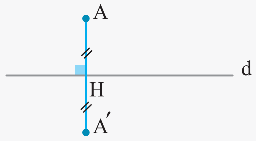
فهرست مطالب

هندسه (۲)

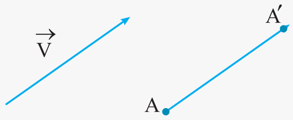
درس اول: تبدیل‌های هندسی



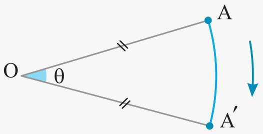
- **تبدیل**: نگاشتی است یک به یک از صفحه بر روی خودش،یعنی هر نقطه فقط یک تصویر منحصر به فرد دارد. مانند
- تبدیل‌ها می‌توانند موقعیت اشکال و همچنین اندازه آن‌ها را تغییر دهند.
- تبدیل ایزومتری (طولپا): تبدیلی است که طول پاره‌خط را حفظ می‌کند.
- در هر تبدیل طولپا تبدیل یافته هر زاویه، زاویه‌ای هم‌اندازه آن است.



- بازتاب محوری: نقطهٔ دلخواهی مانند A و خط دلخواهی مانند d را در نظر بگیرید اگر از A عمود AH را بر خط d فرود آوریم، H تصویر A روی خط d است و اگر AH را به اندازه خودش امتداد دهیم تا به A' برسیم، A' قرینه A نسبت به خط d نام دارد و خط d عمودمنصف AA' است، که به آن محور تقارن یا خط بازتاب می‌گویند.
- بازتاب تبدیلی طولپاست و مساحت را حفظ می‌کند.
- بازتاب شیب خط را الزاماً حفظ نمی‌کند مگر در صورتی که خط و محور تقارن موازی یا برهم عمود باشند.
- بازتاب محوری جهت شکل را حفظ نمی‌کند.
- در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل یافته آن بر خود آن نقطه منطبق می‌شود را نقطه ثابت تبدیل می‌نامند.
- بازتاب نسبت به خط، بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل دارد.
- قرینهٔ قرینه هر نقطه نسبت به یک خط خود آن نقطه می‌باشد. $S(S(A)) = A$



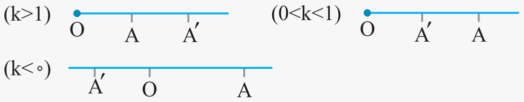
- **انتقال**: نقطهٔ A و بردار $\vec{V}$ را در نظر بگیرید، اگر از A تحت برداری همسنگ $\vec{V}$ (هم‌اندازه، هم‌جهت و موازی) حرکت کنیم به نقطه‌ای مانند A' می‌رسیم که به A'، انتقال یافته A تحت بردار $\vec{V}$ می‌گوئیم.
- انتقال تبدیلی طولپاست و مساحت شکل را ثابت نگه می‌دارد.
- انتقال تبدیلی است که شیب خط را حفظ می‌کند، یعنی هر خط با انتقال یافته‌اش موازی است.
- انتقال جهت شکل را حفظ می‌کند.



- **دوران**: نقطهٔ دلخواه A و نقطهٔ ثابت O را در نظر بگیرید. اگر به مرکز O و شعاع OA یک کمان در جهت دلخواه (ساعتگرد و یا پادساعتگرد) به اندازه θ رسم کنید. به A' دوران یافته A حول O به اندازه θ می‌گوییم.
- دوران تبدیلی است طولپا و مساحت شکل را حفظ می‌کند.
- دوران شیب خط را الزاماً حفظ نمی‌کند مگر در حالتی که زاویه °۰ یا °۱۸۰ باشد.
- دوران جهت شکل را ثابت نگه می‌دارد.
- **تجانس**: اگر O نقطه‌ای ثابت در صفحه و $k \neq 0$ یک عدد حقیقی باشد، نقطهٔ A' را مجانس نقطهٔ A در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوییم هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد.

الف) سه نقطه A، O و A' روی یک خط راست باشند. ب) $OA' = |k|OA$

ج) اگر k مثبت باشد (تجانس مستقیم)، A' روی نیم‌خط OA و نقاط A و A' در یک طرف نقطه O قرار دارند.

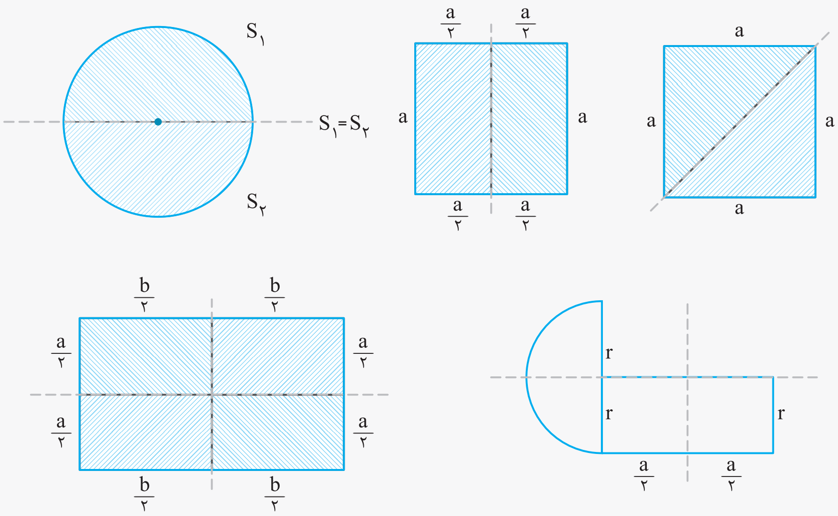


اگر k منفی باشد (تجانس معکوس)، نقطه O بین نقاط A و A' قرار می‌گیرد.

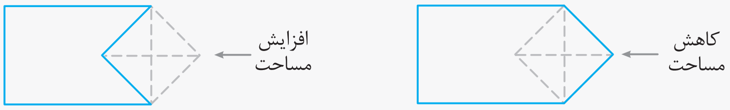
- اگر $|k|>1$ باشد تجانس انبساطی است.
- اگر $|k|<1$ باشد تجانس انقباضی است.
- اگر A' مجانس A به مرکز O و نسبت k باشد، A مجانس A' به مرکز O و نسبت $\frac{1}{k}$ است.
- تجانس تبدیلی غیرطولپاست، مجانس هر شکل با آن متشابه است و نسبت تشابه $|k|$ و نسبت مساحت‌های آن‌ها k^2 است.
- هر دو n ضلعی متشابه، مجانس یکدیگر نیستند ولی هر دو شکل متجانس، مشابه یکدیگرند.
- تجانس شیب خط را حفظ می‌کند، یعنی مجانس هر خط با خود آن خط موازی است.
- تجانس جهت شکل را حفظ می‌کند.
- تبدیلی همانی است که هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر کند.
- انتقال تحت بردار $\vec{O}$ (صفر)، دوران با زوایای °۰ و °۳۶۰ و تجانس با $k=1$ تبدیلات همانی هستند.
- ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی یک انتقال است.
- ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع یک دوران است.

درس دوم: کاربرد تبدیل‌ها

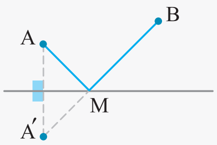
◆ شکل‌های زیر به کمک محورهای تقارنشان به شکل‌های هم‌مساحت تفکیک می‌شوند.



◆ به کمک بازتاب می‌توان با ثابت نگه‌داشتن محیط مساحت را افزایش یا کاهش داد، به مسائلی که با این روش حل می‌شوند هم پیرامونی یا هم‌محیطی می‌گوئیم.

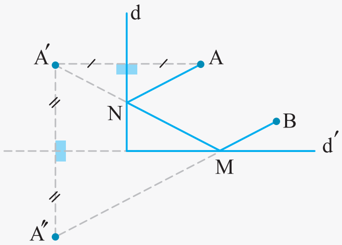


◆ **پیداکردن کوتاه‌ترین مسیر ممکن نوع اول:** دو نقطهٔ A و B مطابق شکل و خط d، مفروضند. برای پیداکردن نقطه‌ای مانند M روی خط d به طوری که $MA+MB$ مینیمم باشد کافی است A را نسبت به خط d قرینه کنیم و قرینهٔ آن را به B وصل کنیم تا خط d را در M قطع کند. M نقطهٔ موردنظر است.

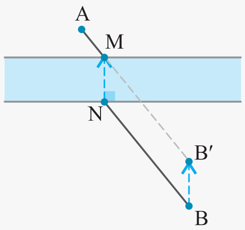


◆ این روش به یکی از قضایای هرون معروف است.

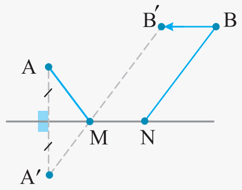
◆ **پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر ممکن نوع دوم:** دو نقطهٔ A و B و دو خط متقاطع d و d' مفروضند. برای پیدا کردن مسیر مینیمم ANMB که از A شروع می‌شود و پس از برخورد به d و d' از B می‌گذرد، ابتدا قرینهٔ A را نسبت به خط d می‌یابیم (A')، سپس قرینه A' را نسبت به خط d' می‌یابیم (A'')، از A'' به B وصل می‌کنیم تا d' را در M قطع کند، از M به A' وصل می‌کنیم تا d را در N قطع کند، N را به A وصل می‌کنیم، ANMB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.



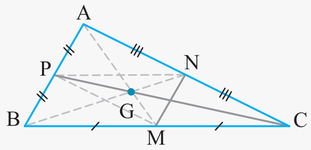
پیداکردن کوتاه‌ترین مسیر ممکن نوع سوم: فرض کنید بخواهیم روی رودخانه‌ای به عرض MN مطابق شکل پلی به گونه‌ای احداث کنیم که مسیر بین دو نقطه A و B با گذر از این پل کوتاه‌ترین مقدار ممکن شود، برای این کار ابتدا از B تحت یک انتقال با بردار $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{NM}$، B' را می‌یابیم، سپس از B' به A وصل می‌کنیم تا لبهٔ دورتر رودخانه را در M قطع کند، از M عمود MN را بر رودخانه رسم می‌کنیم (پل موردنظر) و از N به B وصل می‌کنیم، AMNB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.



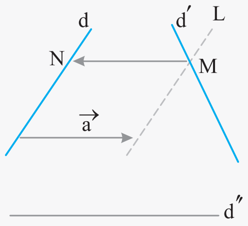
پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر ممکن نوع چهارم: فرض کنید بخواهیم از نقطه A به نقطه B که هر دو در یک طرف خط d قرار دارند به گونه‌ای برویم که مقدار MN از مسیر روی خط d باشد برای این کار ابتدا B را تحت یک انتقال هم‌راستا با d و به اندازه $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{NM}$ انتقال می‌دهیم تا B' حاصل شود. سپس A را نسبت به خط d قرینه می‌کنیم تا A' حاصل شود، A' را به B' وصل می‌کنیم تا خط d را در M قطع کند. M را تحت یک انتقال با بردار $\overrightarrow{MN}$ انتقال می‌دهیم تا N حاصل شود، از N به B وصل می‌کنیم مسیر AMNB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.



پیداکردن پای میانه‌ها به کمک تجانس: مرکز ثقل هر مثلث محل همرسی سه میانه مثلث است. اگر مرکز تجانس را G_1 در نظر بگیریم با نسبت $k=-\frac{1}{2}$ ، مجانس مثلث ABC، مثلث MNP است، که مساحت آن $\frac{1}{4}$ مساحت کل است و همچنین مجانس MNP نسبت به G و $k=-2$ مثلث ABC است که مساحت آن چهار برابر مثلث MNP است. M، N و P همان پای میانه‌های m_a ، m_b و m_c هستند.



پیدا کردن پاره‌خط موازی: فرض کنید سه خط d، d' و d'' مطابق شکل زیر مفروض‌اند. برای رسم پاره خطی مانند $AB=a$ که دو سر آن بر روی دو خط d و d' بوده و با d'' موازی باشد، ابتدا d را تحت بردار $\vec{a}$ موازی با d انتقال می‌دهیم تا خط d' را در M قطع کند، سپس M را تحت یک انتقال با بردار $-\vec{a}$ منتقل می‌کنیم تا d را در N قطع کند، MN پاره‌خط موردنظر است.



آزمون نوبت اول (۳)

الف) درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید. ۲

۱ تبدیلی که تبدیل یافته هر زاویه، زاویه‌ای هم اندازه آن باشد طولپاست. درست ☐ نادرست ☐

۲ یک چند ضلعی، محیطی است اگر و فقط اگر عمودمنصف‌های همه ضلع‌های آن در یک نقطه همرس باشند. درست ☐ نادرست ☐

۳ اگر یک چهار ضلعی هم محاطی و هم محیطی باشد آن‌گاه مربع است. درست ☐ نادرست ☐

۴ دو دایره متخارج در مجموع چهار مماس مشترک دارند. درست ☐ نادرست ☐

ب) جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. ۳

۵ دایره‌ای که از هر سه رأس مثلث می‌گذرد ---------- نام دارد و مرکز آن ---------- می‌باشد.

۶ تبدیل نگاشتی است ---------- از صفحه بر روی خودش.

۷ طول کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی α در دایره $C(O,R)$، ---------- است.

۸ قطری که از وسط وتر یک دایره بگذرد به شرط آن‌که ---------- بر آن وتر ---------- است.

ج) عبارت درست را از داخل پرانتز انتخاب کنید. ۱

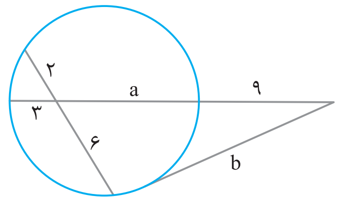
۹ تبدیلی طولپاست ولی شیب خط را الزاماً حفظ نمی‌کند. (دوران ـ انتقال)

۱۰ وضعیت دو دایره که فقط یک مماس مشترک دارند. (مماس خارج ـ متقاطع ـ مماس داخل)

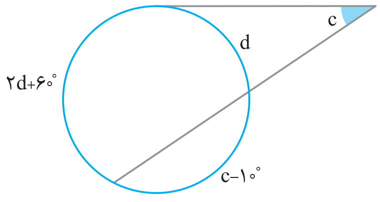
د) به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱۱ ثابت کنید وترهای موازی در یک دایره کمان‌های مساوی تشکیل می‌دهند. ۱/۵

۱۲ با توجه به شکل‌های زیر مقادیر a، b، c و d را بیابید. ۲



(الف)



(ب)

۱۳ طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، ۱۲ واحد است. اگر شعاع یکی از دایره‌ها ۹ واحد از شعاع دایره دیگر بزرگ‌تر باشد، شعاع هر یک از دو دایره را بیابید. ۱/۵

۱۴ در دایره $C(O,R)$، وتر AB به اندازه $\sqrt{2}R$، دایره را به دو قسمت تقسیم می‌کند، مساحت قسمت کوچکتر چه کسری از مساحت قسمت بزرگ‌تر است؟ ۱/۵

۱۵ در یک شش ضلعی منتظم دایره‌ای به شعاع $\sqrt{3}$ محاط شده است، طول ضلع شش ضلعی چقدر است؟ ۱/۵

۱۶ در هر دایره ثابت کنید وتر بزرگ‌تر به مرکز دایره نزدیکتر است. ۱/۵

۱۷ نشان دهید اگر مرکز دوران بر پاره‌خط AB واقع نباشد و زاویه دوران کمتر از زاویه $\widehat{AOB}$ باشد، دوران طولپاست (ثابت کنید در این حالت $AB = A'B'$). ۱/۵

۱۸ در حالتی که پاره‌خط موازی محور بازتاب قرار دارد، ثابت کنید بازتاب طولپاست. ۱/۵

۱۹ انتقال یافته متوازی‌الاضلاع زیر را با در نظر گرفتن قطر $\overrightarrow{AC}$ به‌عنوان بردار انتقال رسم کنید، سپس مشخص کنید آیا این تبدیل نقطه ثابت دارد یا خیر؟ ۱/۵

آزمـــــــون نـوبت اول (۳)

الف) درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید. ۲

۱ تبدیلی که تبدیل یافته هر زاویه، زاویه‌ای هم اندازه آن باشد طولپاست. درست ☐ نادرست ☐

۲ یک چند ضلعی، محیطی است اگر و فقط اگر عمودمنصف‌های همه ضلع‌های آن در یک نقطه همرس باشند. درست ☐ نادرست ☐

۳ اگر یک چهار ضلعی هم محاطی و هم محیطی باشد آن‌گاه مربع است. درست ☐ نادرست ☐

۴ دو دایره متخارج در مجموع چهار مماس مشترک دارند. درست ☐ نادرست ☐

ب) جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. ۳

۵ دایره‌ای که از هر سه رأس مثلث می‌گذرد .... نام دارد و مرکز آن .... می‌باشد.

۶ تبدیل نگاشتی است .... از صفحه بر روی خودش.

۷ طول کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی α در دایره $C(O,R)$، .... است.

۸ قطری که از وسط وتر یک دایره بگذرد به شرط آن‌که .... بر آن وتر .... است.

ج) عبارت درست را از داخل پرانتز انتخاب کنید. ۱

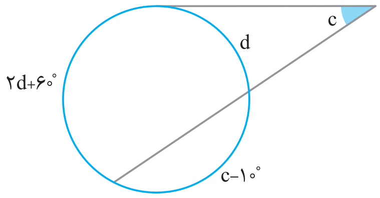
۹ تبدیلی طولپاست ولی شیب خط را الزاماً حفظ نمی‌کند. (دوران ـ انتقال)

۱۰ وضعیت دو دایره که فقط یک مماس مشترک دارند. (مماس خارج ـ متقاطع ـ مماس داخل)

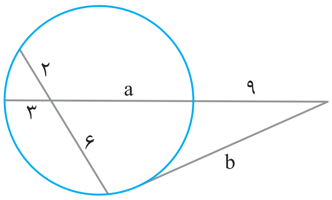
د) به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱۱ ثابت کنید وترهای موازی در یک دایره کمان‌های مساوی تشکیل می‌دهند. ۱/۵

۱۲ با توجه به شکل‌های زیر مقادیر a، b، c و d را بیابید. ۲



(ب)



(الف)

۱۳ طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، ۱۲ واحد است. اگر شعاع یکی از دایره‌ها ۹ واحد از شعاع دایره دیگر بزرگ‌تر باشد، شعاع هر یک از دو دایره را بیابید. ۱/۵

۱۴ در دایره $C(O,R)$، وتر AB به اندازه $\sqrt{2}R$، دایره را به دو قسمت تقسیم می‌کند، مساحت قسمت کوچکتر چه کسری از مساحت قسمت بزرگ‌تر است؟ ۱/۵

۱۵ در یک شش ضلعی منتظم دایره‌ای به شعاع $\sqrt{3}$ محاط شده است، طول ضلع شش ضلعی چقدر است؟ ۱/۵

۱۶ در هر دایره ثابت کنید وتر بزرگ‌تر به مرکز دایره نزدیکتر است. ۱/۵

۱۷ نشان دهید اگر مرکز دوران بر پاره‌خط AB واقع نباشد و زاویه دوران کمتر از زاویه $\widehat{AOB}$ باشد، دوران طولپاست (ثابت کنید در این حالت $AB = A'B'$). ۱/۵

۱۸ در حالتی که پاره‌خط موازی محور بازتاب قرار دارد، ثابت کنید بازتاب طولپاست. ۱/۵

۱۹ انتقال یافته متوازی‌الاضلاع زیر را با در نظر گرفتن قطر $\overrightarrow{AC}$ به‌عنوان بردار انتقال رسم کنید، سپس مشخص کنید آیا این تبدیل نقطه ثابت دارد یا خیر؟ ۱/۵

آزمـــون نـوبت دوم (۷)

الف) درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید. ۱

۱ هر دو قطر در دایره همواره منصف یکدیگرند. درست ☐ نادرست ☐

۲ در تجانس شیب خط حفظ می‌شود. درست ☐ نادرست ☐

ب) جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. ۱/۵

۳ شعاع دایره محیطی مثلث قائم‌الزاویه برابر .... است.

۴ تجانس به مرکز O و $k = ۲$ از نوع .... و .... می‌باشد.

ج) عبارت درست را از داخل پرانتز انتخاب کنید. ۱

۵ تبدیلی ایزومتری که جهت شکل را حفظ می‌کند. (انتقال ـ تجانس ـ بازتاب)

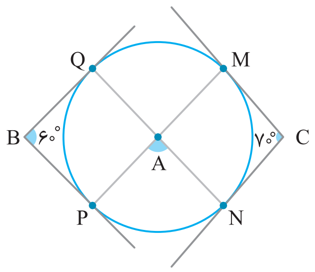
۶ تعداد مماس مشترک‌های دو دایرهٔ مماس خارج (صفر ـ یک ـ دو ـ سه) است.

د) به سؤالات زیر پاسخ دهید.

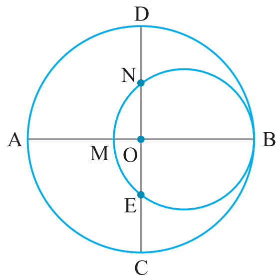
۷ ثابت کنید قطر عمود بر وتر، وتر و کمان مقابلش را نصف می‌کند. ۱

۸ در شکل زیر $\hat{A}$ چند درجه است؟ ۱/۵

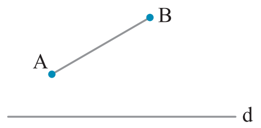
$(Q\hat{B}P = ۶۰^\circ , M\hat{C}N = ۷۰^\circ)$



۹ در شکل زیر دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ‌تر بر هم عمودند. اگر $AM = ۱۶$ و $ND = ۱۰$ شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید. (O مرکز دایره بزرگ‌تر است.) ۱/۵



۱۰ پاره‌خط AB مطابق شکل زیر با خط d نه موازی است نه متقاطع، ثابت کنید بازتاب یافته AB نسبت به d با خود AB هم‌اندازه است. (طولپایی) ۱/۵



آزمـــــون نـوبت دوم (۷)

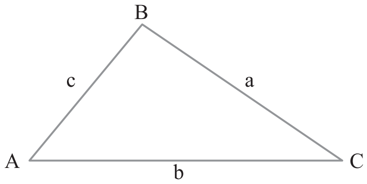
۱۱ مجانس دایره $C(O,R)$ را به مرکز O و $k = ۳$ رسم کنید و نسبت مساحت‌های آن دو را بیابید. ۱

۱۲ دو نقطهٔ A و B مطابق شکل مفروض‌اند. نقطهٔ M را روی خط d طوری بیابید که $MA + MB$ کمترین مقدار ممکن باشد. روش یافتن M را توضیح دهید. ۱

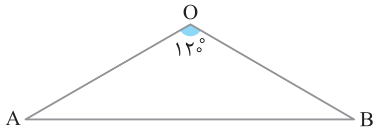
۱۳ یک متوازی‌الاضلاع و متجانسش را با در نظرگرفتن محل تقاطع قطرهایش به عنوان مرکز تجانس و $k = -۱$ رسم کنید. آیا این تبدیل همانی است؟ ۱/۵

۱۴ برای هر مثلث ثابت کنید، اگر R شعاع دایره محیطی باشد خواهیم داشت: (قضیه سینوس‌ها) ۱/۵

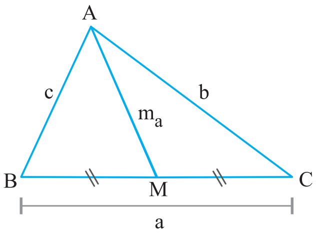
$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{C}{\sin\hat{C}} = ۲R$$



۱۵ دو قایق از یک نقطه (O) در دریاچه‌ای با سرعت‌های $۳۰ km/h$ و $۵۰ km / h$ و با زاویه ۱۲۰° از هم دور می‌شوند، یک ساعت بعد دو قایق در چه فاصله‌ای از یکدیگر هستند؟ ۱/۵



۱۶ در مثلث ABC میانه AM رسم شده است. ثابت کنید $۲b^۲ + ۲c^۲ = ۴m_a^۲ + a^۲$ (قضیه میانه‌ها) ۱/۵



۱۷ مثلث ABC به اضلاع $AB = ۳$ ، $AC = ۵$ و $BC = ۷$ مفروض است، نیمساز داخلی زاویه A ضلع BC را در D قطع کرده است. اندازه قطعات BD، DC و طول AD را بیابید؟ ۱/۵

۱۸ در مثلث ABC شکل زیر طول پاره‌خط AP را بیابید سپس مساحت مثلث APB را محاسبه کنید. ۱/۵