فهرست

	درسنامه و سؤالات	پاسخ	FILM
فصل اول: جبر و معادله	۶ تا ۳۴	۱۰۸	132 min
فصل دوم: تابع	۳۵ تا ۵۵	۱۳۲	92 min
فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی	۵۶ تا ۶۹	۱۴۵	26 min
فصل چهارم: مثلثات	۷۰ تا ۸۳	۱۵۷	30 min
فصل پنجم: حد و پیوستگی	۸۴ تا ۱۰۵	۱۷۰	27 min

نمونه سؤال امتحانی

آزمون ۱	۱۸۸
آزمون ۲	۱۸۸
آزمون ۳	۱۸۹
آزمون ۴	۱۹۰
پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون ۱ تا ۴	۱۹۲

بارم‌بندی درس حسابان ۱

شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم	شهریور / دی
اول	۱۰	۴	۴
دوم	۸	۳	۴
سوم	۲ (تا آخر درس ۱ از فصل ۳، صفحهٔ ۷۹)	۳	۳
چهارم	-	۴	۴
پنجم	-	۶	۵
جمع	۲۰	۲۰	۲۰

بخش ۱

درسنامه

و سؤالات تشریحی

فصل اول

۱ جبر و معادله

بهترین جمله‌ای که در مورد این فصل می‌توان گفت، این است که: «پلی است از گذشته به آینده»
درواقع این فصل و حتی می‌توان گفت کتاب حسابان (۱) ارتباطی بین دانش گذشته و بخصوص مطالب ریاضی دهم و مطالب پیش رو در سال آینده و کتاب حسابان دوازدهم است.
از یک طرف با تکمیل آموخته‌های سال‌های قبل شما را به سطح خوبی از دانش حسابان می‌رساند و از طرف دیگر شما را برای مواجهه با مطالب جدی‌تر آماده می‌کند.
با نگاهی به فهرست مطالب فصل اول، خیلی زود در می‌یابید که این فصل آش شله‌قلم‌کاری است که در همین ابتدا می‌خواهد مطالب جامانده و مقدمات لازم را به سمع و نظر شما برساند و همین جاست که اهمیّت این فصل را بر همگان آشکار می‌سازد.
از این فصل، ۱۰ نمره در نوبت اول و ۴ نمره در نوبت دوم و شهریور سؤال طرح می‌شود.

فیلم شب امتحان

برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-code های مقابل را اسکن کنید.

بستهٔ ۷	بسته‌های ۵ و ۶	بسته‌های ۳ و ۴	بسته‌های ۱ و ۲

بستهٔ اول

مجموع جملات دنبالهٔ حسابی

صفحه ۲ تا ۴ کتاب درسی

این کتاب و این فصل رو با دنباله‌ها شروع می‌کنیم، باشد که این شروع فال نیکی برای ادامهٔ داستان حسابان شود.

یادآوری از دنباله‌های حسابی

اگر از سال گذشته به یاد داشته باشید، جملات دنباله‌های حسابی از جمع عددی ثابت با جملهٔ قبل آن، به‌دست می‌آیند:

$$a_1, \underbrace{a_1+d}_{a_2}, \underbrace{a_1+2d}_{a_3}, \underbrace{a_1+3d}_{a_4}, \cdots \Rightarrow \boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

(a_n، جملهٔ عمومی و d، قدرنسبت دنباله می‌باشد.)

بنابراین اختلاف هردو جملهٔ متوالی در دنباله‌های حسابی، برابر با قدرنسبت دنباله است:

$$a_n - a_{n-1} = d \Rightarrow \boxed{a_n - a_m = (n-m)d}$$

نکته اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی از دنبالهٔ حسابی باشند، b واسطهٔ حسابی بین a و c است و در نتیجه:

$$b = \frac{a+c}{2} \text{ یا } 2b = a+c$$

سؤال مقدار a را از دنبالهٔ حسابی $-1, a, 5, \ldots$ بیابید. سپس قدرنسبت این دنباله را به‌دست آورید.

پاسخ

$$-1, a, 5, \ldots \xrightarrow{\text{دنبالهٔ حسابی}} 2a = (-1)+5 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{2} = 2 \;,\; d = a_2 - a_1 = 2-(-1) = 3$$

حالا که دنباله‌های حسابی خوب یادتون اومد، بریم که جمله‌های این دنباله‌ها رو با هم جمع کنیم ببینیم چی دستگیرمون می‌شه.

مجموع جملات دنباله‌های حسابی

برای پیداکردن مجموع n عدد طبیعی متوالی اولیه یعنی $1+2+3+\dots+n$، جناب گاوس یک ابتکار به خرج دادند و به روش زیر، این حاصل جمع را محاسبه کردند:

$$\begin{array}{l} 1 \quad + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \cdots + \quad n \\ +(n \quad + (n-1) + (n-2) + \cdots + \quad 1) \\ \hline \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{\text{تا } n} = n(n+1) \Rightarrow 2(1+2+\cdots+n) = n(n+1) \end{array}$$

و در نتیجه داریم:

$$\boxed{1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

سؤال مجموع چه تعداد از اعداد طبیعی اولیه، برابر با ۲۱۰ می‌گردد؟

پاسخ

$$1+2+3+\cdots+n = 210 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 210 \Rightarrow n(n+1) = 420 \Rightarrow n(n+1) = 20 \times 21 \Rightarrow n = 20$$

حالا می‌توانیم از همین ابتکار الگو بگیریم و مجموع n جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1 و جملهٔ nام، a_n را پیداکنیم:

$$\begin{array}{l} S_n = \quad a_1 \quad + \overbrace{(a_1 + d)}^{a_2} + \overbrace{(a_1 + 2d)}^{a_3} + \cdots + \overbrace{(a_1 + (n-2)d)}^{a_{n-1}} + \overbrace{(a_1 + (n-1)d)}^{a_n} \\ \quad\quad (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-3)d) + \cdots + (a_1 + d) + a_1 = S_n \end{array}$$

با جمع کردن دو رابطهٔ بالا داریم:

$$\xrightarrow{+} 2S_n = \underbrace{(2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d) + \cdots + (2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d)}_{\text{تا } n}$$

$$\Rightarrow 2S_n = n(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow \boxed{S_n = a_1 + \cdots + a_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}}$$

و در نتیجه اگر از فرمول جملهٔ nاُم دنبالهٔ حسابی یعنی $a_n = a_1 + (n-1)d$ کمک بگیریم، داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + \overbrace{(a_1 + (n-1)d)}^{a_n}) \Rightarrow \boxed{S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}}$$

سؤال مجموع چند جملهٔ اول از دنبالهٔ حسابی ۱۲,۹,۶,... برابر صفر است؟

پاسخ با یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d = -3$ مواجهیم، پس داریم:

$$S_n = 0 \Rightarrow \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2} = 0 \xrightarrow[d=-3]{a_1=12} n(2(12) + (n-1)(-3)) = 0 \Rightarrow 24 - 3n + 3 = 0 \Rightarrow 3n = 27 \Rightarrow n = 9$$

بنابراین مجموع ۹ جملهٔ اول این دنبالهٔ حسابی برابر صفر است.

سؤال در یک دنبالهٔ حسابی اگر $a_{12} + a_9 = 15$ باشد، مجموع ۲۰ جملهٔ اول این دنباله را بیابید.

پاسخ

$$a_{12} + a_9 = (a_1 + 11d) + (a_1 + 8d) = 2a_1 + 19d \Rightarrow 2a_1 + 19d = 15 \quad (*)$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) \overset{(*)}{=} 10(15) = 150$$

نکته اگر S_n مجموع n جملهٔ اولیه دنباله‌ی حسابی a_n باشد، داریم:

۱) $a_1 = S_1$

۲) $S_n - S_{n-1} = a_n$

زیرا:

$$S_n - S_{n-1} = (a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + \cdots + a_{n-1}) = a_n$$

سؤال اگر مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی از فرمول $S_n = 5n^2 + 3n$ به‌دست آید، قدرنسبت و جملهٔ عمومی دنباله را بیابید.

پاسخ

$a_1 = S_1 = 5(1)^2 + 3(1) = 8 \quad , \quad S_2 = a_1 + a_2 = 5(2)^2 + 3(2) = 20 + 6 = 26$

$a_2 = S_2 - S_1 = 26 - 8 = 18 \Rightarrow d = a_2 - a_1 = 18 - 8 = 10$

با یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d = 10$ مواجهیم، پس داریم:

$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = 8 + 10(n-1) = 10n - 2$

توجه کنید که جملهٔ عمومی دنباله را به طور مستقیم از فرمول S_n هم می‌توانستیم بیابیم:

$a_n = S_n - S_{n-1} = 5n^2 + 3n - (5(n-1)^2 + 3(n-1))$

$= 5n^2 + 3n - (5n^2 - 10n + 5 + 3n - 3) = 5n^2 + 3n - 5n^2 + 10n - 5 - 3n + 3 = 10n - 2 \Rightarrow a_n = 10n - 2$

سؤال مجموع اعداد دو رقمی مضرب ۶ را بیابید. **مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۶ کتاب درسی**

پاسخ

اعداد دو رقمی مضرب ۶: $12, \underbrace{18}_{+6}, \underbrace{24}_{+6}, \cdots , a_n = 12 + 6(n-1) = 6n + 6$

اولاً باید:

$a_n = 6n + 6 < 100 \Rightarrow 6n < 94 \Rightarrow n < \frac{94}{6} \simeq 15/6 \Rightarrow n \leq 15$

پس بزرگ‌ترین مضرب دو رقمی عدد ۶، به ازای $n = 15$ به‌دست می‌آید، بنابراین:

$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \overset{n=15}{=\!=} \frac{15}{2}(2(12) + \underbrace{(15-1)}_{14}(6)) = \frac{15}{2} \times 108 = 810$

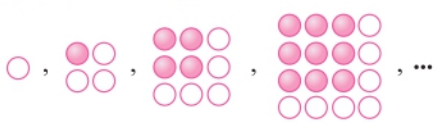
و یا:

$a_n = a_{15} = 96 \Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}(a_1 + a_{15}) = \frac{15}{2}(\overbrace{12 + 96}^{108}) = 810$

بستهٔ ۱ پرسش‌های تشریحی — مجموع جملات دنبالهٔ حسابی

☆ ۱. به کمک شکل‌های روبه‌رو، مجموع n عدد طبیعی اولیه (از ۱ تا n) را به‌دست آورید. (مشابه فعالیت صفحهٔ ۲ کتاب درسی)

☆ ۲. به کمک شکل روبه‌رو ثابت کنید مجموع n عدد فرد متوالی اولیه، برابر با n^2 است. (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۶ کتاب درسی)



☆ ۳. در هر یک از دنباله‌های حسابی زیر، مجموع بیست جملهٔ اول را بیابید.

آ) $-5, 0, 5, \cdots$ (شهریور ۹۲)

ب) $-5, -3, -1, \cdots$ (دی ۹۱)

☆ ۴. مجموع جملات دنبالهٔ $4, 7, 10, \cdots, 100$ را بیابید. (دی ۹۵)

۵. مجموع اعداد فرد مضرب ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۰ چقدر است؟

☆ ۶. مجموع اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۱۵ چقدر است؟ (مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

☆ ۷. در یک دنبالهٔ حسابی هر جمله از جملهٔ ماقبل خود به اندازهٔ $\frac{1}{2}$ بیش‌تر است. اگر جملهٔ هفتم برابر ۱۳ باشد، مجموع ۲۰ جملهٔ اول دنباله چقدر است؟

☆ ۸. در یک دنبالهٔ حسابی جملات هفتم و دوازدهم به ترتیب ۳۲ و ۱۲ می‌باشد. مجموع ۱۵ جملهٔ اول این دنباله را بیابید.

☆ ۹. در دنبالهٔ حسابی $3, 9, 15, \cdots$ ، حداقل چند جملهٔ آن را باید با هم جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بیش‌تر شود؟ (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۶ کتاب درسی و دی ۹۳)

۱۰. در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ چهارم برابر با ۳ و جملهٔ هفتم برابر با ۱۲ است،

آ) جملهٔ اول و قدرنسبت دنباله را بیابید.

ب) حداکثر چند جمله از آن را با هم جمع کنیم، تا حاصل کم‌تر از ۴۵۰ شود؟

۱۱. در دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی $a_n = 3 - 2n$، مجموع n جملهٔ اولیهٔ دنباله (S_n) را بیابید، سپس مجموع ۱۵ جملهٔ اول آن را به‌دست آورید.

۱۲. ☆ اگر مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی $S_n = \frac{6n^2 - 5n}{12}$ باشد،

آ) قدرنسبت و جملهٔ اول آن را به‌دست آورید.

ب) مجموع ۱۰ جملهٔ اول آن چقدر است؟

۱۳. ☆ در یک دنبالهٔ حسابی با ۲۰ جمله، مجموع جملات ردیف فرد برابر ۲۴۰ و مجموع جملات ردیف زوج برابر با ۲۷۰ می‌باشد، جملهٔ اول و قدرنسبت دنباله را بیابید.

(مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

۱۴. در یک دنبالهٔ حسابی با ۱۰ جمله، مجموع ۵ جملهٔ اول برابر ۲۵ و مجموع ۵ جملهٔ آخر برابر ۱۰۰ می‌باشد، جملهٔ اول و قدرنسبت دنباله را بیابید.

۱۵. در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1 :

آ) اگر قدرنسبت یک واحد افزایش یابد، به مجموع ۱۰ جملهٔ اول آن چند واحد افزوده می‌شود؟

ب) اگر همهٔ جملات دو برابر شوند، مجموع ۱۰ جملهٔ اول آن چند برابر می‌شود؟

۱۶. مجموع چند عدد طبیعی اولیه، $\frac{3}{5}$ مربع تعداد آن‌ها می‌باشد؟

۱۷. ☆ بر روی محیط یک دایره n نقطه قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. اگر تعداد کل پاره‌خط‌های ایجادشده برابر ۵۵ باشد، تعداد این نقاط چند تا است؟ (این مسئله را به دو روش حل کنید.)

(مشابه مثال صفحهٔ ۳ کتاب درسی)

۱۸. یک موسسهٔ خیریه در اولین سال فعالیت خود ۵۰۰ خانوار را تحت پوشش خود دارد. اگر هدف این موسسه آن باشد که هر سال ۴۰ خانوار را به اعضای تحت پوشش خود بیفزاید، پس از ۱۰ سال مجموعاً چند خانوار را تحت پوشش خواهد داشت؟

۱۹. ☆ یک مسابقهٔ دو، طوری طراحی شده که از کنار یک سبد شروع به دویدن کرده، در ایستگاه اول یک توپ برداشته، برمی‌گردیم و در سبد می‌اندازیم و سپس تا ایستگاه دوم رفته و دو توپ برمی‌داریم و در سبد می‌اندازیم و به همین ترتیب تا ایستگاه n اُم رفته، n توپ برمی‌داریم و در سبد می‌اندازیم. اگر دونده‌ای در مجموع ۵۵ توپ در سبد انداخته باشد و فاصلهٔ بین هر دو ایستگاه متوالی و هم‌چنین ایستگاه اول تا سبد، ۲ متر باشد، مجموع مسافت‌های طی‌شده توسط این دونده را بیابید.

(مشابه مثال صفحهٔ ۴ کتاب درسی)

بسته دوم

مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

صفحه ۴ تا ۷ کتاب درسی

قبل از این که یاد بگیریم چه‌طور و با چه فرمولی مجموع جملات یه دنبالهٔ هندسی رو به دست بیاریم، لازم می‌دونم که یادآوری کوچیکی از دنباله‌های هندسی داشته باشیم.

یادآوری از دنباله‌های هندسی

جملات دنباله‌های هندسی از ضرب عددی ثابت و مخالف صفر در جملهٔ قبل آن به‌دست می‌آیند:

$$a_1 \xrightarrow{\times q} a_1q \xrightarrow{\times q} a_1q^2 \xrightarrow{\times q} a_1q^3, \cdots \Rightarrow a_n = a_1q^{n-1}$$

(a_n جملهٔ عمومی (n اُم) و q قدرنسبت دنباله می‌باشد.)

بنابراین نسبت هر دو جملهٔ متوالی در دنبالهٔ هندسی، برابر با قدرنسبت دنباله است:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \Rightarrow \frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}$$

نکته اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی از دنبالهٔ هندسی با جملات مثبت باشند، b را واسطهٔ هندسی a و c می‌گویند و داریم:

$$b^2 = ac \text{ یا } b = \sqrt{ac}$$

سؤال مقادیر x و y را در دنبالهٔ هندسی $4, x, y, \frac{1}{2}, \ldots$ بیابید.

پاسخ روش اول

$$4, x, y, \frac{1}{2}, \ldots \xrightarrow{\text{دنبالهٔ هندسی}} \begin{cases} x^2 = 4y \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} \\ y^2 = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x^4}{16} = \frac{x}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2x^4 = 16x \xrightarrow[x \neq 0]{\div (2x)} x^3 = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{y = \frac{x^2}{4}} y = \frac{4}{4} = 1$$

روش دوم در دنبالهٔ داده شده $a_1 = ۴$ و $a_۴ = \frac{۱}{۲}$ است، پس داریم:

$$q^{۴-۱} = \frac{a_۴}{a_۱} \Rightarrow q^۳ = \frac{\frac{۱}{۲}}{۴} = \frac{۱}{۸} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۳ \Rightarrow q = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = a_۱q = ۴\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۲ \\ y = x\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۲\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۱ \end{cases}$$

مجموع جملات دنباله‌های هندسی

اگر $S_n = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$، مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی باشد، به کمک روش زیر می‌توان فرمولی برای S_n یافت:

$$S_n = a_۱ + a_۱q + a_۱q^۲ + \cdots + a_۱q^{n-۱} \qquad (*)$$

طرفین رابطهٔ بالا را در q ضرب می‌کنیم:

$$qS_n = a_۱q + a_۱q^۲ + a_۱q^۳ + \cdots + a_۱q^{n-۱} + a_۱q^n \qquad (**)$$

حالا اگر طرفین دو رابطه را از هم کم کنیم، داریم:

$$\xrightarrow{(**)-(*)} qS_n - S_n = (a_۱q + a_۱q^۲ + \cdots + a_۱q^{n-۱} + a_۱q^n) - (a_۱ + a_۱q + \cdots + a_۱q^{n-۱})$$

$$\Rightarrow \underbrace{qS_n - S_n}_{\text{فاکتور از } S_n} = \underbrace{a_۱q^n - a_۱}_{\text{فاکتور از } a_۱} \Rightarrow S_n(q-۱) = a_۱(q^n - ۱) \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{a_۱(q^n - ۱)}{q - ۱}}$$

توجه کنین که فرقی نمی‌کنه بنویسیم $S_n = \frac{a_۱(q^n - ۱)}{q - ۱}$ یا $S_n = \frac{a_۱(۱ - q^n)}{۱ - q}$! اگه گفتین چرا؟

سؤال مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $\frac{۱}{۲}, ۱, ۲, \ldots$، چند برابر جملهٔ اول آن است؟ **مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۵ کتاب درسی**

پاسخ

$\frac{۱}{۲}, ۱, ۲, \cdots \Rightarrow q = ۲, a_۱ = \frac{۱}{۲}$ دنبالهٔ هندسی با

$$\Rightarrow S_{۱۰} = \frac{a_۱(q^{۱۰} - ۱)}{q - ۱} = \frac{\frac{۱}{۲}(۲^{۱۰} - ۱)}{۲ - ۱} = \frac{۱}{۲}(۱۰۲۴ - ۱) = \frac{۱۰۲۳}{۲} \Rightarrow \frac{S_{۱۰}}{a_۱} = \frac{\frac{۱۰۲۳}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = ۱۰۲۳$$

سؤال در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع ۱۰ جملهٔ اول برابر ۶۶ و مجموع ۵ جملهٔ اول برابر ۶۴ است. قدرنسبت دنباله را بیابید.

پاسخ

$$\begin{cases} S_{۱۰} = \frac{a_۱(q^{۱۰} - ۱)}{q - ۱} = ۶۶ \\ S_۵ = \frac{a_۱(q^۵ - ۱)}{q - ۱} = ۶۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم.}} \frac{S_{۱۰}}{S_۵} = \frac{\frac{a_۱(q^{۱۰} - ۱)}{q - ۱}}{\frac{a_۱(q^۵ - ۱)}{q - ۱}} = \frac{۶۶}{۶۴}$$

$$\xrightarrow{\text{دور در دور، نزدیک در نزدیک}} \frac{a_۱(q^{۱۰} - ۱)(q - ۱)}{a_۱(q^۵ - ۱)(q - ۱)} = \frac{۶۶}{۶۴} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{(q^۵ - ۱)(q^۵ + ۱)}{q^۵ - ۱} = \frac{۶۶}{۶۴}$$

$$\Rightarrow q^۵ + ۱ = \frac{۳۳}{۳۲} \Rightarrow q^۵ = \frac{۳۳}{۳۲} - ۱ \Rightarrow q^۵ = \frac{۱}{۳۲} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۵ \Rightarrow q = \frac{۱}{۲}$$

نکته برای مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی، یعنی S_n، نیز رابطه‌های روبه‌رو برقرار است:

۱ $S_۱ = a_۱$ ۲ $S_n - S_{n-۱} = a_n$

سؤال اگر مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی برابر با $S_n = 2^n - 1$ باشد، جملهٔ اول و قدرنسبت این دنباله را بیابید.

پاسخ روش اول

$$a_1 = S_1 = 2^1 - 1 = 1$$

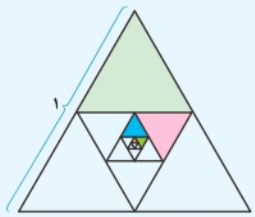
$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2^n - 1) - (2^{(n-1)} - 1) = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}\underbrace{(2-1)}_{1} = 2^{n-1}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} \xrightarrow[a_n = 2^{n-1}]{a_1 = 1} 2^{n-1} = 1 \times q^{n-1} \Rightarrow q = 2$$

روش دوم

$$S_n = 2^n - 1 \begin{cases} \rightarrow S_1 = a_1 = 2 - 1 = 1 \\ \rightarrow S_2 = a_1 + a_2 = 2^2 - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow 1 + a_2 = 3 \Rightarrow a_2 = 2 \Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2$$

سؤال اگر هر بار وسط اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع روبه‌رو را به هم وصل کنیم، مساحت قسمت رنگی چقدر است؟



پاسخ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ برابر است با:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

در هر مرحله مساحت رنگ‌شده $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث قبلی است:

مساحت مثلث رنگی اول: $a_1 = \frac{1}{4}S = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

مساحت مثلث رنگی دوم: $a_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}S\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

مساحت مثلث رنگی سوم: $a_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}S\right)\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$\vdots$

بنابراین با دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\left(\frac{1}{4}\right)$ مواجهیم و مساحت کل قسمت رنگی ایجادشده برابر است با:

$$S_5 = a_1 + a_2 + \cdots + a_5 = \frac{a_1(q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(\left(\frac{1}{4}\right)^5 - 1\right)}{\left(\frac{1}{4} - 1\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4^2} \times \frac{1 - 4^5}{4^5}}{-\frac{3}{4}} \quad (1 - 4^5 = 1023 \rightarrow 1024) = \frac{-1023 \times \sqrt{3}}{-4^6 \times 3} = \frac{341\sqrt{3}}{4096}$$

بسته ۲ پرسش‌های تشریحی

مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

در هریک از دنباله‌های هندسی زیر، مجموع ۱۰ جملهٔ اول را بیابید.

۲۰. ☆ $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots$ (خرداد ۹۱، با کمی تغییر)

۲۱. $\frac{1}{5}, \frac{1}{20}, \frac{1}{80}, \cdots$ (شهریور۹۵، با کمی تغییر)

۲۲. ☆ $\frac{1}{8}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{2}, \cdots$

حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

۲۳. ☆ $\frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + \cdots + 2048$

۲۴. $-1 - 3 - 9 \cdots - 729$

۲۵. ☆ $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{729} - \frac{1}{128}$

۲۶. ☆ مجموع چند جملهٔ اول از دنبالهٔ هندسی $6, -12, 24, \cdots$ برابر -126 خواهد شد؟ (خرداد ۹۰)

۲۷. در یک دنبالهٔ اعداد، هر جمله دو برابر جملهٔ قبلی آن است. اگر مجموع ۵ جملهٔ اول آن برابر ۴۶/۵ باشد، جملهٔ اول دنباله را بیابید.

☆ ۲۸. در یک دنبالهٔ هندسی جملهٔ پانزدهم ۸ برابر جملهٔ دوازدهم است. مجموع ۸ جملهٔ اول این دنباله، چند برابر جملهٔ اول آن است؟

۲۹. مجموع ۱۲ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی ۹ برابر مجموع ۶ جملهٔ اول آن است. قدرنسبت را بیابید.

۳۰. مجموع ۱۰ جملهٔ دوم دنبالهٔ هندسی ۱, ۲, ۴, ... ، چند برابر مجموع ۱۰ جملهٔ اول آن است؟

☆ ۳۱. جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی به‌صورت $a_n = ۳ \times ۲^n$ است، (مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

آ) مجموع ۵ جملهٔ اول آن را بیابید.

ب) مجموع چند جمله از این دنباله برابر با ۳۰۶۶ است؟

۳۲. در یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت q، مجموع ۱۰ جملهٔ اول S می‌باشد،

آ) اگر جملهٔ اول را دو برابر کنیم، مجموع ۱۰ جملهٔ اول چند برابر می‌شود؟

ب) اگر قدرنسبت را به توان ۲ برسانیم، مجموع ۱۰ جملهٔ اول را بر حسب S و q بیابید.

● **درستی هر یک از تساوی‌های زیر را اثبات کنید.** (مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

☆ ۳۳. $۱ + a + a^۲ + \cdots + a^{n-۱} = \frac{۱ - a^n}{۱ - a}$

۳۴. $a^n + ۱ = (a+۱)(a^{n-۱} - a^{n-۲} + \cdots - a + ۱)$; (n فرد)

۳۵. $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-۱} + x^{n-۲}y + \cdots + xy^{n-۲} + y^{n-۱})$

۳۶. اگر ضلع مربع ۱ واحد باشد و در هر مرحله وسط اضلاع مربع را به هم وصل کنیم تا مربع جدیدی حاصل شود، مساحت قسمت رنگی چقدر است؟

☆ ۳۷. طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از مرحلهٔ قبل را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله، حداقل ۹۹ درصد از سطح مربع رنگ شده است؟ (تمرین ۶ صفحهٔ ۶ کتاب درسی - دی ۹۴)

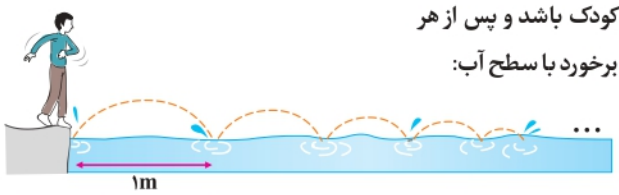
۳۸. برای از بین بردن ذرات معلق در یک محلول، آن را از صافی‌هایی عبور می‌دهیم. اگر در اثر عبور از هر صافی تعداد ذرات معلق موجود در محلول نصف شود، حداقل چند صافی نیاز است تا ذرات معلق موجود در محلول، حداقل ۹۶ درصد کاهش یابد؟

☆ ۳۹. یک مثلث با محیط p را در نظر بگیرید و وسط اضلاع آن را به هم وصل کنید تا مثلث کوچک‌تری ایجاد شود. این عمل را به‌طور متوالی انجام دهید. مجموع محیط مثلث‌های به‌دست‌آمده از مثلث اول تا مثلث مرحلهٔ دهم، چند برابر p است؟ (خرداد ۹۴، با کمی تغییر)

☆ ۴۰. توپی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی زمین بخورد، پس از زمین خوردن به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع اولیه‌اش بالا می‌رود. فرض کنید این توپ را به‌طور قائم از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع ۹ متری برسد. پس از شروع پرتاب تا ۶اُمین برخورد به زمین درکل مسافت عمودی طی‌شده این توپ چه‌قدر است؟ (خرداد ۹۰، با کمی تغییر و مشابه مثال صفحهٔ ۵ کتاب درسی)

۴۱. علی می‌خواهد پول خود را پس‌انداز کند. او روز اول ۳۰۰۰۰ تومان پس‌انداز می‌کند و روزهای دیگر میزان آن را ۱۰ درصد نسبت به روز قبل افزایش می‌دهد، پس از یک هفته چند تومان پس‌انداز می‌کند؟ ($(۱/۱)^۷ \simeq ۱/۹۵$)

۴۲. کودکی سنگی را بر روی سطح آب پرتاب می‌کند. این سنگ در مسیر نیم‌دایره‌هایی روی سطح آب حرکت می‌کند. اگر اولین برخورد سنگ با سطح آب ۱ متر جلوتر از کودک باشد و پس از هر برخورد سنگ با آب، قطر نیم‌دایره ۵۰ درصد کاهش یابد، پس از ۵اُمین برخورد با سطح آب:



آ) فاصلهٔ سنگ تا کودک چقدر است؟ (تا دو رقم اعشار)

ب) سنگ چه مسافتی را پیموده است؟ ($\pi \simeq ۳/۲$)

☆ ۴۳. پدری برای کادوی سالگرد تولد فرزندش، سال اول ۱ سکه، سال دوم ۲ سکه، سال سوم ۴ سکه و به همین ترتیب هر سال دو برابر سال قبل سکه برای او پس‌انداز می‌کند. اگر بهای هر سکه ۱۰۰۰۰ تومان باشد، وقتی این فرزند به ۱۰ سالگی می‌رسد، چند سکه کادو گرفته و بهای کل آن‌ها چقدر است؟ (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

☆ ۴۴. در مسئلهٔ مخترع شطرنج در صفحهٔ ۵ کتاب درسی، اگر وزن هر دانهٔ گندم ۱ گرم باشد، نشان دهید این مخترع بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن گندم جایزه دریافت خواهد کرد. (کار در کلاس صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

بسته سوم

روابط بین ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

صفحه ۸ تا ۹ کتاب درسی

سال گذشته با معادلهٔ درجه دوم با شکل کلّی $ax^2+bx+c=0$ آشنا شدید و روش‌های مختلف حل اونها رو یاد گرفتید. برای یادآوری به مثال زیر توجه کنید.

سؤال معادلات زیر را به روش خواسته شده حل کنید.

۱) $(x-1)^2-25=0$ (ریشه‌گیری)

۲) $x^2+3x+2=0$ (روش تجزیه)

۳) $2x^2+6x-3=0$ (مربع کامل)

۴) $3x^2-x-2=0$ (روش کلی)

پاسخ ۱) برای حل معادلهٔ درجه دوم به روش ریشه‌گیری آن را به فرم $x^2=a^2$ درآورده، سپس با شرط $a\geq 0$، می‌توان با جذر گرفتن از طرفین تساوی، نتیجه گرفت $x=\pm\sqrt{a}$:

$$(x-1)^2-25=0\Rightarrow(x-1)^2=5^2\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}}x-1=\pm5\Rightarrow\begin{cases}x=5+1=6\\x=-5+1=-4\end{cases}$$

۲) برای حل معادلهٔ درجه دوم به روش تجزیه، کافی است عبارت را به کمک فاکتورگیری یا اتحادها، به حاصل ضرب ۲ عبارت درجه اول تجزیه کنیم. سپس به کمک خاصیت حاصل‌ضرب صفر، هریک از عبارات را برابر صفر قرار دهیم. توجه کنید که در این حالت اگر عبارت تجزیه‌نشدنی باشد، فاقد ریشه است.

$$x^2+3x+2=0\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}(x+1)(x+2)=0\Rightarrow\begin{cases}x+1=0\Rightarrow x=-1\\x+2=0\Rightarrow x=-2\end{cases}$$

۳) برای حل معادلهٔ درجه دوم به روش مربع کامل، ابتدا طرفین معادله را به ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم:

$$2x^2+6x-3=0\xrightarrow{\div 2}x^2+3x-\frac{3}{2}=0$$

$$x^2+3x=\frac{3}{2}$$

مقدار ثابت را به سمت دیگر معادله می‌بریم:

به طرفین معادله، مربع نصف ضریب x را اضافه می‌کنیم تا یک طرف به شکل مربع کامل درآید:

$$x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\Rightarrow\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{2}+\frac{9}{4}$$

(مربع نصف ضریب x)

طرفین را تا حد امکان ساده می‌کنیم و سپس به کمک ریشه‌گیری جواب‌ها را می‌یابیم:

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{15}{4}\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}}x+\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}\Rightarrow x=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{15}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{15}}{2}$$

۴) برای حل معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، به روش کلی (روش Δ)، داریم:

$$\Delta=b^2-4ac\begin{cases}\Delta<0\rightarrow\text{ریشه ندارد.}\\\Delta=0\rightarrow x=\dfrac{-b}{2a}\ \text{(ریشهٔ مضاعف)}\\\Delta>0\rightarrow x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}$$

$$3x^2-x-2=0\xrightarrow[c=-2]{a=3,\ b=-1}\Delta=(-1)^2-4(3)(-2)=1+24=25>0\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-(-1)+\sqrt{25}}{2(3)}=\dfrac{1+5}{6}=\dfrac{6}{6}=1\\x_2=\dfrac{-(-1)-\sqrt{25}}{2(3)}=\dfrac{1-5}{6}=\dfrac{-4}{6}=\dfrac{-2}{3}\end{cases}$$

نکته گاهی برای حل یک معادله می‌توان از تغییر متغیر کمک گرفت تا معادله به‌صورت ساده‌تری تبدیل گردد.

سؤال هریک از معادلات زیر را حل کنید.

۱) $(1-\sqrt{2}x)^2+\sqrt{2}x=0$

۲) $(x^2-1)^2+3(x^2-1)-4=0$

پاسخ ۱) وقتی به معادله نگاه می‌کنیم یه عبارت ترسناک به شکل $(1-\sqrt{2}x)^2$ می‌بینیم که یا باید اون رو به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای بازش کنیم یا این‌که برای از بین بردن ترس فورمون این عبارت رو یه متغیر جدید در نظر بگیریم تا شکل‌اش عوض بشه!

$$t=(1-\sqrt{2}x)\Rightarrow\sqrt{2}x=1-t\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}}t^2+1-t=0\Rightarrow t^2-t+1=0\xrightarrow{\Delta<0}\text{ریشه ندارد.}$$

۲ در این معادله عبارت $(x^۲-۱)$ تکرار شده پس اسم این عبارت رو عوض می‌کنیم و یه اسم (متغیر) جدید براش انتخاب می‌کنیم تا معادله شکل ساده‌تری به خودش بگیره!

$$t=x^۲-۱ \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} t^۲+۳t-۴=۰ \Rightarrow (t-۱)(t+۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۱ \Rightarrow x^۲-۱=۱ \Rightarrow x^۲=۲ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲} \\ t=-۴ \Rightarrow x^۲-۱=-۴ \Rightarrow x^۲=-۳ \Rightarrow \text{ریشه ندارد.} \end{cases}$$

حالا که حسابی معادله درجه دوم یادتون اومد بریم سراغ مبحث شیرین روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم!

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

گفتیم که در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ ، اگر $\Delta>۰$ باشد، آن‌گاه معادله دارای دو ریشهٔ α و β است:

$$\begin{cases} \alpha=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \\ \beta=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} \end{cases}$$

در این صورت می‌توان نوشت:

مجموع ریشه‌ها: $\alpha+\beta=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}+\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{-۲b}{۲a}=-\dfrac{b}{a}$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها: $\alpha\beta=\left(\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\right)\left(\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}\right)=\dfrac{(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})}{(۲a)^۲} \overset{\text{اتحاد مزدوج}}{=\!=} \dfrac{(-b)^۲-(\sqrt{\Delta})^۲}{۴a^۲}$

$$=\dfrac{b^۲-\Delta}{۴a^۲}=\dfrac{b^۲-(b^۲-۴ac)}{۴a^۲}=\dfrac{۴ac}{۴a^۲}=\dfrac{c}{a}$$

یعنی:

مجموع ریشه‌ها $S=\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}$ ، **حاصل‌ضرب ریشه‌ها** $P=\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

به کمک روابط بالا می‌توان مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های یک معادله درجه دوم را (در صورت وجود) بدون حل معادله به‌دست آورد.

سؤال **در معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲-۴x+۱=۰$، اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، بدون حل معادله حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.**

۱) $\alpha+\beta$ ۲) $\alpha\beta$ ۳) $\dfrac{۱}{\alpha}+\dfrac{۱}{\beta}$ ۴) $\alpha^۲+\beta^۲$

پاسخ

۱) $۲x^۲-۴x+۱=۰ \Rightarrow a=۲ , b=-۴ , c=۱$

$$\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-(-۴)}{۲}=\dfrac{۴}{۲}=۲$$

۲) $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}=\dfrac{۱}{۲}$

۳) $\dfrac{۱}{\alpha}+\dfrac{۱}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{S}{P}=\dfrac{۲}{\frac{۱}{۲}}=۲\times۲=۴$

۴) $\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=S^۲-۲P=۲^۲-۲\left(\dfrac{۱}{۲}\right)=۴-۱=۳$

سؤال **اگر $x=-۱$ یک ریشهٔ معادله $۲x^۲-mx-۳=۰$ باشد، ریشهٔ دیگر و مقدار m را بیابید.**

مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۵ و مثال صفحهٔ ۶ کتاب درسی

پاسخ **روش اول** ریشهٔ معادله در معادله صدق می‌کند:

$$۲x^۲-mx-۳=۰ \xrightarrow{x=-۱} ۲(-۱)^۲-m(-۱)-۳=۰ \Rightarrow ۲+m-۳=۰ \Rightarrow m=۳-۲=۱$$

حال با جای‌گذاری $m=۱$ داریم:

$$۲x^۲-x-۳=۰ \Rightarrow \Delta=(-۱)^۲-۴(۲)(-۳)=۲۵ \Rightarrow x=\dfrac{-(-۱)\pm\sqrt{۲۵}}{۲(۲)} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{۱+۵}{۴}=\dfrac{۳}{۲} : \text{ریشهٔ دیگر} \\ x=\dfrac{۱-۵}{۴}=-۱ \end{cases}$$

روش دوم کافی است از روابط بین ریشه‌ها کمک بگیریم:

$$\begin{cases} x_۱+x_۲=\dfrac{-(-m)}{۲}=\dfrac{m}{۲} \\ x_۱x_۲=\dfrac{-۳}{۲} \end{cases} \xrightarrow{x_۱=-۱} \begin{cases} -۱+x_۲=\dfrac{m}{۲} \\ (-۱)(x_۲)=\dfrac{-۳}{۲} \Rightarrow x_۲=\dfrac{۳}{۲} : \text{ریشهٔ دیگر} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -۱+\dfrac{۳}{۲}=\dfrac{m}{۲} \Rightarrow \dfrac{m}{۲}=\dfrac{۱}{۲} \Rightarrow m=۱$$

نوشتن یک معادلهٔ درجه دوم با داشتن ریشه‌های آن

اگر α و β ریشه‌های یک معادلهٔ درجه دوم باشند، این معادله را می‌توان به‌صورت‌های روبه‌رو نوشت: **صورت اول**: $(x-\alpha)(x-\beta)=0$

صورت دوم: $\begin{cases} S=\alpha+\beta \\ P=\alpha\beta \end{cases} \Rightarrow x^2-Sx+P=0$

توجه کنید که هرضریبی از معادلات بالا نیز دارای ریشه‌های α و β است.

سؤال معادلهٔ درجه دومی را بنویسید که دارای ریشه‌های ۲ و ۳- باشد. **مشابه فعالیت صفحه ۹ کتاب درسی**

پاسخ روش اول

$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \Rightarrow (x-2)(x-(-3))=0 \Rightarrow (x-2)(x+3)=0 \Rightarrow x^2+x-6=0$

روش دوم

$\begin{cases} S=\alpha+\beta=-3+2=-1 \\ P=\alpha\beta=(-3)(2)=-6 \end{cases} \xrightarrow{x^2-Sx+P=0} x^2+x-6=0$

سؤال اگر محیط و مساحت یک مستطیل به ترتیب ۱۶ و ۱۵ باشد، **مشابه مثال صفحه ۹ کتاب درسی**

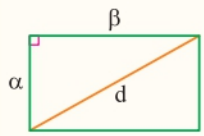
۱ بدون محاسبهٔ ابعاد مستطیل، طول قطر آن را بیابید.

۲ با تشکیل معادلهٔ درجه دوم، ابعاد مستطیل را بیابید.

پاسخ اگر α و β را طول و عرض این مستطیل در نظربگیریم، داریم:

$\begin{cases} \text{محیط}: 2(\alpha+\beta)=16 \Rightarrow \alpha+\beta=8 \\ \text{مساحت}: \alpha\beta=15 \end{cases}$

۱ اگر طول قطر مستطیل برابر d باشد، داریم:



$d^2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=8^2-2(15)=64-30$

$\Rightarrow d^2=34 \Rightarrow d=\sqrt{34}$

۲ با داشتن $S=\alpha+\beta=8$ و $P=\alpha\beta=15$، می‌توان نوشت:

$x^2-Sx+P=0 \xrightarrow[P=15]{S=8} x^2-8x+15=0 \Rightarrow \Delta=(-8)^2-4(1)(15)=64-60=4$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{-(-8)+\sqrt{4}}{2(1)}=\dfrac{8+2}{2}=5 & \text{طول} \\ \beta=\dfrac{-(-8)-\sqrt{4}}{2(1)}=\dfrac{8-2}{2}=3 & \text{عرض} \end{cases}$

تعداد و علامت ریشه‌ها

در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، با توجه به علامت Δ و علامت ضرایب a، b و c، می‌توان در مورد تعداد و علامت ریشه‌های معادله بدون حل آن اظهار نظرکرد: (S مجموع و P حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله است.)

۱ $\Delta=b^2-4ac>0 \xrightarrow{\text{۲ ریشه}}$

- $P>0 \rightarrow ac>0$: دو ریشهٔ هم‌علامت
  - $S<0 \rightarrow ab>0$: هر دو منفی
  - $S>0 \rightarrow ab<0$: هر دو مثبت
- $P<0 \rightarrow ac<0$: دو ریشهٔ غیر هم‌علامت
  - $S<0 \rightarrow ab>0$: قدرمطلق ریشهٔ منفی، بزرگ‌تر از ریشهٔ مثبت
  - $S>0 \rightarrow ab<0$: قدرمطلق ریشهٔ منفی، کوچک‌تر از ریشهٔ مثبت
- $P=0 \rightarrow ac=0$: دارای ریشهٔ صفر
  - $S<0 \rightarrow ab>0$: یک ریشه صفر و ریشهٔ دیگر منفی
  - $S>0 \rightarrow ab<0$: یک ریشه صفر و ریشهٔ دیگر مثبت

مثال $2x^2-3x-1=0 \Rightarrow \Delta=17>0 \xrightarrow[ac<0]{P=-\frac{1}{2}<0}$ دو ریشهٔ غیر هم‌علامت $\xrightarrow[ab<0]{S=\frac{3}{2}>0}$ قدرمطلق ریشهٔ منفی، کوچک‌تر از ریشهٔ مثبت

مثال $-x^2+4x-3=0 \Rightarrow \Delta=4>0 \xrightarrow[ac<0]{P=3>0}$ دو ریشهٔ هم‌علامت $\xrightarrow[ab<0]{S=4>0}$ هر دو ریشه مثبت است.

یه وقت نیاین همهٔ مطالب گفته شده رو حفظ کنیدها! فیلی راحت خودتون می‌تونین با به کار گرفتن مغزتون و یه کوچولو استفاده از استدلال، به نتایج گفته شده برسید. کافیه یه بار امتحان کنید. به ترتیب از علامت Δ، بعدش علامت P و در نهایت علامت S می‌تونید نتیجه‌های بالا رو به دست بیارید.

۲ $\Delta = b^۲ - ۴ac = ۰ \Rightarrow$ ریشهٔ مضاعف
- $ab > ۰, S < ۰$ ← ریشهٔ مضاعف منفی
- $ab < ۰, S > ۰$ ← ریشهٔ مضاعف مثبت

مثال $ax^۲ - ۲ax + a = ۰ \Rightarrow \Delta = ۴a^۲ - ۴a(a) = ۰ \xrightarrow{S=۲>۰}$ ریشهٔ مضاعف مثبت دارد.

۳ $\Delta = b^۲ - ۴ac < ۰ \Rightarrow$ ریشه ندارد.

نکته چند نکته در مورد معادلهٔ درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$:

۱ اگر $b = ۰$ باشد، با شرط $ac < ۰$ معادله دارای دو ریشهٔ قرینه است.

۲ اگر $a = c$ باشد، با شرط $\Delta > ۰$ معادله دارای دو ریشهٔ معکوس است.

۳ اگر $a = -c$ باشد، معادله دارای دو ریشهٔ قرینه و معکوس است.

وقتی a و c هم‌علامت نباشن حتماً معادله ۲ تا ریشه رو داره!

۴ اگر $a + b + c = ۰$ باشد، (مجموع ضرایب صفر باشد.) معادله دارای دو ریشهٔ $x_۱ = ۱$ و $x_۲ = \frac{c}{a}$ می‌باشد.

۵ اگر $a + c = b$ باشد، معادله دارای دو ریشهٔ $x_۱ = -۱$ و $x_۲ = -\frac{c}{a}$ می‌باشد.

سؤال در مورد ریشه‌های معادلات زیر بحث کنید.

۱) $-۳x^۲ + ۲x + ۱ = ۰$ ۲) $۲x^۲ - ۳x + \frac{۱}{۲} = ۰$ ۳) $۶x^۲ + ۵x - ۱ = ۰$ ۴) $-x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$

پاسخ

۱) $-۳x^۲ + ۲x + ۱ = ۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} x_۱ = ۱, x_۲ = \frac{c}{a} = -\frac{۱}{۳}$

۲) $۲x^۲ - ۳x + \frac{۱}{۲} = ۰ \xrightarrow{P>۰, \Delta>۰}$ معادله دارای دو ریشهٔ هم‌علامت است. $\xrightarrow{S>۰, ab<۰}$ هردو ریشه مثبت

۳) $۶x^۲ + ۵x - ۱ = ۰ \xrightarrow{a+c=b} x_۱ = -۱, x_۲ = \frac{-c}{a} = \frac{-(-۱)}{۶} = \frac{۱}{۶}$

۴) $-x^۲ + ۳x + ۱ = ۰ \xrightarrow{a=-c}$ معادله دارای دو ریشهٔ قرینه و معکوس $\xrightarrow{S>۰}$ قدرمطلق ریشهٔ منفی، کوچک‌تر از ریشهٔ مثبت

می‌تونیم بگیم ریشه‌های این معادله به‌صورت α و $\frac{-۱}{\alpha}$ که $\alpha > ۱$ است! آگه گفتین چرا؟

بسته ۳ پرسش‌های تشریحی

روابط بین ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

۴۵. ☆ معادلات زیر را به روش خواسته‌شده حل کنید.

آ) $۶x^۲ - ۳۰x = ۰$ (تجزیه)

ب) $x^۲ - ۳x + ۲ = ۰$ (تجزیه)

پ) $(x-۳)^۲ - ۱۶ = ۰$ (ریشه‌گیری)

ت) $x^۲ + ۶x - ۷ = ۰$ (مربع کامل)

ث) $۴x^۲ + ۱۲x + ۵ = ۰$ (مربع کامل)

ج) $۲x^۲ - ۵x + ۲ = ۰$ (روش کلی)

چ) $x^۲ + ۳x + ۵ = ۰$ (روش کلی)

معادلات زیر را حل کنید.

۴۶. $(۲+\sqrt{۲})x^۲ - ۲\sqrt{۲}x + (\sqrt{۲}-۲) = ۰$

۴۷. $(۲-\sqrt{۲})x^۲ + ۴x + (\sqrt{۲}+۲) = ۰$

(مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)

۴۸. ☆ $(۴-x^۲)^۲ - ۲(۴-x^۲) - ۱۵ = ۰$

۴۹. ☆ (شهریور ۹۵) $\left(\frac{x^۲}{۲}-۱\right)^۲ + \left(\frac{x^۲}{۲}-۱\right) - ۲ = ۰$ (شهریور ۹۵)

۵۰. ☆ $(x^۲-۱)^۴ + (x^۲-۱)^۲ - ۲ = ۰$

۵۱. (شهریور ۹۲) $\left(\frac{x^۲}{۳}-۲\right)^۲ - ۱۱\left(\frac{x^۲}{۳}-۲\right) + ۱۰ = ۰$ (دی ۹۱)

۵۲. ☆ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x-5=0$ باشند، بدون محاسبهٔ ریشه‌ها، حاصل $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ را بیابید.

۵۳. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $2x^2-8x+1=0$ باشند، حاصل $\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}$ را بیابید.

۵۴. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x+1=0$ باشند، مقدار عددی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

☆ آ) $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$ ب) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$

۵۵. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-5x-6=0$ باشند، مقدار عددی $(\alpha-\beta)^2$ را محاسبه کنید.

۵۶. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-4x+1=0$ باشند، بدون حل معادله مقدار عددی $\frac{1}{\beta}+\beta^2$ را تعیین کنید. $\alpha^2+\frac{1}{\alpha}$ را تعیین کنید.

۵۷. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-\sqrt{2}x-3=0$ باشند، بدون حل معادله، مقدار عددی عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

آ) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2}$ ب) $\alpha^3+\beta^3$

۵۸. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-7x+4=0$ باشند، بدون محاسبهٔ α و β مقدار $\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}$ را تعیین کنید.

۵۹. ☆ اگر $x=2$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-mx-2=0$ باشد، مقدار m و ریشهٔ دیگر معادله را بیابید.

۶۰. اگر $x=-1$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $2x^2=(m+1)x+m^2+1$ باشد، مقدار m و ریشهٔ دیگر را بیابید.

۶۱. ☆ مقدار m را طوری بیابید که در معادلهٔ $x^2-6x+m=0$،

آ) دو ریشه با هم برابر باشد. ب) یک ریشه ۴ واحد بیش‌تر از ریشهٔ دیگر باشد.

پ) یک ریشه ۵ برابر ریشهٔ دیگر باشد.

۶۲. ☆ مقدار k را طوری بیابید که ریشه‌های معادلهٔ $kx^2+9x+4=0$،

آ) معکوس یکدیگر باشند. ب) قرینه و معکوس یکدیگر باشند.

۶۳. m را طوری بیابید که یکی از ریشه‌های معادلهٔ $mx^2-4x+1=0$، سه برابر ریشهٔ دیگر باشد. $(m\neq 0)$ (شهریور ۸۴ و مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)

۶۴. در معادلهٔ $2x^2-8x+m=0$، اگر یکی از جواب‌ها دو واحد از جواب دیگر بزرگ‌تر باشد، مقدار m و هر دو جواب معادله را بیابید. (دی ۹۲)

۶۵. ☆ در معادلهٔ $x^2+mx-3=0$، مقدار m را چنان بیابید که بین α و β (ریشه‌های این معادله)، رابطهٔ $2\alpha+\beta=4$ برقرار باشد.

۶۶. مقدار a را چنان بیابید که میان ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(a+2)x+a+1=0$ رابطهٔ $\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}=\frac{5}{6}$ برقرار باشد.

۶۷. ☆ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3mx+4=0$ باشند، m را چنان بیابید که $\alpha\beta^2+4=0$ باشد.

۶۸. ☆ معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $1\pm\sqrt{2}$ باشند. (دی ۹۴ و مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)

۶۹. ☆ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $4x^2-5x-5=0$ باشند، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن 2α و 2β باشد. (دی ۹۳)

۷۰. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2-2x-1=0$ باشند، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha+1}$ و $\frac{1}{\beta+1}$ باشد. (خرداد ۹۵)

۷۱. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $cx^2+bx+a=0$ کدام‌اند؟ $(a,c\neq 0)$ (خرداد ۹۱)

۷۲. ☆ اگر مجموع دو عدد $\frac{1}{2}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها $\left(-\frac{5}{18}\right)$ باشد، آن دو عدد را بیابید.

● **بدون حل معادله و با استفاده از S، P و Δ در وجود و علامت جواب‌های معادلات زیر بحث کنید.** (شهریور ۹۴)

۷۳. ☆ $x^2+x-5=0$ ۷۴. $3x^2-x-4=0$

۷۵. $4x^2+\frac{1}{4}=2x$ ۷۶. $-x^2+6x-3=0$

۷۷. محیط یک زمین مستطیل شکل، ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ متر مربع است. اندازهٔ طول و عرض این زمین را تعیین کنید. (خرداد ۹۳ و مشابه مثال کتاب درسی صفحهٔ ۹)

۷۸. ☆ یک قالی به مساحت ۶ متر مربع وسط یک اتاق به ابعاد ۳ و ۴ متر پهن شده است، به طوری‌که فاصلهٔ لبه‌های قالی تا دیوارها یکسان می‌باشد. این فاصله چقدر است؟ (مشابه تمرین ۸ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

۷۹. ☆ طول یک کاشی ۵ سانتی‌متر بیش‌تر از ۲ برابر عرض آن است. اگر برای کاشی‌کاری یک دیوار به مساحت ۲۰ متر مربع، ۸۰۰ کاشی مصرف شده باشد، طول و عرض کاشی‌ها چند سانتی‌متر است؟ (مشابه تمرین ۹ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

بخش ۲

پاسخ‌نامه

فصل ۱ جبر و معادله

۱ | با توجه به الگوی داده‌شده می‌توان نوشت:

$$۲(۱)=۱\times۲$$
$$۲(۱+۲)=۲\times۳$$
$$۲(۱+۲+۳)=۳\times۴$$
$$\vdots$$
$$\Rightarrow ۲(۱+۲+\cdots+n)=n\times(n+۱)\Rightarrow ۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

۲ | با توجه به الگوی داده‌شده می‌توان نوشت:

$$۱=۱^۲$$
$$۱+۳=۲^۲$$
$$۱+۳+۵=۳^۲$$
$$۱+۳+۵+۷=۴^۲$$
$$۱+۳+۵+۷+۹=۵^۲$$
$$\vdots$$
$$\underbrace{۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)}_{\text{مجموع n عدد فرد اولیه}}=n^۲$$

۳ | **آ)** با یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_۱=-۵$ و قدرنسبت $d=۰-(-۵)=۵$ مواجه‌ایم. بنابراین:

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$$
$$\xrightarrow{n=۲۰} S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(۲a_۱+۱۹d)\xrightarrow[d=۵]{a_۱=-۵}\frac{۲۰}{۲}(۲(-۵)+۱۹(۵))$$
$$\Rightarrow S_{۲۰}=۱۰(-۱۰+۹۵)=۱۰\times۸۵=۸۵۰$$

ب) با یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_۱=-۵$ و قدرنسبت $d=-۳-(-۵)=۲$ مواجه‌ایم:

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$$
$$\xrightarrow{n=۲۰} S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(۲a_۱+۱۹d)\xrightarrow[d=۲]{a_۱=-۵}\frac{۲۰}{۲}(۲(-۵)+۱۹(۲))$$
$$\Rightarrow S_{۲۰}=۱۰(-۱۰+۳۸)=۱۰\times۲۸=۲۸۰$$

۴ |

$$\overset{+۳}{۴}\ ,\ \overset{+۳}{۷}\ ,\ ۱۰\ ,\ \cdots\ ,\ ۱۰۰$$

$\Rightarrow$ دنبالهٔ حسابی با $a_۱=۴$ و قدرنسبت $d=۳$

حال تعداد جملات دنباله را می‌یابیم:

$$a_n=۱۰۰\xrightarrow{a_n=a_۱+(n-۱)d}۴+(n-۱)(۳)=۱۰۰\Rightarrow ۳(n-۱)=۹۶$$
$$\Rightarrow n-۱=\frac{۹۶}{۳}=۳۲\Rightarrow n=۳۳$$
$$\Rightarrow S_{۳۳}=۴+۷+\cdots+۱۰۰=\frac{۳۳}{۲}(a_۱+a_n)=\frac{۳۳}{۲}(۴+۱۰۰)$$
$$\Rightarrow S_{۳۳}=\frac{۳۳\times\overset{۵۲}{\cancel{۱۰۴}}}{\cancel{۲}}=۱۷۱۶$$

۵ |

$$\underbrace{\overset{+۶}{۳}\ ,\ \overset{+۶}{۹}\ ,\ ۱۵\ ,\ \cdots\ ,\ ۹۹}_{\text{دنبالهٔ حسابی با } a_۱=۳ \text{ و قدرنسبت } d=۶}$$: اعداد فرد مضرب ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۰

حال تعداد جملات دنباله را می‌یابیم:

$$a_n=۹۹\xrightarrow{a_n=a_۱+(n-۱)d}۳+(n-۱)(۶)=۹۹\Rightarrow ۶(n-۱)=۹۶$$
$$\Rightarrow n-۱=\frac{۹۶}{۶}=۱۶\Rightarrow n=۱۷$$

و بنابراین مجموع این جملات برابر است با:

$$S_{۱۷}=\frac{۱۷}{۲}(a_۱+a_n)=\frac{۱۷}{۲}(۳+۹۹)=\frac{۱۷\times\overset{۵۱}{\cancel{۱۰۲}}}{\cancel{۲}}=۸۶۷$$

۶ | اعداد بخش‌پذیر بر ۱۵، بر ۳ و ۵ بخش‌پذیرند و اولین عدد سه‌رقمی که بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشد، ۱۰۵ است.

$$\overset{+۱۵}{۱۰۵}\ ,\ \overset{+۱۵}{۱۲۰}\ ,\ ۱۳۵\ ,\ \cdots$$

برای یافتن تعداد اعداد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۱۵ داریم:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d<۱۰۰۰\Rightarrow ۱۰۵+(n-۱)(۱۵)<۱۰۰۰$$
$$\Rightarrow ۱۵n+۹۰<۱۰۰۰\Rightarrow ۱۵n<۹۱۰\Rightarrow n<\frac{۹۱۰}{۱۵}\simeq ۶۰/۶\Rightarrow n\le ۶۰$$

بنابراین داریم:

$$S_{۶۰}=\frac{۶۰}{۲}(۲a_۱+۵۹d)=\frac{۶۰}{۲}(۲(۱۰۵)+۵۹(۱۵))$$
$$=۳۰\overbrace{(۲۱۰+۸۸۵)}^{۱۰۹۵}=۳۲۸۵۰$$

و یا می‌توان گفت:

$$a_n=a_{۶۰}=۱۰۵+۵۹(۱۵)=۹۹۰$$
$$\Rightarrow S_{۶۰}=\frac{۶۰}{۲}(a_۱+a_{۶۰})=۳۰\ (۱۰۵+۹۹۰)=۳۲۸۵۰$$

۷ | چون هر جمله از جملهٔ قبلش به اندازهٔ $\frac{۱}{۲}$ بیش‌تر است، پس قدرنسبت دنبالهٔ حسابی برابر $d=\frac{۱}{۲}$ است و چون $a_۷=۱۳$، پس داریم:

$$a_۷=a_۱+۶d=۱۳\xrightarrow{d=\frac{۱}{۲}}a_۱+۶\left(\frac{۱}{۲}\right)=۱۳$$
$$\Rightarrow a_۱+۳=۱۳\Rightarrow a_۱=۱۳-۳=۱۰$$
$$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(۲a_۱+۱۹d)\xrightarrow[d=\frac{۱}{۲}]{a_۱=۱۰}۱۰\left(۲(۱۰)+۱۹\left(\frac{۱}{۲}\right)\right)$$
$$=۱۰\overbrace{(۲۰+۹/۵)}^{۲۹/۵}=۲۹۵$$

۸ |

$$\begin{cases}a_۷=۳۲\\ a_{۱۲}=۱۲\end{cases}\xrightarrow{a_n-a_m=(n-m)d}a_۷-a_{۱۲}=(۷-۱۲)d$$
$$\Rightarrow\overbrace{۳۲-۱۲}^{۲۰}=-۵d\Rightarrow d=-۴$$
$$a_۷=a_۱+۶d=۳۲\xrightarrow{d=(-۴)}a_۱+۶(-۴)=۳۲\Rightarrow a_۱=۳۲+۲۴=۵۶$$
$$\Rightarrow S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}(۲a_۱+۱۴d)=\frac{۱۵}{۲}(۲(۵۶)+۱۴(-۴))$$
$$=\frac{۱۵}{۲}(۱۱۲-۵۶)=\frac{۱۵}{\cancel{۲}}\times\overset{۲۸}{\cancel{۵۶}}=۴۲۰$$

۹

$+۶ \quad +۶$

$۳ , ۹ , ۱۵ , \ldots \Rightarrow a_۱ = ۳$ و $d = ۶$ دنبالهٔ حسابی با

می‌خواهیم مجموع جملات بیشتر از ۳۰۰ شود:

$$S_n > ۳۰۰ \Rightarrow \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d) > ۳۰۰$$

$$\Rightarrow \frac{n}{۲}(۲(۳) + (n-۱)(۶)) > ۳۰۰$$

$$\Rightarrow \frac{n}{۲}(۶ + ۶(n-۱)) > ۳۰۰ \xrightarrow{\text{فاکتور از } ۶} \frac{۶n}{۲}(\underbrace{۱ + n - ۱}_{n}) > ۳۰۰$$

$$\Rightarrow ۳n^۲ > ۳۰۰ \Rightarrow n^۲ > ۱۰۰ \Rightarrow n > ۱۰ \Rightarrow n \geq ۱۱$$

حداقل ۱۱ جمله را باید با هم جمع کنیم.

۱۰ | آ)

$$\begin{cases} a_۴ = ۳ \\ a_۷ = ۱۲ \end{cases} \xrightarrow{a_n - a_m = (n-m)d} a_۴ - a_۷ = (۴-۷)d$$

$$\Rightarrow ۳ - ۱۲ = (-۳)d \Rightarrow d = \frac{-۹}{-۳} = ۳$$

حالا با جای‌گذاری در رابطهٔ $a_۴$ یا $a_۷$، مقدار $a_۱$ را می‌یابیم:

$$a_۴ = a_۱ + ۳d = ۳ \Rightarrow a_۱ + ۳(۳) = ۳ \Rightarrow a_۱ = ۳ - ۹ = -۶$$

ب)

$$S_n < ۴۵۰ \Rightarrow \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d) < ۴۵۰$$

$$\xrightarrow[d=۳]{a_۱=-۶} \frac{n}{۲}(\underbrace{۲(-۶) + (n-۱)(۳)}_{۳n-۱۵}) < ۴۵۰$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور از } ۳} \frac{۳n}{۲}(n-۵) < ۴۵۰$$

$$\xrightarrow{\times \frac{۲}{۳}} n(n-۵) < ۳۰۰ \Rightarrow n^۲ - ۵n - ۳۰۰ < ۰$$

$$\Rightarrow (n-۲۰)(n+۱۵) < ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱۵ < n < ۲۰$$

$$\xrightarrow{n > ۰} n < ۲۰ \Rightarrow n \leq ۱۹$$

حداکثر ۱۹ جمله را می‌توانیم با هم جمع کنیم تا حاصل کم‌تر از ۴۵۰ شود.

۱۱

$$a_n = ۳ - ۲n \Rightarrow a_۱ = ۳ - ۲ = ۱$$

روش اول

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) = \frac{n}{۲}(۱ + ۳ - ۲n)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{۲}(-۲n + ۴) \xrightarrow{\text{فاکتور از } ۲} \frac{۲n}{۲}(-n + ۲) = n(۲ - n)$$

$$\Rightarrow S_{۱۵} = ۱۵(\underbrace{۲ - ۱۵}_{-۱۳}) = ۱۵ \times (-۱۳) = -۱۹۵$$

روش دوم

$$a_n = ۳ - ۲n \begin{cases} \xrightarrow{n=۱} a_۱ = ۳ - ۲ = ۱ \\ \xrightarrow{n=۱۵} a_{۱۵} = ۳ - ۲(۱۵) = ۳ - ۳۰ = -۲۷ \end{cases}$$

$$S_{۱۵} = \frac{۱۵}{۲}(a_۱ + a_{۱۵}) = \frac{۱۵}{۲}(۱ - ۲۷) = \frac{۱۵ \times (\underbrace{-۲۶}_{-۱۳})}{۲} = -۱۹۵$$

۱۲ | آ)

$$S_n = \frac{۶n^۲ - ۵n}{۱۲} \Rightarrow \begin{cases} S_۱ = a_۱ = \frac{۶ - ۵}{۱۲} = \frac{۱}{۱۲} \\ S_۲ = a_۱ + a_۲ = \frac{۶(۴) - ۵(۲)}{۱۲} = \frac{۱۴}{۱۲} \end{cases}$$

$$a_۲ = S_۲ - S_۱ = \frac{۱۴}{۱۲} - \frac{۱}{۱۲} = \frac{۱۳}{۱۲}$$

$$d = a_۲ - a_۱ = \frac{۱۳}{۱۲} - \frac{۱}{۱۲} = \frac{۱۲}{۱۲} = ۱$$

ب)

$$S_{۱۰} = \frac{۶(۱۰)^۲ - ۵(۱۰)}{۱۲} = \frac{۶۰۰ - ۵۰}{۱۲} = \frac{۵۵۰}{۱۲} = \frac{۲۷۵}{۶}$$

و یا:

$$S_{۱۰} = \frac{۱۰}{۲}(۲a_۱ + ۹d) = ۵(۲(\frac{۱}{۱۲}) + ۹(۱)) = ۵(\frac{۵۵}{۶}) = \frac{۲۷۵}{۶}$$

۱۳

$+d \quad +d$

$a_۱ , a_۲ , a_۳ , a_۴ , \cdots , a_{۲۰}$

$+۲d \quad +۲d$

بنابراین داریم:

۱۰ جمله از دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت $۲d$

$+۲d \quad +۲d$

$$\begin{cases} a_۱ + a_۳ + a_۵ + \cdots + a_{۱۹} = ۲۴۰ \\ a_۲ + a_۴ + a_۶ + \cdots + a_{۲۰} = ۲۷۰ \end{cases}$$

$+۲d \quad +۲d$

۱۰ جمله از دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_۲$ و قدرنسبت $۲d$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۱۰}{۲}(۲a_۱ + ۹(۲d)) = ۲۴۰ \\ \frac{۱۰}{۲}(۲\underbrace{a_۲}_{a_۱ + d} + ۹(۲d)) = ۲۷۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۵(۲a_۱ + ۱۸d) = ۲۴۰ \\ ۵(۲a_۱ + ۲d + ۱۸d) = ۲۷۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\div ۵} \begin{cases} ۲a_۱ + ۱۸d = ۴۸ \\ ۲a_۱ + ۲۰d = ۵۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}} ۲۰d - ۱۸d = ۵۴ - ۴۸$$

$$\Rightarrow ۲d = ۶ \Rightarrow d = ۳$$

$$\xrightarrow{۲a_۱ + ۱۸d = ۴۸} ۲a_۱ + ۱۸(۳) = ۴۸ \Rightarrow ۲a_۱ = ۴۸ - ۵۴ = -۶$$

$$\Rightarrow a_۱ = -۳$$

۱۴

$$\begin{cases} a_۱ + a_۲ + \cdots + a_۵ = ۲۵ \Rightarrow \frac{۵}{۲}(۲a_۱ + ۴d) = ۲۵ \\ a_۶ + \cdots + a_{۱۰} = ۱۰۰ \Rightarrow \frac{۵}{۲}(۲a_۶ + ۴d) = ۱۰۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۵}{۲} \times ۲(a_۱ + ۲d) = ۲۵ \Rightarrow ۵(a_۱ + ۲d) = ۲۵ \\ \frac{۵}{۲} \times ۲(a_۶ + ۲d) = ۱۰۰ \Rightarrow ۵(a_۱ + ۵d + ۲d) = ۱۰۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\div ۵} \begin{cases} a_۱ + ۲d = ۵ \\ a_۱ + ۷d = ۲۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}} ۷d - ۲d = ۲۰ - ۵ \Rightarrow ۵d = ۱۵$$

$$\Rightarrow d = ۳ \xrightarrow{a_۱ + ۲d = ۵} a_۱ + ۲(۳) = ۵ \Rightarrow a_۱ = ۵ - ۶ = -۱$$

۱۵ | آ) دنبالهٔ حسابی را با جمله اول $a_۱$ و قدرنسبت d در نظر می‌گیریم، داریم:

$$S_{۱۰} = \frac{۱۰}{۲}(۲a_۱ + ۹d) = ۵(۲a_۱ + ۹d)$$

حال اگر به قدرنسبت یک واحد اضافه کنیم، خواهیم داشت:

$$S'_{۱۰} = \frac{۱۰}{۲}(۲a_۱ + ۹(d+۱)) = \underbrace{۵(۲a_۱ + ۹d + ۹)}_{} = \underbrace{۵(۲a_۱ + ۹d)}_{S_{۱۰}} + ۴۵$$

$$\Rightarrow S'_{۱۰} - S_{۱۰} = ۴۵ \Rightarrow$$ ۴۵ واحد افزوده می‌شود.

ب) اگر $a_۱$ و $a_{۱۰}$ جملهٔ اول و دهم دنباله باشند، داریم:

$$S_{۱۰} = \frac{۱۰}{۲}(a_۱ + a_{۱۰})$$

حالا با دو برابر شدن جملات و دنباله، خواهیم داشت:

$S'_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}(\underbrace{۲a_۱+۲a_{۱۰}}_{\text{فاکتور از ۲}})=۲\left(\frac{۱۰}{۲}(a_۱+a_{۱۰})\right)=۲S_{۱۰}\Rightarrow$ ۲ برابر می‌شود.

۱۶

$$۱+۲+\cdots+n=\frac{۳}{۵}n^۲\Rightarrow\frac{n(n+۱)}{۲}=\frac{۳n^۲}{۵}$$

$$\Rightarrow\frac{n^۲+n}{۲}=\frac{۳n^۲}{۵}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}۵n^۲+۵n=۶n^۲$$

$$\Rightarrow n^۲-۵n=۰\Rightarrow n(n-۵)=۰\xrightarrow{n\neq۰}n=۵$$

۱۷ **روش اول** از نقطهٔ اول به $(n-۱)$ نقطهٔ دیگر وصل می‌کنیم $\Leftarrow (n-۱)$ پاره‌خط

از نقطهٔ دوم به $(n-۲)$ نقطهٔ دیگر (همه به غیر از نقطهٔ اول) وصل می‌کنیم. $\Leftarrow (n-۲)$ پاره‌خط

از نقطهٔ سوم به $(n-۳)$ نقطهٔ دیگر (همه به غیر از نقاط اول و دوم) وصل می‌کنیم.

$\Leftarrow (n-۳)$ پاره‌خط

با ادامهٔ این روند، تعداد پاره‌خط‌های ایجادشده برابر است با:

$۱+۲+\cdots+(n-۳)+(n-۲)+(n-۱)=$ تعداد کل پاره‌خط‌ها

$\Rightarrow$ مجموع $(n-۱)$ عدد طبیعی اولیه

$$\Rightarrow\text{تعداد پاره‌خط‌ها}=\frac{(n-۱)}{۲}(\overbrace{(n-۱)+۱}^{n})=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

می‌دانیم تعداد پاره‌خط‌ها ۵۵ تا است:

$$\Rightarrow\frac{n(n-۱)}{۲}=۵۵\Rightarrow n(n-۱)=۱۱۰$$

$$\Rightarrow n(n-۱)=۱۱\times۱۰\Rightarrow n=۱۱$$

روش دوم (ترکیبیات): برای داشتن هر پاره‌خط کافی است دو نقطه از آن را انتخاب کنیم، در نتیجه:

$$\text{تعداد پاره‌خط‌ها}=\binom{n}{۲}=۵۵\Rightarrow\frac{n(n-۱)}{۲}=۵۵$$

$$\Rightarrow n(n-۱)=۱۱۰=۱۱\times۱۰\Rightarrow n=۱۱$$

۱۸ با یک دنباله حسابی مواجه‌ایم که: $a_۱=۵۰۰\ ,\ d=۴۰$

می‌خواهیم مجموع خانوارهای تحت پوشش را پس از ۱۰ سال بیابیم:

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)\Rightarrow S_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}(۲a_۱+۹d)$$

$$=۵(۲(۵۰۰)+۹(۴۰))$$

$$\Rightarrow S_{۱۰}=۵(۱۰۰۰+۳۶۰)=۱۳۶۰\times۵=۶۸۰۰$$ خانوار

۱۹

مجموع توپ‌هایی که دونده در سبد انداخته ۵۵ تاست، بنابراین داریم:

$$۱+۲+۳+\cdots+n=۵۵\Rightarrow\frac{n(n+۱)}{۲}=۵۵$$

$$\Rightarrow n(n+۱)=۱۱۰=۱۰\times۱۱\Rightarrow n=۱۰$$

یعنی دونده تا ایستگاه ۱۰ اُم دویده است و مسافت طی‌شده توسط او برابر است با:

$$\begin{array}{l}\text{برای ایستگاه اول}=۲\times۲\\ \text{برای ایستگاه دوم}=۴\times۲\\ \text{برای ایستگاه سوم}=۶\times۲\\ \vdots\end{array}\quad\begin{array}{l}\nearrow+۴\\ \searrow+۴\end{array}$$

$$\xrightarrow[a_۱=۴,\,d=۴]{\text{دنبالهٔ حسابی}}S_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}(\overbrace{۲(۴)+۹(۴)}^{۱۱\times۴})=۵\times۴۴=۲۲۰\ \text{متر}$$

۲۰

$$\overset{\times\frac{۱}{۳}\quad\times\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۳}\ ,\ \frac{۱}{۹}\ ,\ \frac{۱}{۲۷}}\ ,\cdots\Rightarrow q=\frac{۱}{۳}\text{ و }a_۱=\frac{۱}{۳}$$ دنبالهٔ هندسی با

$$\Rightarrow S_{۱۰}=\frac{a_۱(q^{۱۰}-۱)}{q-۱}\underset{q=\frac{۱}{۳}}{\overset{a_۱=\frac{۱}{۳}}{=\!=}}\frac{\frac{۱}{۳}\left(\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۱۰}-۱\right)}{\frac{۱}{۳}-۱}=\frac{\frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۳^{۱۰}}-۱\right)}{-\frac{۲}{۳}}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۳}\left(\frac{۱-۳^{۱۰}}{۳^{۱۰}}\right)}{-\frac{۲}{۳}}=\frac{\frac{۱-۳^{۱۰}}{۳^{۱۱}}}{-\frac{۲}{۳}}=-\frac{\cancel{۳}(۱-۳^{۱۰})}{۲\times\cancel{۳^{۱۱}}^{۳^{۱۰}}}=\frac{۳^{۱۰}-۱}{۲\times۳^{۱۰}}$$

۲۱

$$\overset{\times\frac{۱}{۴}\quad\times\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۵}\ ,\ \frac{۱}{۲۰}\ ,\ \frac{۱}{۸۰}}\ ,\cdots\Rightarrow q=\frac{۱}{۴}\text{ و }a_۱=\frac{۱}{۵}$$ دنبالهٔ هندسی با

$$S_{۱۰}=\frac{a_۱(q^{۱۰}-۱)}{q-۱}\underset{q=\frac{۱}{۳}}{\overset{a_۱=\frac{۱}{۵}}{=\!=}}\frac{\frac{۱}{۵}\left(\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۱۰}-۱\right)}{\frac{۱}{۴}-۱}=\frac{\frac{۱}{۵}\left(\frac{۱}{۴^{۱۰}}-۱\right)}{-\frac{۳}{۴}}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۵}\left(\frac{۱-۴^{۱۰}}{۴^{۱۰}}\right)}{-\frac{۳}{۴}}=-\frac{۴(۱-۴^{۱۰})}{۳\times۵\times۴^{۱۰}}=\frac{(۴^{۱۰}-۱)}{۱۵\times۴^۹}$$

۲۲

$$\overset{\times(-۲)\quad\times(-۲)}{\frac{۱}{۸}\ ,\ \frac{-۱}{۴}\ ,\ \frac{۱}{۲}}\ ,\cdots\Rightarrow q=-۲\text{ و }a_۱=\frac{۱}{۸}$$ دنبالهٔ هندسی با

$$S_{۱۰}=\frac{a_۱(q^{۱۰}-۱)}{q-۱}\underset{q=(-۲)}{\overset{a_۱=\frac{۱}{۸}}{=\!=}}\frac{\frac{۱}{۸}((-۲)^{۱۰}-۱)}{-۲-۱}=\frac{\frac{۱}{۸}(۲^{۱۰}-۱)}{-۳}$$

$$=\frac{۱۰۲۴-۱}{-۳\times۸}=-\frac{\overset{۳۴۱}{\cancel{۱۰۲۳}}}{\cancel{۳}\times۸}=\frac{-۳۴۱}{۸}$$

۲۳

$$\overset{\times۲\quad\times۲\quad\times۲}{\frac{۱}{۲}\ ,\ ۱\ ,\ ۲\ ,\ ۴}\ ,\cdots,\ ۲۰۴۸\Rightarrow q=۲\text{ و }a_۱=\frac{۱}{۲}$$ دنبالهٔ هندسی با

حالا تعداد جملات دنباله را می‌یابیم:

$$a_n=۲۰۴۸\Rightarrow a_۱q^{n-۱}=۲۰۴۸\xrightarrow{a_۱=\frac{۱}{۲},q=۲}\frac{۱}{۲}\times۲^{n-۱}=۲۰۴۸$$

$$\Rightarrow۲^{n-۲}=۲^{۱۱}\Rightarrow n-۲=۱۱\Rightarrow n=۱۳$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}+1+2+4+\cdots+2048}_{S_{13}} = \frac{a_1(q^{13}-1)}{q-1} = \frac{\frac{1}{2}(2^{13}-1)}{\underbrace{2-1}_{1}} = \frac{2^{13}-1}{2}$$

$$= \frac{8192-1}{2} = \frac{8191}{2} = 4095/5$$

۲۴ دنبالهٔ هندسی با $a_1=-1$ و $q=3$ $\Rightarrow -1, -3, -9, \cdots, -729$ ($\times 3$ $\times 3$)

حالا تعداد جملات دنباله را می‌یابیم:

$$a_n=-729 \Rightarrow a_1q^{n-1}=-729 \Rightarrow (-1)3^{n-1}=-729 \Rightarrow 3^{n-1}=3^6$$

$$\Rightarrow n-1=6 \Rightarrow n=7$$

$$\Rightarrow \underbrace{-1-3-9-\cdots-729}_{S_7} = \frac{a_1(q^7-1)}{q-1} = \frac{(-1)(3^7-1)}{3-1}$$

$$= -\frac{1}{2}(2187-1) = -\frac{2186}{2} = -1093$$

۲۵ جملات دنباله در نگاه اول دنبالهٔ هندسی نمی‌سازند اما می‌توان ۲ تا دنبالهٔ هندسی از آن‌ها ساخت:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{729}-\frac{1}{128}$$

$$= \underbrace{\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{729}\right)}_{\text{هندسی با } a_1=1,\ q=\frac{1}{3},\ n=7} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{128}\right)}_{\text{هندسی با } a_1=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2},\ n=7}$$

$$= \frac{1\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^7\right)}{1-\frac{1}{3}} - \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{3^7}}{\frac{2}{3}} - \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^7}\right)}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{3^7-1}{3^7}}{\frac{2}{3}} - \left(1-\frac{1}{2^7}\right) = \frac{3^7-1}{2\times 3^6} - \frac{2^7-1}{2^7}$$

۲۶ دنبالهٔ هندسی با $a_1=6$ و $q=-2$ $\Rightarrow 6, -12, 24, \cdots$ ($\times(-2)$ $\times(-2)$)

$$S_n = a_1+a_2+\cdots+a_n = -126 \Rightarrow \frac{6(1-(-2)^n)}{1-(-2)} = -126$$

$$\Rightarrow \frac{\overset{2}{\cancel{6}}(1-(-2)^n)}{\underset{1}{\cancel{3}}} = -126 \Rightarrow 1-(-2)^n = \frac{-126}{2} = -63$$

$$\Rightarrow (-2)^n = 1-(-63) \Rightarrow (-2)^n = 64 \Rightarrow n=6$$

بنابراین مجموع ۶ جملهٔ دنباله (-126) خواهد شد.

۲۷ با یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $q=2$ سر و کار داریم، که $S_5=46/5$ می‌باشد بنابراین:

$$S_5=46/5 \Rightarrow \frac{a_1(q^5-1)}{q-1} = 46/5 \xrightarrow{q=2} \frac{a_1(2^5-1)}{2-1} = 46/5$$

$$\Rightarrow a_1(32-1) = 46/5 \Rightarrow 31a_1 = 46/5$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{46/5}{31} = \frac{\frac{93}{2}}{31} = \frac{\overset{3}{\cancel{93}}}{2\times\underset{1}{\cancel{31}}} = \frac{3}{2} = 1/5$$

۲۸

$$a_{15}=8a_{12} \xrightarrow{a_n=a_1q^{n-1}} a_1q^{14}=8a_1q^{11} \xrightarrow[\div a_1]{a_1\neq 0} q^{14}=8q^{11}$$

$$\Rightarrow \frac{q^{14}}{q^{11}}=8 \Rightarrow q^3=8 \Rightarrow q^3=2^3 \Rightarrow q=2$$

$$S_8=\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=\frac{a_1(1-2^8)}{1-2}=-a_1(1-256)$$

$$=-(-255)a_1=255a_1 \Rightarrow \frac{S_8}{a_1}=255$$

۲۹

$$S_{12}=9S_6 \Rightarrow \frac{\cancel{a_1}(1-q^{12})}{\cancel{1-q}}=9\frac{\cancel{a_1}(1-q^6)}{\cancel{1-q}}$$

$$\Rightarrow 1-q^{12}=9(1-q^6) \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \cancel{(1-q^6)}(1+q^6)=9\cancel{(1-q^6)}$$

$$\Rightarrow 1+q^6=9 \Rightarrow q^6=8 \Rightarrow q=\pm\sqrt{2}$$

۳۰ دنبالهٔ هندسی با $a_1=1$ و $q=2$ $\Rightarrow 1, 2, 4, \cdots$ ($\times 2$ $\times 2$)

$$\text{مجموع ۱۰ جملهٔ اول} = S_{10}=\frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1}=\frac{1(2^{10}-1)}{2-1}$$

$$=2^{10}-1=1024-1=1023$$

برای ادامه‌ی حل یکی از روش‌های زیر را به‌کار می‌گیریم:

روش اول *۱۰ جملهٔ دوم از a_{11} شروع و به a_{20} ختم می‌گردد، پس داریم:*

$$\text{مجموع ۱۰ جملهٔ دوم} = a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20} \overset{q=2}{=\!=} \frac{a_{11}(2^{10}-1)}{2-1}$$

$$= \frac{a_1q^{10}(1024-1)}{1} = 1\times 2^{10}(1023) = 1024\times 1023$$

روش دوم

$$\text{مجموع ۲۰ جملهٔ اول} = S_{20}=\frac{a_1(q^{20}-1)}{q-1}=\frac{1(2^{20}-1)}{2-1}=2^{20}-1$$

$$\text{مجموع ۱۰ جملهٔ دوم} = \text{مجموع ۲۰ جملهٔ اول} - \text{مجموع ۱۰ جملهٔ اول}$$

$$=(2^{20}-1)-(2^{10}-1)=2^{20}-2^{10}=2^{10}(2^{10}-1)=1024\times 1023$$

بنابراین:

$$\Rightarrow \frac{\text{مجموع ۱۰ جملهٔ دوم}}{\text{مجموع ۱۰ جملهٔ اول}} = \frac{1024\times\cancel{1023}}{\cancel{1023}} = 1024$$

روش سوم *در حالت کلی تر می‌توان نوشت:*

$$\frac{a_{11}+\cdots+a_{20}}{a_1+\cdots+a_{10}} = \frac{\frac{a_{11}(1-q^{10})}{\cancel{1-q}}}{\frac{a_1(1-q^{10})}{\cancel{1-q}}} = \frac{\cancel{a_1}q^{10}\cancel{(1-q^{10})}}{\cancel{a_1}\cancel{(1-q^{10})}} = q^{10}$$

$$\xrightarrow{q=2} \text{حاصل} = 2^{10} = 1024$$

۳۱ | **آ)**

$$a_1 = 3\times 2 = 6\ ,\ a_2 = 3\times 4 = 12 \Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = 2$$

$$S_5 = \frac{6(1-2^5)}{1-2} = \frac{6(1-32)}{-1} = (-6)(-31) = 6\times 31 = 186$$

ب)

$$S_n = 3066 \xrightarrow[q=2]{a_1=6} \frac{6(1-2^n)}{1-2} = 3066 \Rightarrow 6(2^n-1) = 3066$$

$$\Rightarrow 2^n - 1 = \frac{3066}{6} = 511 \Rightarrow 2^n = 512 = 2^9 \Rightarrow n = 9$$

۳۲ | مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی برابر است با:

$$S = \frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}$$

آ) جملهٔ اول را ۲ برابر می‌کنیم داریم:

$$S_{10} = \frac{(2a_1)(1-q^{10})}{1-q} = 2\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q} = 2S \Rightarrow$$ ۲ برابر می‌شود.

ب) اگر قدرنسبت را به توان ۲ برسانیم، داریم:

$$S_{10} = \frac{a_1(1-(q^2)^{10})}{1-q^2} = \frac{a_1(1-(q^{10})^2)}{1-q^2}$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{a_1(1-q^{10})}{(1-q)}\frac{(1+q^{10})}{(1+q)} = \frac{1+q^{10}}{1+q}S$$

(S)

۳۳ |

$$\underbrace{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}}_{n\text{ جمله}} \xrightarrow[\text{دنبالهٔ هندسی}]{\text{مجموع } n \text{ جملهٔ}} \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

($\times a$ ، $\times a$)

$$\xrightarrow[q=a]{a_1=1} \frac{1(a^n-1)}{a-1} = \frac{1-a^n}{1-a}$$

توجه کنید که در مرحلهٔ آخر صورت و مخرج را قرینه کردیم.

۳۴ | **روش اول** با توجه به درستی تساوی مسئلهٔ قبل، کافی است به جای a، $(-a)$ قرار دهیم:

$$1+(-a)+(-a)^2+\cdots+(-a)^{n-2}+(-a)^{n-1} = \frac{1-(-a)^n}{1-(-a)}$$

$$\xrightarrow{n\text{ فرد}} 1-a+a^2+\cdots-a^{n-2}+a^{n-1} = \frac{1+a^n}{1+a}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} a^n+1 = (a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+\cdots+a^2-a+1)$$

روش دوم

$$\underbrace{1}_{\times(-a)}\ \underbrace{-a}_{\times(-a)}\ +a^2+\cdots\underbrace{-a^{n-2}}_{\times(-a)}+a^{n-1} \xrightarrow[q=(-a)]{\text{دنبالهٔ هندسی}} \frac{1(1-(-a)^n)}{1-(-a)}$$

$$\xrightarrow{n\text{فرد}} \frac{1+a^n}{1+a}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} a^n+1 = (a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+\cdots+a^2-a+1)$$

۳۵ |

$$x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}$$

($\times\frac{y}{x}$ ، $\times\frac{y}{x}$)

$$\xrightarrow[q=\frac{y}{x}]{\text{دنبالهٔ هندسی}} \frac{x^{n-1}\left(\left(\frac{y}{x}\right)^n-1\right)}{\frac{y}{x}-1} = \frac{x^{n-1}\left(\frac{y^n-x^n}{x^n}\right)}{\frac{y-x}{x}}$$

$$= \frac{\frac{y^n-x^n}{x}}{\frac{y-x}{x}} \xrightarrow[\text{نزدیک در نزدیک}]{\text{دور در دور}} \frac{x(y^n-x^n)}{x(y-x)} = \frac{x^n-y^n}{x-y}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^n-y^n = (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+y^{n-1})$$

۳۶ | در مربع اول (بزرگ‌ترین مربع) مساحت قسمت رنگی $\frac{1}{8}$ مساحت مربع است. به همین ترتیب در هر مرحله، مساحت قسمت رنگی از هر مربع، $\frac{1}{8}$ مساحت همان مربع است.

بنابراین اگر a_n مساحت مثلث رنگی در مربع n ام باشد، چون مساحت مربع‌ها هر بار نصف می‌گردد، داریم:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{8}\overbrace{(1)}^{\text{مساحت مربع اول}} \\ a_2 = \frac{1}{8}\overbrace{\left(\frac{1}{2}\times 1\right)}^{\text{مساحت مربع دوم}} \\ a_3 = \frac{1}{8}\overbrace{\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1\right)}^{\text{مساحت مربع سوم}} \\ \vdots \end{cases}$$

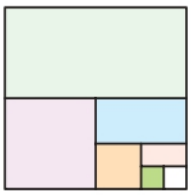
$\Rightarrow$ دنبالهٔ هندسی با $a_1=\frac{1}{8}$ و قدرنسبت $q=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \text{مساحت رنگی} = S_7 = a_1+a_2+\cdots+a_7 = \frac{a_1(q^7-1)}{q-1}$$

$$= \frac{\frac{1}{8}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^7-1\right)}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2^7}-1\right)}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{8}\left(\frac{1-2^7}{2^7}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1-128}{128}\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{-127}{128}\right) = \frac{127}{4\times 128} = \frac{127}{512}$$

۳۷ | اگر a_n مساحت رنگ شده در هر مرحله باشد، داریم:



$$a_1 = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{باقی‌مانده}} \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \xrightarrow{\text{باقی‌مانده}} \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\vdots$$

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

۳۸ | میزان کاهش ذرات در هر مرحله به‌صورت زیر است:

مرحلهٔ اول: $\frac{1}{2}$ ، مرحلهٔ دوم: $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ ، مرحلهٔ سوم: $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ ، ...

$\Rightarrow$ مرحلهٔ n ام $=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

بنابراین پس از n مرحله میزان کاهش ذرات برابر است با:

$$S_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[q=\frac{1}{2}]{a_1=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

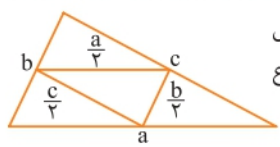
حالا می‌خواهیم میزان کاهش ذرات حداقل ۹۶ درصد باشد:

$$S_n\geq\frac{96}{100}\Rightarrow 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\geq\frac{96}{100}\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^n\leq\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2^n}\leq\frac{1}{25}\Rightarrow 2^n\geq 25\Rightarrow n\geq 5$$

بنابراین حداقل ۵ صافی نیاز است.

۳۹ | بنابه قضیهٔ تالس، در هر بار طول اضلاع مثلث ایجادشده نصف طول اضلاع مثلث قبل است، بنابراین:



محیط مثلث اول: $a_1=a+b+c=p$

محیط مثلث دوم: $a_2=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}=\frac{1}{2}p$

محیط مثلث سوم: $a_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}p\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2 p$

$\vdots$

محیط مثلث n اُم: $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}p$

$$S_{10}=p+\frac{1}{2}p+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^9 p \xrightarrow[q=\frac{1}{2}]{a_1=p} \frac{p\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

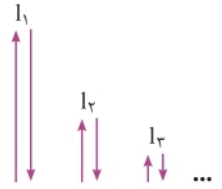
$$=2p\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)$$

$$\Rightarrow S_{10}=2p\left(\frac{2^{10}-1}{2^{10}}\right)=\frac{2^{10}-1}{2^9}p=\frac{1024-1}{512}p=\frac{1023}{512}p$$

بنابراین مجموع محیط‌ها $\frac{1023}{512}$ برابر p است.

۴۰ | ارتفاع‌هایی که توپ پس از هر بار زمین خوردن بالا می‌آید، یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $q=\frac{1}{3}$ تشکیل می‌دهد:

$$\begin{cases} l_1=9 \\ l_2=\frac{1}{3}l_1 \\ l_3=\frac{1}{3}l_2=\left(\frac{1}{3}\right)^2 l_1 \\ \vdots \\ l_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}l_1 \end{cases}$$



مسافت طی‌شده $=2(l_1+l_2+\cdots+l_6)=2S_6=2\times\frac{l_1(q^6-1)}{q-1}$

$$\xrightarrow[l_1=9]{q=\frac{1}{3}} 2\times\frac{9\left(\left(\frac{1}{3}\right)^6-1\right)}{\frac{1}{3}-1}=2\times 9\frac{\frac{1-3^6}{3^6}}{-\frac{2}{3}}=-2\times 9\frac{3(1-3^6)}{2\times 3^6}$$

$$=-\frac{3^2\times(1-729)}{3^3}=-\frac{1-729}{27}=\frac{729-1}{27}=\frac{728}{27}\simeq 26/96 \text{ متر}$$

۴۱ |

$a_1=30000$

$a_2=a_1+0/1a_1=(1/1)a_1$

$a_3=a_2+0/1a_2=(1/1)a_2=(1/1)^2 a_1$

$\vdots$

$a_n=(1/1)^{n-1}a_1$

بنابراین با یک دنبالهٔ هندسی با $a_1=30000$ و $q=(1/1)$ مواجه هستیم:

$$S_7=\frac{a_1(1-q^7)}{1-q}=\frac{30000(1-(1/1)^7)}{-0/1}=300000((1/1)^7-1)$$

$$=300000(1/95-1)=300000\times 0/95=3000\times 95=285000 \text{ تومان}$$

۴۲ | آ) قطر $d_1=1$

$d_2=d_1-0/5d_1=0/5d_1=0/5$

$d_3=d_2-0/5d_2=0/5d_2=(0/5)^2$

$\vdots$

بنابراین قطر نیم‌دایره‌ها تشکیل یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $q=0/5$ می‌دهند.

فاصلهٔ سنگ و کودک $=d_1+d_2+\cdots+d_5=S_5=\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}$

$$=\frac{1(1-(0/5)^5)}{1-0/5}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{32}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{31}{32}}{\frac{1}{2}}=\frac{2\times 31}{32}=\frac{31}{16}\simeq 1/93 \text{ متر}$$

ب)

$$P_1 = \text{محیط نیم‌دایرهٔ اول} = \frac{1}{2}(\pi d_1) = \frac{\pi}{2} d_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(\pi d_2) = \frac{\pi}{2} d_2 = \frac{\pi}{2}(0/5) \quad \times(0/5)$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(\pi d_3) = \frac{\pi}{2}(0/5)^2 \quad \times(0/5)$$

$$\Rightarrow \text{مسافت پیموده‌شده توسط سنگ} = P_1 + P_2 + \cdots + P_5$$

$$\xrightarrow[q=\frac{1}{2}]{P_1=\frac{\pi}{2}} S_5 = \frac{\frac{\pi}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} \times \frac{31}{16}$$

$$= \frac{31}{32}\pi = \frac{31 \times \overset{0/1}{3/2}}{32} = 3/1 \text{ متر}$$

۴۳ | دنبالهٔ تعداد سکه‌های کادو گرفته برابر است با:

$$1, 2, 4, 8, \cdots$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل سکه‌ها تا ۱۰ سالگی} = S_{10} = \frac{a_1(1-q^{10})}{1-q} = \frac{1(1-2^{10})}{1-2}$$

$$= \overbrace{-1023}^{-1} = -(1-2^{10}) = 1023$$

$$\text{بهای کل} = 1023 \times 10000 = 10,230,000 \text{ تومان}$$

۴۴ | تعداد کل گندم‌های جایزهٔ مخترع برابر است با:

$$\underbrace{1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{64}}_{\text{دنبالهٔ هندسی با } q=2} = S_{65} \xrightarrow[q=2]{a_1=1} \frac{1(2^{65}-1)}{2-1} = 2^{65}-1$$

از طرفی داریم:

$$2^{10} \simeq 1000 \Rightarrow 2^{10} \simeq 10^3 \xrightarrow{\text{توان } 6} 2^{60} \simeq (10^3)^6 = 10^{18}$$

$$\Rightarrow \text{وزن کل گندم‌های جایزه گرفته} = (2^{65}-1) \times 1 \simeq 2^5 \times 10^{18} = 32 \times 10^{18}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$1 \text{ میلیارد تن} = 10^9 \times 1000 \times 1000 \text{ گرم} = 10^{15}$$

بنابراین جایزهٔ مخترع تقریباً ۳۲۰۰۰ میلیارد تن گندم است.

۴۵ | آ)

$$6x^2 - 30x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور از } 6x} 6x(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$$

ب)

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}} (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

پ)

$$(x-3)^2 - 16 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 4^2 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} x - 3 = \pm 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3 = 4 \Rightarrow x = 7 \\ x-3 = -4 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

ت)

$$x^2 + 6x - 7 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x = 7 \xrightarrow{+\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 9} \overbrace{x^2 + 6x + 9}^{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}} = 7 + 9$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 = 16 \Rightarrow x + 3 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} x+3 = 4 \Rightarrow x = 1 \\ x+3 = -4 \Rightarrow x = -7 \end{cases}$$

ث)

$$4x^2 + 12x + 5 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 12x = -5$$

$$\xrightarrow{\div 4} x^2 + 3x = -\frac{5}{4} \xrightarrow{+\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}} \overbrace{x^2 + 3x + \frac{9}{4}}^{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}} = \frac{-5}{4} + \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 1 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} \begin{cases} x + \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ x + \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

ج)

$$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(2) = 25 - 16 = 9 \Rightarrow x = \frac{5 \pm 3}{2(2)} = \begin{cases} \frac{8}{4} = 2 \\ \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

چ) $\Delta = 3^2 - 4(5) = 9 - 20 < 0 \Rightarrow$ معادله ریشه ندارد.

۴۶ | روش اول

$$a + b + c = 2 + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0$$

بنابراین مجموع ضرایب صفر است و داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2} \times \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-2} = \frac{(\sqrt{2}-2)^2}{2-4} = -\frac{(\sqrt{2}-2)^2}{2} \end{cases}$$

روش دوم

$$\Delta = (-2\sqrt{2})^2 - 4\underbrace{(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}-2)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = 4 \times 2 - 4\underbrace{(2-4)}_{-2} = 8 + 8 = 16$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{16}}{2(2+\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{2} \pm 4}{2(2+\sqrt{2})} = \frac{2(\sqrt{2} \pm 2)}{2(2+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \pm 2}{2+\sqrt{2}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+2} \\ \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2} \times \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{(\sqrt{2}-2)^2}{\underbrace{2-4}_{-2}} = -\frac{(\sqrt{2}-2)^2}{2} \end{cases}$$

۴۷ | روش اول

$$a + c = 2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + 2 = 4 = b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{\sqrt{2}+2}{2-\sqrt{2}} \times \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = -\frac{(2+\sqrt{2})^2}{2} \end{cases}$$

روش دوم

$$\Delta = 4^2 - 4\overbrace{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+2)}^{\text{اتحاد مزدوج}} = 16 - 4\overbrace{(4-2)}^{+2} = 16 - 8 = 8$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2(2-\sqrt{2})} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2(2-\sqrt{2})} = \begin{cases} \frac{2(-2+\sqrt{2})}{2(2-\sqrt{2})} \\ \frac{2(-2-\sqrt{2})}{2(2-\sqrt{2})} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{-(2-\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})} = -1 \\ \frac{(-2-\sqrt{2})}{2-\sqrt{2}} \times \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{-(\sqrt{2}+2)^2}{4-2} = -\frac{(\sqrt{2}+2)^2}{2} \end{cases}$$

۴۸

عبارت $(x^۲-۴)^۲$ تکرار شده و معادله را ترسناک کرده است پس شکل آن را عوض می‌کنیم تا معادله‌ی مهربان‌تری داشته باشیم:

$$۴-x^۲=t\Rightarrow t^۲-۲t-۱۵=۰$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله‌ی مشترک}}(t-۵)(t+۳)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=۵\Rightarrow ۴-x^۲=۵\Rightarrow x^۲=-۱\Rightarrow \text{معادله ریشه ندارد.}\\ t=-۳\Rightarrow ۴-x^۲=-۳\Rightarrow x^۲=۷\Rightarrow x=\pm\sqrt{۷}\end{cases}$$

۴۹

$$\frac{x^۲}{۲}-۱=t\Rightarrow t^۲+t-۲=۰\Rightarrow(t+۲)(t-۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=-۲\Rightarrow \frac{x^۲}{۲}-۱=-۲\Rightarrow \frac{x^۲}{۲}=-۱\Rightarrow x^۲=-۲\Rightarrow \text{ریشه ندارد.}\\ t=۱\Rightarrow \frac{x^۲}{۲}-۱=۱\Rightarrow \frac{x^۲}{۲}=۲\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=\pm۲\end{cases}$$

۵۰

دقت کنید که اینجا $(x^۲-۱)^۲$ تکرار شده‌ها !!! اون توان ۲ یادتون نره.

$$(x^۲-۱)^۲=t\Rightarrow t^۲+t-۲=۰\Rightarrow(t+۲)(t-۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=-۲\Rightarrow (x^۲-۱)^۲=-۲\Rightarrow \text{ریشه ندارد.}\\ t=۱\Rightarrow (x^۲-۱)^۲=۱\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۱=۱\Rightarrow x^۲=۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}\\ x^۲-۱=-۱\Rightarrow x^۲=۰\Rightarrow x=۰\end{cases}\end{cases}$$

۵۱

$$\frac{x^۲}{۳}-۲=t\Rightarrow t^۲-۱۱t+۱۰=۰\Rightarrow(t-۱)(t-۱۰)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=۱\\ t=۱۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x^۲}{۳}-۲=۱\Rightarrow \frac{x^۲}{۳}=۳\Rightarrow x^۲=۹\Rightarrow x=\pm۳\\ \frac{x^۲}{۳}-۲=۱۰\Rightarrow \frac{x^۲}{۳}=۱۲\Rightarrow x^۲=۳۶\Rightarrow x=\pm۶\end{cases}$$

۵۲

$$x^۲-۳x-۵=۰\Rightarrow a=۱,\ b=-۳,\ c=-۵$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{-(-۳)}{۱}=۳\\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-۵}{۱}=-۵\end{cases}$$

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{۳}{۵}$$

۵۳

$$۲x^۲-۸x+۱=۰\Rightarrow a=۲,\ b=-۸,\ c=۱$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(-۸)}{۲}=۴\\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\frac{۱}{\alpha+۱}+\frac{۱}{\beta+۱}=\frac{\beta+۱+\alpha+۱}{(\alpha+۱)(\beta+۱)}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)+۲}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+۱}=\frac{۴+۲}{\frac{۱}{۲}+۴+۱}=\frac{۶}{\frac{۱۱}{۲}}=\frac{۱۲}{۱۱}$$

۵۴ | آ)

$$x^۲-۵x+۱=۰\Rightarrow a=۱,\ b=-۵,\ c=۱\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{-(-۵)}{۱}=۵\\ \alpha\beta=\frac{۱}{۱}=۱\end{cases}$$

$$\alpha^۳\beta+\alpha\beta^۳=\alpha\beta(\alpha^۲+\beta^۲)=\alpha\beta((\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta)$$

$$\xrightarrow[\alpha+\beta=۵]{\alpha\beta=۱}۱(۵^۲-۲(۱))=۲۵-۲=۲۳$$

ب)

$$\frac{\alpha^۲}{\beta}+\frac{\beta^۲}{\alpha}=\frac{\overbrace{\alpha^۳+\beta^۳}^{\text{چاق و لاغر}}}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^۲+\beta^۲-\alpha\beta)}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)((\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta-\alpha\beta)}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)((\alpha+\beta)^۲-۳\alpha\beta)}{\alpha\beta}$$

$$\xrightarrow[\alpha+\beta=۵]{\alpha\beta=۱}\frac{۵(۵^۲-۳(۱))}{۱}=۵(۲۵-۳)=۵\times۲۲=۱۱۰$$

۵۵

$$۲x^۲-۵x-۶=۰\Rightarrow a=۲,\ b=-۵,\ c=-۶$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{۵}{۲}\\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{۶}{۲}=-۳\end{cases}$$

$$(\alpha-\beta)^۲=\alpha^۲+\beta^۲-۲\alpha\beta=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta-۲\alpha\beta$$

$$=(\alpha+\beta)^۲-۴\alpha\beta=\left(\frac{۵}{۲}\right)^۲-۴(-۳)=\frac{۲۵}{۴}+۱۲=\frac{۲۵+۴۸}{۴}=\frac{۷۳}{۴}$$

۵۶

$$x^۲-۴x+۱=۰\Rightarrow a=۱,\ b=-۴,\ c=۱$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۴\\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow\alpha^۲+\frac{۱}{\alpha}+\beta^۲+\frac{۱}{\beta}=(\alpha^۲+\beta^۲)+\left(\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}\right)$$

$$=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=۴^۲-۲(۱)+\frac{۴}{۱}=۱۶-۲+۴=۱۸$$

۵۷ | آ)

$$x^۲-\sqrt{۲}x-۳=۰\Rightarrow a=۱,\ b=-\sqrt{۲},\ c=-۳$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\sqrt{۲}\\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=-۳\end{cases}$$

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha^۲+\beta^۲}=\frac{\alpha+\beta}{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}=\frac{\sqrt{۲}}{(\sqrt{۲})^۲-۲(-۳)}=\frac{\sqrt{۲}}{۲+۶}=\frac{\sqrt{۲}}{۸}$$

ب)

$$x^۲-\sqrt{۲}x-۳=۰\Rightarrow\alpha+\beta=\sqrt{۲},\ \alpha\beta=-۳$$

$$\overbrace{\alpha^۳+\beta^۳}^{\text{چاق و لاغر}}=(\alpha+\beta)(\alpha^۲+\beta^۲-\alpha\beta)=\sqrt{۲}\overbrace{((\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta-\alpha\beta)}^{(\alpha+\beta)^۲-۳\alpha\beta}$$

$$=\sqrt{۲}(\sqrt{۲}^۲-۳(-۳))=\sqrt{۲}(۲+۹)=۱۱\sqrt{۲}$$

۵۸ |
$x^۲ - ۷x + ۴ = ۰$

$$\begin{cases} \alpha+\beta = -\frac{b}{a} = ۷ \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = ۴ \end{cases}$$

$$\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}\,(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}) = \sqrt{\alpha\beta}\,(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})$$

بنابراین باید $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ را محاسبه کنیم.

برای این‌که رادیکال‌ها از بین بره چاره‌ای جز به‌توان رسوندن نداریم:

$$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^۲ = \alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta} = ۷+۲\sqrt{۴} = ۷+۲(۲) = ۱۱$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}>۰} \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} = \sqrt{۱۱}$$

در نتیجه داریم:

$$\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha\beta}\,(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}) = \sqrt{۴}\,(\sqrt{۱۱}) = ۲\sqrt{۱۱}$$

۵۹ | روش اول

$$۲x^۲ - mx - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ + x_۲ = \frac{-(-m)}{۲} = \frac{m}{۲} \\ x_۱x_۲ = \frac{-۲}{۲} = -۱ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x_۱=۲} \begin{cases} ۲ + x_۲ = \frac{m}{۲} \\ ۲x_۲ = -۱ \Rightarrow x_۲ = \frac{-۱}{۲} : \text{ریشهٔ دیگر} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲ + (-\tfrac{۱}{۲}) = \frac{m}{۲} \Rightarrow \frac{m}{۲} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow m = ۳$$

روش دوم ریشهٔ معادله در معادله صدق می‌کند:

$$۲x^۲ - mx - ۲ = ۰ \xrightarrow{x=۲} ۲(۲)^۲ - m(۲) - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow ۸ - ۲m - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲m = ۶ \Rightarrow m = ۳$$

با جای‌گذاری $m = ۳$ در معادله داریم:

$$۲x^۲ - ۳x - ۲ = ۰$$

$$\Delta = (-۳)^۲ - ۴(۲)(-۲) = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow x = \frac{-(-۳) \pm \sqrt{۲۵}}{۲(۲)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{۳+۵}{۴} = \frac{۸}{۴} = ۲ \\ x_۲ = \frac{۳-۵}{۴} = \frac{-۲}{۴} = \frac{-۱}{۲} : \text{ریشهٔ دیگر} \end{cases}$$

۶۰ |

$$۲x^۲ - (m+۱)x - (m^۲+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ + x_۲ = \frac{m+۱}{۲} \\ x_۱x_۲ = -\frac{m^۲+۱}{۲} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x_۱=-۱} \begin{cases} -۱ + x_۲ = \frac{m+۱}{۲} \Rightarrow x_۲ = ۱ + \frac{m+۱}{۲} = \frac{۳+m}{۲} \\ -x_۲ = -\frac{m^۲+۱}{۲} \Rightarrow x_۲ = \frac{m^۲+۱}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۳+m}{۲} = \frac{m^۲+۱}{۲} \Rightarrow m^۲ + ۱ = ۳ + m \Rightarrow m^۲ - m - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (m+۱)(m-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = -۱ \Rightarrow x_۲ = ۱ \\ m = ۲ \Rightarrow x_۲ = \frac{۵}{۲} \end{cases}$$

۶۱ |
$x^۲ - ۶x + m = ۰ \Rightarrow a = ۱,\ b = -۶,\ c = m$

آ) $x_۱ = x_۲ \Rightarrow \Delta = ۰ \Rightarrow (-۶)^۲ - ۴m = ۰ \Rightarrow ۳۶ = ۴m \Rightarrow m = ۹$

ب) $x_۱ + x_۲ = -\frac{b}{a} = ۶ \xrightarrow{x_۱=x_۲+۴} x_۲ + ۴ + x_۲ = ۶$

$$\Rightarrow ۲x_۲ + ۴ = ۶ \Rightarrow ۲x_۲ = ۲ \Rightarrow x_۲ = ۱,\ x_۱ = ۱+۴ = ۵$$

$$\Rightarrow x_۱x_۲ = ۵ \xrightarrow{x_۱x_۲=\frac{c}{a}} \frac{m}{۱} = ۵ \Rightarrow m = ۵$$

پ) $x_۱ + x_۲ = ۶ \xrightarrow{x_۱=۵x_۲} ۵x_۲ + x_۲ = ۶ \Rightarrow ۶x_۲ = ۶$

$$\Rightarrow x_۲ = ۱ \Rightarrow x_۱ = ۵ \Rightarrow x_۱.x_۲ = ۵ \Rightarrow m = ۵$$

۶۲ | آ) $x_۱ = \frac{۱}{x_۲} \Rightarrow x_۱x_۲ = ۱ \Rightarrow \frac{c}{a} = ۱ \Rightarrow \frac{۴}{k} = ۱ \Rightarrow k = ۴$

ب) $x_۱ = \frac{-۱}{x_۲} \Rightarrow x_۱x_۲ = -۱ \Rightarrow \frac{c}{a} = -۱ \Rightarrow \frac{۴}{k} = -۱ \Rightarrow k = -۴$

۶۳ | $x_۱ = ۳x_۲ \quad (*)$

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ = -\frac{b}{a} = \frac{۴}{m} \xrightarrow{(*)} ۳x_۲ + x_۲ = \frac{۴}{m} \\ \Rightarrow ۴x_۲ = \frac{۴}{m} \Rightarrow x_۲ = \frac{۱}{m} \\ x_۱x_۲ = \frac{c}{a} = \frac{۱}{m} \xrightarrow{(*)} (۳x_۲)(x_۲) = \frac{۱}{m} \Rightarrow ۳x_۲^۲ = \frac{۱}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۳(\tfrac{۱}{m})^۲ = \frac{۱}{m} \Rightarrow \frac{۱}{m}\left(۳(\tfrac{۱}{m}) - ۱\right) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{m} = ۰ \\ \frac{۳}{m} = ۱ \Rightarrow m = ۳ \end{cases}$$

۶۴ | $x_۱ = x_۲ + ۲ \quad (*)$

$$x_۱ + x_۲ = -\frac{b}{a} = -\frac{-۸}{۲} = ۴ \xrightarrow{(*)} x_۲ + ۲ + x_۲ = ۴ \Rightarrow ۲x_۲ + ۲ = ۴$$

$$\Rightarrow ۲x_۲ = ۲ \Rightarrow x_۲ = ۱ \Rightarrow x_۱ = ۳$$

$$x_۱x_۲ = \frac{c}{a} \Rightarrow ۳(۱) = \frac{m}{۲} \Rightarrow m = ۲ \times ۳ = ۶$$

۶۵ | $x^۲ + mx - ۳ = ۰ \Rightarrow \alpha + \beta = -m,\ \alpha\beta = -۳$

از طرفی داریم:

$$۲\alpha + \beta = ۴ \Rightarrow \alpha + \overbrace{(\alpha+\beta)}^{-m} = ۴ \Rightarrow \alpha - m = ۴ \Rightarrow \alpha = ۴ + m$$

$$\Rightarrow \beta = ۴ - ۲\alpha = ۴ - ۲(۴+m) = ۴ - ۸ - ۲m = -۴ - ۲m$$

$$\alpha\beta = -۳ \Rightarrow (۴+m)(-۴-۲m) = -۳$$

$$\Rightarrow -۱۶ - ۸m - ۴m - ۲m^۲ = -۳ \Rightarrow ۲m^۲ + ۱۲m + ۱۳ = ۰$$

۶۶ | $x^۲-(a+۲)x+a+۱=۰ \Rightarrow \alpha+\beta=a+۲\ ,\ \alpha\beta=a+۱$

$$\frac{\beta+۱+\alpha+۱}{(\alpha+۱)(\beta+۱)}=\frac{۵}{۶} \Rightarrow \frac{\alpha+\beta+۲}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+۱}=\frac{۵}{۶}$$

$$\Rightarrow \frac{a+۲+۲}{a+۱+a+۲+۱}=\frac{۵}{۶} \Rightarrow \frac{a+۴}{۲a+۴}=\frac{۵}{۶}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} ۶(a+۴)=۵(۲a+۴) \Rightarrow ۶a+۲۴=۱۰a+۲۰$$

$$\Rightarrow ۱۰a-۶a=۲۴-۲۰ \Rightarrow ۴a=۴ \Rightarrow a=۱$$

۶۷ | $x^۲-۳mx+۴=۰ \Rightarrow \alpha+\beta=۳m\ ,\ \alpha\beta=۴$

$$\alpha\beta^۲+۴=۰ \Rightarrow (\overbrace{\alpha\beta}^{۴})\beta+۴=۰ \Rightarrow ۴\beta+۴=۰ \Rightarrow ۴\beta=-۴$$

$$\Rightarrow \beta=-۱ \xrightarrow{\alpha\beta=۴} -\alpha=۴ \Rightarrow \alpha=-۴$$

بنابراین داریم:

$$\Rightarrow \alpha+\beta=-۴-۱ \Rightarrow \overbrace{-\frac{-۳m}{۱}}^{۳m}=-۵ \Rightarrow m=\frac{-۵}{۳}$$

۶۸ | روش اول

$$(x-\overbrace{(۱+\sqrt{۲})}^{\alpha})(x-\overbrace{(۱-\sqrt{۲})}^{\beta})=۰$$

$$\Rightarrow (x-۱-\sqrt{۲})(x-۱+\sqrt{۲})=۰ \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x-۱)^۲-\sqrt{۲}^۲=۰$$

$$\Rightarrow x^۲-۲x+۱-۲=۰ \Rightarrow x^۲-۲x-۱=۰$$

روش دوم

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta=(۱+\sqrt{۲})+(۱-\sqrt{۲})=۲ \\ P=\alpha\beta=(۱+\sqrt{۲})(۱-\sqrt{۲})=۱-۲=-۱ \end{cases}$$

$$x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-۲x-۱=۰$$

۶۹ | $۴x^۲-۵x-۵=۰ \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{-(-۵)}{۴}=\frac{۵}{۴}\ ,\ \alpha\beta=\frac{-۵}{۴}$

$$\begin{cases} S=۲\alpha+۲\beta=۲(\alpha+\beta)=۲(\frac{۵}{۴})=\frac{۵}{۲} \\ P=(۲\alpha)(۲\beta)=۴\alpha\beta=۴(\frac{-۵}{۴})=-۵ \end{cases}$$

$$x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-\frac{۵}{۲}x-۵=۰$$

۷۰ | $x^۲-۲x-۱=۰ \Rightarrow \alpha+\beta=۲\ ,\ \alpha\beta=-۱$

$$\begin{cases} S=\frac{۱}{\alpha+۱}+\frac{۱}{\beta+۱}=\frac{\beta+۱+\alpha+۱}{(\alpha+۱)(\beta+۱)}=\frac{(\alpha+\beta)+۲}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+۱} \\ \xrightarrow[\alpha\beta=-۱]{\alpha+\beta=۲} \frac{۲+۲}{-۱+۲+۱}=\frac{۴}{۲}=۲ \\ P=(\frac{۱}{\alpha+۱})(\frac{۱}{\beta+۱})=\frac{۱}{\alpha\beta+\alpha+\beta+۱}=\frac{۱}{-۱+۲+۱}=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-۲x+\frac{۱}{۲}=۰$$

$$\Delta=۱۴۴-۴(۲)(۱۳)=۱۴۴-۱۰۴=۴۰$$

$$\Rightarrow m=\frac{-۱۲\pm\sqrt{۴۰}}{۲(۲)}=\frac{۲(-۶\pm\sqrt{۱۰})}{۴}=\frac{-۶\pm\sqrt{۱۰}}{۲}$$

۷۱ | اگر ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ را α و β بگیریم:

$$\alpha,\beta=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}\ ;\ \Delta=b^۲-۴ac$$

از طرفی ریشه‌های معادلهٔ $cx^۲+bx+a=۰$ عبارتند از:

$$\Delta=b^۲-۴ac \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲c} \xrightarrow{\div ۲a} \frac{\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}}{\frac{۲c}{۲a}}=\frac{\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}}{\frac{c}{a}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱=\frac{\alpha}{\frac{c}{a}}=\frac{\alpha}{\alpha\beta}=\frac{۱}{\beta} \\ x_۲=\frac{\beta}{\frac{c}{a}}=\frac{\beta}{\alpha\beta}=\frac{۱}{\alpha} \end{cases}$$

۷۲ |

$$\begin{cases} S=x_۱+x_۲=\frac{۱}{۲} \\ P=x_۱x_۲=-\frac{۵}{۱۸} \end{cases} \xrightarrow[x^۲-Sx+P=۰]{\text{تشکیل معادله}} x^۲-\frac{۱}{۲}x-\frac{۵}{۱۸}=۰$$

$$\xrightarrow{\times ۱۸} ۱۸x^۲-۹x-۵=۰$$

$$\Delta=۸۱+۴(۱۸)(۵)=۸۱+۳۶۰=۴۴۱=۹\times۴۹=(۲۱)^۲$$

$$\Rightarrow x=\frac{-(-۹)\pm\sqrt{۴۴۱}}{۲(۱۸)}=\frac{۹\pm۲۱}{۳۶}=\begin{cases} \frac{۳۰}{۳۶}=\frac{۵}{۶} \\ \frac{-۱۲}{۳۶}=\frac{-۱}{۳} \end{cases}$$

۷۳ | $x^۲+x-۵=۰$

$$\begin{cases} \Delta=۱-۴(۱)(-۵)=۲۱>۰ \Rightarrow \text{معادله ۲ ریشه دارد.} \\ P=\frac{c}{a}=-۵<۰ \Rightarrow \text{۲ ریشه، هم‌علامت نیستند.} \\ S=-\frac{b}{a}=-۱<۰ \Rightarrow \text{قدرمطلق ریشهٔ منفی، از ریشهٔ مثبت بزرگ‌تر است.} \end{cases}$$

۷۴ |

$$۳x^۲-x-۴=۰ \xrightarrow[P=\frac{-۴}{۳}<۰]{\Delta=(-۱)^۲-۴(۳)(-۴)=۴۹>۰} \text{دو ریشه هم‌علامت نیستند.}$$

$$\xrightarrow{S=\frac{۱}{۳}>۰} \text{قدرمطلق ریشهٔ منفی، کوچک‌تر از ریشهٔ مثبت است.}$$

۷۵ | $۴x^۲+\frac{۱}{۴}=۲x \Rightarrow ۴x^۲-۲x+\frac{۱}{۴}=۰$

$$\begin{cases} \Delta=(-۲)^۲-۴(۴)(\frac{۱}{۴})=۰ \Rightarrow \text{معادله دو ریشهٔ برابر دارد (ریشهٔ مضاعف).} \\ S=\frac{۱}{۲}>۰ \Rightarrow \text{ریشهٔ مضاعف مثبت است.} \end{cases}$$

۷۶ |

$$-x^۲+۶x-۳=۰ \xrightarrow[P=\frac{-۳}{-۱}>۰]{\Delta=۶^۲-۴(-۱)(-۳)=۲۴>۰} \text{دو ریشهٔ هم‌علامت دارد.}$$

$$\xrightarrow{S=\frac{-۶}{-۱}=۶>۰} \text{هر دو ریشه مثبت هستند.}$$

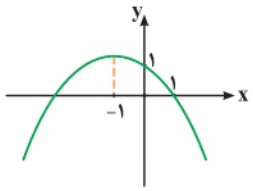
۳

بخش

نمونه سؤال امتحانی

آزمون ۱

آزمون نوبت اول | ساعت شروع: ۸ صبح | 120 mins

ردیف	سؤالات امتحانی	نمره
۱	آ) مجموع جملات نامنفی دنبالهٔ حسابی ۱۰۲,۹۶,۹۰,۰۰۰ را بیابید. ب) توپی را از ارتفاع ۱۰ متری به پایین پرتاب می‌کنیم. این توپ پس از هر بار زمین خوردن، نصف ارتفاع قبلی‌اش به طور عمودی بالا می‌آید. این توپ تا ششمین برخورد با زمین چه مسافتی را طی می‌کند؟	۲/۵
۲	نمودار مقابل مربوط به سهمی $y = ax^2 + bx + c$ می‌باشد، آ) مقادیر a ، b و c را بیابید. ب) صفرهای تابع را به‌دست آورید. 	۲
۳	مجموعه جواب هر یک از معادلات زیر را بیابید. آ) $\sqrt{2x+1} - 2\sqrt{x+1} - 1 = 0$ ب) $\frac{1}{x} - \frac{x}{x-1} = \frac{2x+1}{x^2-x}$	۲/۲۵
۴	به کمک رسم نمودار، برد تابع $y = \lvert x+1 \rvert - \lvert x-1 \rvert$ را بیابید، سپس محل تلاقی نمودار تابع و خطوط $y = 0$ و $y = 5$ را به‌دست آورید.	۲
۵	فاصلهٔ نقطهٔ $A(1,-1)$ از خط $d: 2x - y + a = 0$ برابر با $\sqrt{5}$ است. مساحت مثلثی که خط d با محورهای مختصات در ربع دوم می‌سازد را بیابید.	۱/۷۵
۶	دامنهٔ هر یک از توابع زیر را بیابید. آ) $y = \frac{\sqrt{x^2+2}}{2x^2-5x+3}$ ب) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$	۱/۵
۷	نمودار تابع $y = 1 + [2x]$ را در بازهٔ $[-1,2)$ رسم کنید و برد آن را بیابید.	۲/۵
۸	کدام‌یک از توابع زیر وارون‌پذیر است؟ ضابطهٔ تابع وارون آن را بیابید. آ) $y = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ ب) $y = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -1+x & x < 0 \end{cases}$	۲
۹	اگر $f = \{(1,-1),(2,1),(3,2),(4,5)\}$ و $g = \{(-1,0),(1,1),(2,3),(4,2)\}$ باشد، توابع $f+g$ و fog را تعیین کنید.	۱/۵
۱۰	نمودار $y = 2^{-x}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. سپس تعیین کنید طول نقطهٔ برخورد این نمودار با خطوط $y = \frac{1}{3}$ و $y = \frac{5}{2}$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟	۲
	★ موفق و مؤید باشید. ★	۲۰

آزمون ۲

آزمون نوبت اول | ساعت شروع: ۸ صبح | 120 mins

ردیف	سؤالات امتحانی	نمره
۱	آ) حاصل عبارت $t^7 + t^6 + t^5 + \cdots + t + 1$ را به ازای $t = 2\sqrt{3}$ بیابید. ب) حداقل چند جمله از دنبالهٔ حسابی ۲,۶,۱۰,۰۰۰ را جمع کنیم تا حاصل بزرگ‌تر از ۲۰۰ گردد؟	۲
۲	در معادلهٔ درجه دوم $3x^2 - 12x + k = 0$ ، یکی از ریشه‌ها ۲ واحد بزرگ‌تر از ریشهٔ دیگر است. ریشه‌ها و مقدار k را بیابید.	۲