فهرست

پیشگفتار معلمان i
فهرست علائم و اختصارات iii
مبانی مثلثات ۱
تعریف توابع مثلثاتی به وسیله اجزای مثلث قائم‌الزاویه ۲
خواصی از توابع مثلثاتی ۵
شما یک زاویه قائمه دارید ۷
توابع مثلثاتی و دایره واحد ۱۲
منحنی توابع مثلثاتی ۱۷
قانون سینوس های تعمیم یافته ۲۲
قضیه بطلمیوس و مساحت ۲۴
وجود، یکتایی و جایگزینی‌های مثلثاتی ۲۸
قضیه سوا ۳۵
کاربردهای دیگر از توابع مثلثاتی ۴۰
قضیه منلائوس ۴۱
قانون کسینوس ها ۴۲
کاربردهای قانون کسینوسها ۱: قضیه استوارت ۴۳

کاربردهای قانون کسینوسها ۲: فرمول هرون و فرمول براهما گوپتا ۴۵
کابردهای قانون کسینوسها ۳: نقاط بروکارد ۴۸
بردارها ۵۱
ضرب نقطه ای و شکل برداری قانون کسینوسها ۵۶
نامساوی کوشی ــ شوارتز ۵۷
رادیان و یک حد مهم ۵۸
ساخت منحنی های سینوسی با یک خط کش ۶۱
دستگاه مختصات سه بعدی ۶۳
سفر روی زمین ۶۸
در کجای زمین قرار دارید؟ ۷۰
فرمول دموآور ۷۲

مسائل مقدماتی ۷۷
مسائل پیشرفته ۸۷
پاسخ مسائل مقدماتی ۹۷
پاسخ مسائل پیشرفته ۱۳۷
تعاریف و قضایا ۲۱۱
منابعی برای مطالعه بیشتر ۲۲۳
واژه نامه ۲۲۵

مبانی مثلثات

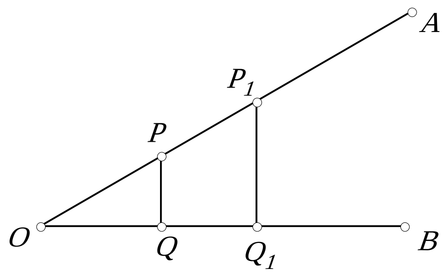
تعریف توابع مثلثاتی به وسیله اجزای مثلث قائم‌الزاویه

فرض کنید S و T دو مجموعه باشند. یک تابع (یا نگاشت) f از S به T (که به صورت $f{:}S \to T$ نوشته می‌شود) به هر عضو s از S $(s \in S)$ دقیقاً یک عضو t از T $(t \in T)$ را نسبت می‌دهد (و به صورت $f(s)=t$ نوشته می‌شود)؛ t تصویر s است. برای $S' \subseteq S$، $f(S')$ (تصویر S') را مجموعه تصاویر $s \in S'$ تحت f می‌گیریم. مجموعه S دامنه f و $f(S)$ برد f نامیده می‌شوند.

برای زاویه θ (تتا) بین 0° و 90°، توابع مثلثاتی را به منظور توصیف اندازه زاویه، تعریف می‌کنیم. فرض کنید خطوط OA و OB زاویه θ را بسازند (شکل ۱-۱). نقطه P را روی OA انتخاب کنید. فرض کنید Q پای عمود از P روی OB باشد. توابع سینوس (sin)، کسینوس (cos)، تانژانت (tan)، کتانژانت (cot)، کسکانت (csc) و سکانت (sec) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم که منظور از $|PQ|$ طول پاره خط PQ است:

$$\sin\theta = \frac{|PQ|}{|OP|} \quad , \quad \csc\theta = \frac{|OP|}{|PQ|}$$
$$\cos\theta = \frac{|OQ|}{|OP|} \quad , \quad \sec\theta = \frac{|OP|}{|OQ|}$$
$$\tan\theta = \frac{|PQ|}{|OQ|} \quad , \quad \cot\theta = \frac{|OQ|}{|PQ|}$$

در ابتدا لازم است نشان دهیم این توابع به خوبی تعریف شده‌اند یعنی فقط به اندازه θ بستگی دارند و به انتخاب P وابسته نیستند. فرض کنید $P_۱$ نقطه دیگری روی OA بوده و $Q_۱$ پای عمود از $P_۱$ روی OB باشد. واضح است که مثلث‌های قائم‌الزاویه OPQ و $OP_۱Q_۱$ متشابه هستند و لذا نسبت‌های متناظر مانند $\frac{|P_۱Q_۱|}{|OP_۱|}$ و $\frac{|PQ|}{|OP|}$ همگی مساوی هستند، بنابراین همه توابع مثلثاتی تعاریف سازگاری دارند.



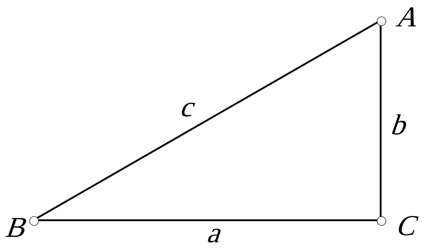
شکل ۱-۱

از تعاریف فوق می‌توان دید که $\sin\theta$، $\cos\theta$ و $\tan\theta$ به ترتیب معکوس $\csc\theta$، $\sec\theta$ و $\cot\theta$ هستند. بنابراین برای اکثر مقاصد کافی است $\sin\theta$، $\cos\theta$ و $\tan\theta$ را مورد بررسی قرار دهیم. همچنین می‌توان دید که:

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta \quad , \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

به طور قراردادی، در مثلث ABC، طول اضلاع BC، CA و AB را به ترتیب با a، b و c و زوایای CAB، ABC و BCA را به ترتیب با $\angle A$، $\angle B$ و $\angle C$ نشان می‌دهیم.

حال مثلث قائم‌الزاویه ABC با $\angle C = ۹۰^\circ$ را در نظر بگیرید (شکل ۱-۲).



شکل ۱-۲

برای اختصار $\sin \angle A$ را به صورت $\sin A$ می‌نویسیم. خواهیم داشت:

$$\sin A = \frac{a}{c} \quad , \quad \cos A = \frac{b}{c} \quad , \quad \tan A = \frac{a}{b}$$

$$\sin B = \frac{b}{c} \quad , \quad \cos B = \frac{a}{c} \quad , \quad \tan B = \frac{b}{a}$$

و

$$a = c \sin A \quad , \quad a = c \cos B \quad , \quad a = b \tan A$$

$$b = c \sin B \quad , \quad b = c \cos A \quad , \quad b = a \tan B$$

$$c = a \csc A \quad , \quad c = a \sec B \quad , \quad c = b \csc B$$

$$, \quad c = b \sec A$$

به سادگی می‌توان دید که اگر A و B دو زاویه‌ای باشند که $۰^\circ < A, B < ۹۰^\circ$ و $A + B = ۹۰^\circ$ آنگاه خواهیم داشت $\sin A = \cos B$، $\cos A = \sin B$، $\tan A = \cot B$ و $\cot A = \tan B$. در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم $a^۲ + b^۲ = c^۲$ در نتیجه:

$$(\sin A)^۲ + (\cos A)^۲ = \frac{a^۲}{c^۲} + \frac{b^۲}{c^۲} = ۱$$

نوشتن $(\sin A)^۲$ به صورت $\sin A^۲$ ممکن است موجب اشتباه شود (چرا؟). برای اختصار $(\sin A)^۲$ را به صورت $\sin^۲ A$ می‌نویسیم. نشان دادیم که برای $۰^\circ < A < ۹۰^\circ$،

$$\sin^۲ A + \cos^۲ A = ۱$$

با تقسیم طرفین رابطه فوق بر $\sin^2 A$ خواهیم داشت:

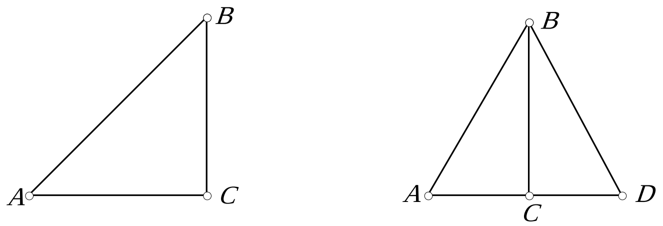
$$1+\cot^2 A=\csc^2 A \quad \text{یا} \quad \csc^2 A-\cot^2 A=1$$

به طور مشابه داریم:

$$\tan^2 A+1=\sec^2 A \quad \text{یا} \quad \sec^2 A-\tan^2 A=1$$

حال چند زاویه خاص را بررسی می‌کنیم.

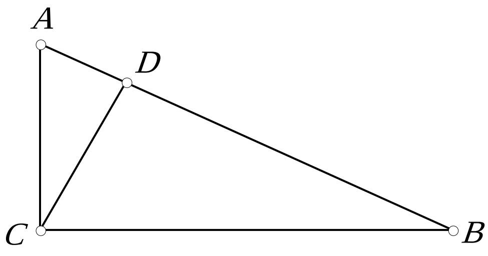
در مثلث ABC فرض کنید $\angle A=\angle B=45^\circ$ و لذا $|AC|=|BC|$ (شکل ۱-۳ چپ). بنابراین $c^2=a^2+b^2=2a^2$ و $\sin 45^\circ=\sin A=\frac{a}{c}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. به همین ترتیب داریم: $\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cot 45^\circ=\tan 45^\circ=1$.



شکل ۱-۳

در مثلث ABC فرض کنید $\angle A=60^\circ$ و $\angle B=30^\circ$ (شکل ۱-۳ راست). قرینه A نسبت به خط BC را D می‌نامیم. از تقارن $\angle D=60^\circ$ بوده و مثلث ABD متساوی‌الاضلاع است. بنابراین $|AD|=|AB|$ و $|AC|=\frac{|AD|}{2}$. چون ABC، قائم‌الزاویه است $|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$. بنابراین داریم $|BC|^2=|AB|^2-\frac{|AB|^2}{4}=\frac{3|AB|^2}{4}$ یا $|BC|=\frac{\sqrt{3}|AB|}{2}$. به این ترتیب $\sin 60^\circ=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\sin 30^\circ=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ ، $\tan 30^\circ=\cot 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $\tan 60^\circ=\cot 30^\circ=\sqrt{3}$.

برای اینکه خواننده با توابع مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه بیشتر آشنا شود یک تمرین ارائه می‌کنیم. در مثلث ABC (شکل ۱-۴) $\angle BCA=90^\circ$ و D پای عمود از C روی AB است. می‌دانیم که $|AB|=x$ و $\angle A=\theta$. طول پاره خط‌ها در شکل ۱-۴ را بر حسب θ, x بیان کنید.



شکل ۱-۴

خواصی از توابع مثلثاتی

برای دو زاویه α (آلفا) و β (بتا) با شرط $\alpha,\beta > 0^\circ$ و $\alpha+\beta < 90^\circ$ به سادگی می‌توان دید که توابع مثلثاتی قانون توزیع جمعی را برآورده نمی‌کند یعنی روابط $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ و $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$ صحیح نیستند. برای مثال با قرار دادن $\alpha=\beta=30^\circ$ داریم $\cos(\alpha+\beta)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ که با $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos 30^\circ=\sqrt{3}$ برابر نیست. طبیعی است که از خود بپرسیم $\sin\alpha$، $\sin\beta$ و $\sin(\alpha+\beta)$ چه رابطه‌ای با یکدیگر دارند.

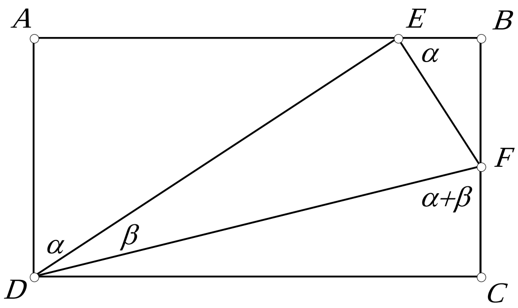
شکل ۱-۵ را در نظر بگیرید، فرض کنید DEF یک مثلث قائم‌الزاویه بوده که $\angle DEF=90^\circ$، $\angle FDE=\beta$ و $|DF|=1$ و در مستطیل $ABCD$ محاط باشد (این کار را همیشه می‌توان به روش زیر انجام داد. خط l_1 را خارج مثلث DEF چنان رسم می‌کنیم که از D گذشته و زاویه بین l_1 و DE یک زاویه حاده برابر با α باشد. خط l_2 را عمود بر l_1 و گذران از D رسم می‌کنیم. A پای عمود از E بر l_1 است. پای عمود از F روی l_2 نیز نقطه C است. نقطه B محل تقاطع خطوط AE و CF خواهد بود).

طول پاره‌خط‌های داخل این مستطیل را محاسبه می‌کنیم. در مثلث DEF داریم $|DE|=|DF|.\cos\beta=\cos\beta$ و $|EF|=|DF|.\sin\beta=\sin\beta$ و در مثلث ADE، $|AD|=|DE|.\cos\alpha=\cos\alpha\cos\beta$ و $|AE|=|DE|.\sin\alpha=\sin\alpha\cos\beta$. از آنجا که $\angle DEF=90^\circ$ در نتیجه $\angle AED+\angle ADE=90^\circ=\angle AED+\angle BEF$ و بنابراین

$\angle BEF = \angle ADE = \alpha$ (می‌توان مشاهده کرد که مثلث‌های ADE و BEF با یکدیگر متشابه هستند.) در مثلث BEF داریم

$$|BF| = |EF|.\sin\alpha = \sin\alpha\sin\beta \quad \text{و} \quad |BE| = |EF|.\cos\alpha = \cos\alpha\sin\beta$$

از $AD \parallel BC$، $\angle DFC = \angle ADF = \alpha+\beta$. در مثلث قائم‌الزاویه CDF داریم $|CD| = |DF|.\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta)$ و $|CF| = |DF|.\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta)$.



شکل ۱-۵

از مباحث فوق نتیجه می‌گیریم که

$$\cos\alpha\cos\beta = |AD| = |BC| = |BF| + |FC| = \sin\alpha\sin\beta + \cos(\alpha+\beta)$$

و به موجب آن

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

به طور مشابه داریم

$$\sin(\alpha+\beta) = |CD| = |AB| = |AE| + |EB| = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

یعنی

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

از تعریف تابع تانژانت بدست می‌آید که

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

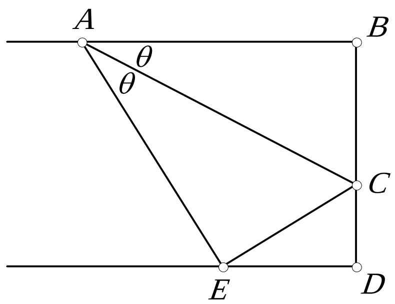
به این ترتیب **فرمولهای جمع** برای توابع سینوس، کسینوس و تانژانت برای زوایای محدود در یک بازه بدست آمدند به روش مشابه می‌توان فرمولهای جمع را برای تابع کتانژانت نیز بدست آورد که ما آن را به عنوان تمرین باقی می‌گذاریم.

با قرار دادن $\alpha = \beta$ در فرمول جمع، **فرمولهای زوایای دو برابر** را بدست می‌آوریم.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad , \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \quad , \quad \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

که برای اختصار $\sin(2\alpha)$ را به صورت $\sin 2\alpha$ نوشته‌ایم. با قرار دادن $\beta = 2\alpha$ در فرمولهای جمع می‌توان **فرمولهای زوایای سه برابر** را بدست آورد. به خوانندگان پیشنهاد می‌کنیم که شکلهای متنوع فرمولهای زوایای دو برابر و سه برابر که در فهرست تعاریف و قضایا در انتهای این کتاب لیست شده است را خود بدست آورند.

شما یک زاویه قائمه دارید



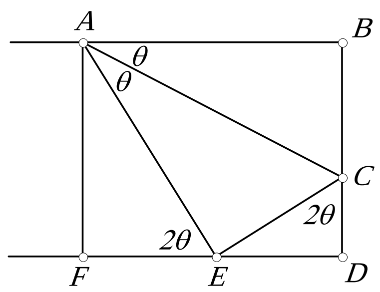
شکل ۱-۶

با توجه به تعریف توابع مثلثاتی مناسبتر است که با توابع مثلثاتی در مثلث‌های قائم‌الزاویه کار کنیم. در اینجا سه مثال می‌آوریم.

مثال ۱-۱: شکل ۱-۶ یک نوار مستطیل شکل طولانی کاغذ را نشان می دهد که یک گوشه آن در امتداد خط AC چنان تا شده است که روی لبه مقابل قرار گرفته و زاویه θ را ساخته است ($\angle CAB$ در شکل ۱-۶). اگر عرض نوار w اینچ باشد طول پاره خط AC را بر حسب w و θ بدست آورید. (فرض می کنیم که θ بین ۰° و ۴۵° است لذا شکل ۱-۶ با واقعیت جور در می آید)

حال دو راه حل برای آن ارائه می کنیم.

پاسخ اول: در مثلث قائم الزاویه ABC داریم $|BC| = |AC|\sin\theta$. در مثلث قائم الزاویه AEC داریم $|CE| = |AC|\sin\theta$ (بعد از تا کردن، مثلث های ABC و AEC همنهشت هستند.) چون $\angle BCA = \angle ECA = \text{۹۰}^\circ - \theta$ در نتیجه $\angle BCE = \text{۱۸۰}^\circ - \text{۲}\theta$ و $\angle DCE = \text{۲}\theta$ (شکل ۱-۷).



شکل ۱-۷

در مثلث قائم الزاویه CDE، $|CD| = |CE|\cos\text{۲}\theta$. با کنار هم قرار دادن نتایج فوق داریم

$$w = |BD| = |BC| + |CD| = |AC|\sin\theta + |AC|\sin\theta\cos\text{۲}\theta$$

و از آنجا

$$|AC| = \frac{w}{\sin\theta(\text{۱} + \cos\text{۲}\theta)}$$

پاسخ دوم: F را پای عمود از A روی ضلع مقابل می گیریم. در مثلث قائم الزاویه AEF، $\angle AEF = \text{۲}\theta$ و $|AF| = w$ بنابراین $|AF| = |AE|\sin\text{۲}\theta$ و یا $|AE| = \frac{w}{\sin\text{۲}\theta}$. در مثلث قائم الزاویه AEC، $\angle CAE = \angle CAB = \theta$ و $|AE| = |AC|\cos\theta$. بنابراین

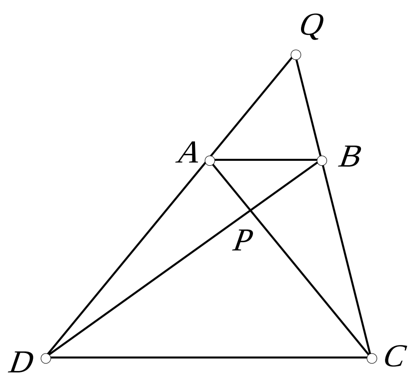
$$|AC|=\frac{|AE|}{\cos\theta}=\frac{w}{\sin ۲\theta\cos\theta}$$

با در نظر گرفتن این دو جواب داریم:

$$|AC|=\frac{w}{\sin\theta(۱+\cos ۲\theta)}=\frac{w}{\sin ۲\theta\cos\theta}$$

یا $\sin\theta(۱+\cos ۲\theta)=\sin ۲\theta\cos\theta$ خوانندگان علاقمند می توانند از فرمولهایی که قبلا بدست آوردیم برای اثبات تساوی فوق استفاده کنند.

مثال ۱-۲: در ذوزنقه $ABCD$ (شکل ۱-۸) $AB \parallel CD$، $|AB|=۴$ و $|CD|=۱۰$. فرض کنید زاویه بین خطوط AC و BD قائمه باشد و تقاطع خطوط BC و DA در نقطه Q زاویه ۴۵° بسازد. $[ABCD]$، مساحت ذوزنقه $ABCD$ را حساب کنید.



شکل ۱-۸

پاسخ: تقاطع AC و BD را P می نامیم. چون $AB \parallel CD$ است مثلثهای ABP و CDP با نسبت $\frac{|AB|}{|CD|}=\frac{۲}{۵}$ متشابه هستند. قرار می دهیم $|AP|=۲x$ و $|BP|=۲y$. بنابراین $|CP|=۵x$ و $|DP|=۵y$. چون $\angle APB=۹۰^\circ$، $[ABCD]=\frac{۱}{۲}|AC|.|BD|=\frac{۴۹xy}{۲}$. (برای اثبات این مطلب محاسبات زیر را بررسی کنید)

$$[ABCD]=[ABD]+[CBD]=\frac{۱}{۲}|AP|.|BD|+\frac{۱}{۲}|CP|.|BD|=\frac{۱}{۲}|AC|.|BD|$$

قرار دهید $\alpha = \angle ADP$ و $\beta = \angle BCP$. در مثلث قائم الزاویه ADP و BCP داریم:

$$\tan\alpha = \frac{|AP|}{|DP|} = \frac{۲x}{۵y} \quad \text{و} \quad \tan\beta = \frac{|BP|}{|CP|} = \frac{۲y}{۵x}$$

از $\angle CPD = \angle CQD + \angle QCP + \angle QDP$ نتیجه می گیریم که $\alpha + \beta = \angle QCP + \angle QDP = ۴۵^\circ$ و از فرمول های جمع خواهیم داشت:

$$۱ = \tan ۴۵^\circ = \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{۱ - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{۲x}{۵y} + \frac{۲y}{۵x}}{۱ - \frac{۲x}{۵y}\frac{۲y}{۵x}} = \frac{۱۰(x^۲ + y^۲)}{۲۱xy}$$

و از آنجا

$$xy = \frac{۱۰(x^۲ + y^۲)}{۲۱}$$

در مثلث ABP داریم $|AB|^۲ = |AP|^۲ + |BP|^۲$ یا $۱۶ = ۴(x^۲ + y^۲)$. بنابراین $x^۲ + y^۲ = ۴$ و $xy = \frac{۴۰}{۲۱}$. در نتیجه

$$[ABCD] = \frac{۴۹xy}{۲} = \frac{۴۹}{۲}\cdot\frac{۴۰}{۲۱} = \frac{۱۴۰}{۳}$$

مثال ۱-۳: [$AMC12$ ۲۰۰۴] در مثلث ABC، $|AB| = |AC|$ (شکل ۱-۹). نقاط D و E روی ضلع BC چنان قرار دارند که $|BD| = |DC|$ و $|BE| > |CE|$. فرض کنید $\tan\angle EAC$، $\tan\angle EAD$ و $\tan\angle EAB$ تشکیل یک تصاعد هندسی دهند و $\cot\angle DAE$، $\cot\angle CAE$ و $\cot\angle DAB$ یک تصاعد حسابی باشند. اگر $|AE| = ۱۰$ مساحت مثلث ABC، $[ABC]$، را حساب کنید.

پاسخ: مثلث های قائم الزاویه ABD، ACD و ADE را مورد بررسی قرار می دهیم. قرار دهید $\alpha = \angle EAD$ و $\beta = \angle BAD = \angle DAC$. پس $\angle EAC = \alpha - \beta$ و $\angle EAB = \alpha + \beta$. چون $\tan\angle EAC$، $\tan\angle EAD$ و $\tan\angle EAB$ یک تصاعد هندسی هستند لذا:

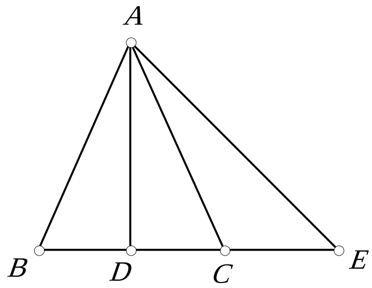
$$\tan^۲\alpha = \tan^۲\angle EAD = \tan\angle EAC\,\tan\angle EAB = \tan(\alpha-\beta)\tan(\alpha+\beta)$$

از فرمول جمع خواهیم داشت

$$\tan^۲\alpha=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}\cdot\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\tan^۲\alpha-\tan^۲\beta}{۱-\tan^۲\alpha\tan^۲\beta}$$

یا

$$\tan^۲\alpha-\tan^۴\alpha\tan^۲\beta=\tan^۲\alpha-\tan^۲\beta$$



شکل ۱-۹

بنابراین $\tan^۴\alpha\tan^۲\beta=\tan^۲\beta$ و لذا $\tan\alpha=۱$ یا $\alpha=۴۵^\circ$ (از این حقیقت استفاده کردیم که $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ هر دو مثبت هستند زیرا $۰^\circ<\alpha,\beta<۹۰^\circ$). بنابراین ADE یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است و $|AD|=|DE|=\frac{|AE|}{\sqrt{۲}}=۵\sqrt{۲}$. در مثلث قائم الزاویه ACD، $|DC|=|AD|\tan\beta$ و لذا

$$[ABC]=|AD|\cdot|CD|=|AD|^۲\tan\beta=۵۰\tan\beta$$

چون $\cot\angle DAE=\cot۴۵^\circ=۱$، $\cot\angle CAE$ و $\cot\angle DAB$ یک تصاعد حسابی هستند در نتیجه

$$۲\cot(۴۵^\circ-\beta)=۲\cot\angle CAE=\cot\angle DAE+\cot\angle DAB=۱+\cot\beta$$

با قرار دادن $۴۵^\circ-\beta=\delta$ در معادله فوق داریم $۲\cot\delta=۱+\cot\beta$. با توجه به اینکه $۰^\circ<\beta,\delta<۴۵^\circ$ با اعمال فرمول جمع خواهیم داشت

$$۱=\cot۴۵^\circ=\cot(\beta+\delta)=\frac{\cot\beta\cot\delta-۱}{\cot\beta+\cot\delta}$$

یا $\cot\beta+\cot\delta=\cot\beta\cot\delta-1$. با حل دستگاه معادلات

$$\begin{cases}2\cot\delta=1+\cot\beta\\ \cot\beta+\cot\delta=\cot\beta\cot\delta-1\end{cases}\quad \text{یا} \quad \begin{cases}2\cot\delta=\cot\beta+1\\ \cot\delta(\cot\beta-1)=\cot\beta+1\end{cases}$$

برای $\cot\beta$ بدست می آید که $(\cot\beta+1)(\cot\beta-1)=2(\cot\beta+1)$ و در نتیجه

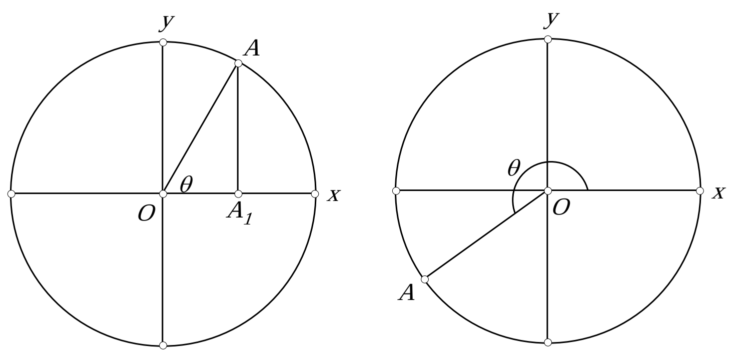
$$\cot^2\beta-2\cot\beta-3=0$$

با تجزیه این معادله به صورت $(\cot\beta-3)(\cot\beta+1)=0$، $\cot\beta=3$ بوده و $[ABC]=50\cdot\tan\beta=\frac{50}{3}$.

البته راه حل فوق را می توان با استفاده از **فرمولهای تفریق** که به زودی بدست خواهند آمد، ساده تر کرد.

توابع مثلثاتی و دایره واحد

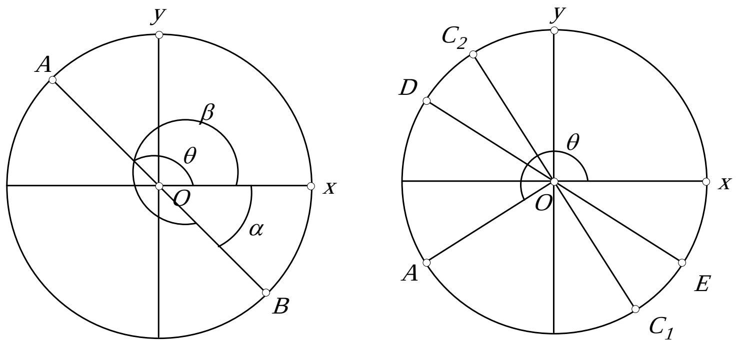
ω را بیانگر دایره واحد (دایره به شعاع ۱) در نظر بگیرید که مرکز آن در نقطه $O=(0,0)$ قرار دارد. فرض کنید A نقطه‌ای روی ω در ربع اول باشد و θ را برابر زاویه حاده‌ای بگیرید که بین خط OA و محور x شکل می‌گیرد (شکل ۱-۱۰). فرض کنید A_1 پای عمود از A روی محور x باشد. در مثلث قائم الزاویه AA_1O، $|OA|=1$، $|AA_1|=\sin\theta$ و $|OA_1|=\cos\theta$ بنابراین $A=(\cos\theta,\sin\theta)$.



شکل ۱-۱۰

در صفحه مختصات **زاویه استاندارد** (یا **زاویه قطبی**) زاویه‌ای است که بین خط l، که از مرکز می گذرد، و بخش مثبت محور xها شکل می گیرد بطوریکه بخش مثبت محور xها می توانـد دوران یافته، تا بر l منطبق شود. زاویه استاندارد به طرق مختلفی ممکن اسـت تعریـف شـود،زیرا راه هـای گوناگونی وجود دارد تا بخش مثبت محور xها با دوران بـر l منطبـق شـود. یعنـی زاویـه اسـتاندارد $\theta_1 = x°$ با زاویه استاندارد $\theta_2 = x° + 360°k$ برای تمام مقادیر صحیح k معادل است. برای مثال زاویـه اسـتاندارد $180°$ معـادل بـا همـه زوایـای اسـتاندارد $\ldots, +900°, +540°, -180°, -540°, -900°, \ldots$ است. به این ترتیب یک زاویه استاندارد، زاویـه‌ای جهت دار است. طبق قرارداد یک زاویه مثبت، دوران محور x خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت را نشان می‌دهد در حالیکه یک زاویه استاندارد منفی، بیانگر چرخش محور x در جهت حرکت عقربه های ساعت است.

ما همچنین می توانیم زاویه استاندارد **اصلی** را برای زاویه‌ای که بین دو خط در صفحه تشـکیل شده است برابر کوچکترین مقدار زاویه ای که لازم است تا یک خط با دوران در خلاف جهت عقربـه های ساعت بر خط دیگر منطبق شود تعریف کنیم. توجه کنید کـه ایـن زاویـه همیشـه بزرگتـر یـا مساوی $0°$ و کوچکتر یا مساوی $180°$ است.



شکل ۱-۱۱

برای نقطه A در صفحه، می توان موقعیت A (نسبت به مرکـز) را بـا فاصـله $r = |OA|$ و زاویـه استاندارد θ که بین خط OA و محور xها ایجاد می شود، تشریح کرد. این مختصـات، **مختصـات قطبی** نامیده شده و به شکل $A = (r, \theta)$ نوشته می‌شود (توجه کنیـد کـه مختصـات قطبـی یـک نقطه منحصر به فرد نیست).

در حالت کلی برای هر زاویه θ، مقادیر $\sin\theta$ و $\cos\theta$ را به عنوان مختصات نقطه روی دایره واحد تعریف می کنیم. برای هر θ یک نقطه یکتای $A=(x_\circ, y_\circ)$ (در مختصات مستطیلی) روی دایره واحد ω وجود دارد بطوریکه $A=(۱,\theta)$ (در مختصات قطبی). تعریف می کنیم $\cos\theta = x_\circ$ و $\sin\theta = y_\circ$ یعنی $A=(\cos\theta, \sin\theta)$ اگر و فقط اگر $A=(۱,\theta)$ در مختصات قطبی.

از تعریف توابع سینوس و کسینوس واضح است که برای همه اعداد صحیح k، $\sin(\theta + ۳۶۰^\circ k) = \sin\theta$ و $\cos(\theta + ۳۶۰^\circ k) = \cos\theta$ یعنی آنها توابع متناوب با دوره تناوب ۳۶۰° هستند. برای $\theta \neq (۲k+۱)\times ۹۰^\circ$، $\tan\theta$ به صورت $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ و برای $\theta \neq k\times ۱۸۰^\circ$، $\cot\theta$ به صورت $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ تعریف می شود. به سادگی می توان دید که $\tan\theta$ برابر شیب خطی است که با محور xها زاویه استاندارد θ را می سازد.

فرض کنید $A=(\cos\theta, \sin\theta)$. B را نقطه‌ای روی ω بگیرید که رأس مقابل قطری باشد که از A می گذرد. بنابراین $B=(۱,\theta-۱۸۰^\circ)=(۱,\theta+۱۸۰^\circ)$. چون A و B نسبت به مرکز قرینه هستند لذا $B=(-\cos\theta, -\sin\theta)$

$$\sin(\theta \pm ۱۸۰^\circ) = -\sin\theta \quad , \quad \cos(\theta \pm ۱۸۰) = -\cos\theta$$

به سادگی می توان دید که هر دو تابع $\tan\theta$ و $\cot\theta$، توابعی با دوره تناوب ۱۸۰° هستند. بطور مشابه با دوران نقطه A حول مبدا به اندازه ۹۰° در خلاف جهت عقربه های ساعت (به نقطه $C_۱$ در شکل ۱-۱۱)، در جهت عقربه های ساعت (به نقطه $C_۲$). قرینه نسبت به محور x (به نقطه D) و قرینه نسبت به محور y (به نقطه E) می‌توان نشان داد که

$$\sin(\theta + ۹۰^\circ) = \cos\theta \quad ، \quad \cos(\theta + ۹۰) = -\sin\theta$$
$$\sin(\theta - ۹۰^\circ) = -\cos\theta \quad ، \quad \cos(\theta - ۹۰^\circ) = \sin\theta$$
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \quad ، \quad \cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\sin(۱۸۰^\circ - \theta) = \sin\theta \quad ، \quad \cos(۱۸۰^\circ - \theta) = -\cos\theta$$

علاوه بر آن با قرینه A نسبت به خط $y=x$ و یا با استفاده از فرمول های دوم و سوم بالا می توان نشان داد که $\sin(۹۰^\circ - \theta) = \cos\theta$ و $\cos(۹۰^\circ - \theta) = \sin\theta$. این مطلب دلیل این نامگذاری برای تابع "کسینوس" است: "کسینوس" متمم[1] سینوس است، چون زوایای θ و $۹۰^\circ - \theta$ متمم هم هستند. تمام این خواص مهم و جذاب مثلثاتی بر مبنای خواص هندسی دایره واحد می باشد.

complement [1]

پیشتر فرمول‌های جمع و تفریق را برای زوایای α و β با شرایط $0^\circ < \alpha, \beta < 90^\circ$ و $\alpha + \beta < 90^\circ$ بدست آوردیم. با توجه به تعریف جامع توابع مثلثاتی می‌توان این فرمول ها را به همه زوایا تعمیم داد. برای مثال با فرض اینکه α و β دو زاویه با شرط $0^\circ \le \alpha, \beta < 90^\circ$ و $\alpha + \beta > 90^\circ$ باشند قرار می دهیم $\alpha' = 90^\circ - \alpha$ و $\beta' = 90^\circ - \beta$. سپس α' و β' زوایایی بین 0° و 90° هستند که جمع‌شان کمتر از 90° است. با فرمول جمع که قبلا بدست آوردیم خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\left[180^\circ - (\alpha'+\beta')\right] = -\cos(\alpha'+\beta') \\
&= -\cos\alpha'\cos\beta' + \sin\alpha'\sin\beta' \\
&= -\cos(90^\circ - \alpha')\cos(90^\circ - \beta') + \sin(90^\circ - \alpha')\sin(90^\circ - \beta') \\
&= -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \\
&= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

بنابراین فرمول جمع برای تابع کسینوس برای زوایای α و β با شرط $0^\circ \le \alpha, \beta < 90^\circ$ و $\alpha + \beta > 90^\circ$ نیز برقرار است. بطور مشابه می توان نشان داد که همه فرمول های جمع که قبلا بدست آمدند برای همه زوایای α و β برقرار است. علاوه بر آن می‌توان **فرمولهای تفریق** را به صورت زیر اثبات کرد

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\
\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}$$

این فرمولها را **فرمولهای جمع و تفریق** می نامیم. شکلهای مختلف **فرمولهای زوایای دو برابر** و **سه برابر** حالات خاصی از فرمولهای جمع و تفریق هستند. فرمولهای دو برابر منجر به شکلهای متنوع **فرمولهای نصف زاویه** می‌شود. همچنین می‌توان **فرمولهای ضرب به جمع** را از فرمولهای جمع و تفریق بدست آورد که ما آن را به خواننده می سپاریم. برای زوایای α و β از فرمولهای جمع و تفریق داریم:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
&= \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
&\quad + \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}$$

$$=۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}$$

که یکی از **فرمولهای جمع به ضرب** است. بطور مشابه می توان شکلهای مختلف فرمولهـای جمـع به ضرب و **تفریق به ضرب** را بدست آورد.

مثال ۱-۱۴: فرض کنید a و b اعداد حقیقی نامنفی باشند.

(آ) ثابت کنید عـدد حقیقـی x وجـود دارد بطوریکـه $\sin x + a\cos x = b$ اگـر و فقـط اگـر $a^۲ - b^۲ + ۱ \geq ۰$.

(ب) اگر $\sin x + a\cos x = b$ باشد عبارت $|a\sin x - \cos x|$ را بر حسب a و b بیان کنید.

پاسخ: برای قسمت (آ) نتیجه کلی تری را اثبات می کنیم.

(آ) فرض کنید m ، n و l اعداد حقیقی باشند که $m^۲ + n^۲ \neq ۰$. ثابت می کنیم عدد حقیقی x وجود دارد که

$$m\sin x + n\cos x = l \qquad (※)$$

اگر و فقط اگر $m^۲ + n^۲ \geq l^۲$.

معادله (※) را می توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{m}{\sqrt{m^۲+n^۲}}\sin x + \frac{n}{\sqrt{m^۲+n^۲}}\cos x = \frac{l}{\sqrt{m^۲+n^۲}}$$

نقطـه $\left(\frac{m}{\sqrt{m^۲+n^۲}}, \frac{n}{\sqrt{m^۲+n^۲}}\right)$ روی دایـره واحـد قـرار دارد. عـدد حقیقـی یکتـای α بـا شـرط $۰ \leq \alpha \leq ۲\pi$ وجود دارد که

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^۲+n^۲}} \quad \text{و} \quad \sin\alpha = \frac{n}{\sqrt{m^۲+n^۲}}$$

با توجه به فرمولهای جمع و تفریق داریم

$$\sin(x+\alpha) = \cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x = \frac{l}{\sqrt{m^۲+n^۲}}$$

که برای x قابل حل است اگر و فقط اگر $-1 \le \frac{l}{\sqrt{m^2+n^2}} \le 1$ یا به عبارت دیگر اگر و فقـط اگـر $l^2 \le m^2 + n^2$ باشد. با قرار دادن $m = 1$، $n = a$ و $l = b$ نتیجه دلخواه بدست می آید.

(ب) از روابط

$$\begin{aligned} a^2 + 1 &= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(a^2 + 1\right) \\ &= \left(\sin^2 x + 2a\sin x \cos x + a^2\cos^2 x\right) \\ &\quad + \left(a^2\sin^2 x - 2a\sin x \cos x + \cos^2 x\right) \\ &= \left(\sin x + a\cos x\right)^2 + \left(a\sin x - \cos x\right)^2 \end{aligned}$$

نتیجه می گیریم که $\left|a\sin x - \cos x\right| = \sqrt{a^2 - b^2 + 1}$.

منحنی توابع مثلثاتی

واحد اعداد روی محور x را، درجه قرار می دهیم. نمـودار $y = \sin x$ چنانچـه در شـکل ۱-۱۲ نشان داده شده است مانند یک موج است. (این فقط قسـمتی از منحنـی اسـت. منحنـی در هـر دو جهت در طـول محـور xهـا تـا بـی نهایـت ادامـه دارد) بـرای مثـال نقطـه $A = (1.x^\circ)$ بـا نقطـه $A_1 = \left(x, \sin x\right)$ روی منحنی $y = \sin x$ متناظر است. اگر دو نقطه B_1 و C_1 در جهت محور x ، 360° از یکدیگر فاصله داشته باشند آنگاه مقدار y هر دوی آنها یکسان اسـت و هـر دو بـا نقطـه $B = C$ روی دایــره واحــد متنــاظر هســتند. (ایــن موضــوع بــه دلیــل برقــراری رابطــه $\sin\left(x + 360^\circ\right) = \sin x$ می باشد). علاوه بر آن منحنی نسبت به خـط $x = 90^\circ$ متقـارن اسـت (ایــن موضــوع بــه دلیــل برقــراری رابطــه $\sin\left(90^\circ - x\right) = \sin\left(90^\circ + x\right)$ اســت) رابطــه $\sin\left(-x^\circ\right) = -\sin x^\circ$ نشان می‌دهد کـه منحنـی $y = \sin x$ نسـبت بـه مبـدا متقـارن بـوده و سینوس یک تابع فرد است.