

به نام خدا

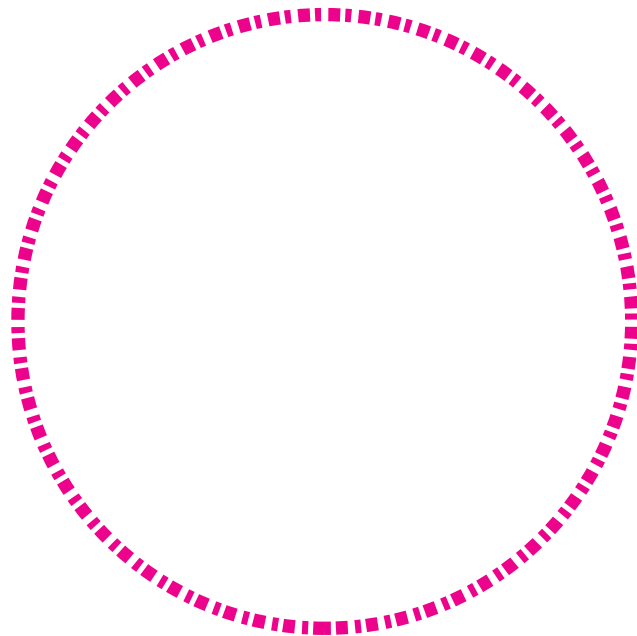
فارادوس

هندسه دهم

حسین هاشمی طاهری

محسن محمدکریمی

انتشارات
علمی
فار
phare
www.pharepub.com



هندسه دهم

فار آزمون

حسین هاشمی طاهری - محسن محمدکریمی

پدیدآورندگان:

حسین هاشمی طاهری - محسن محمدکریمی
ویراستاران: فائزه قزوینی - مهسا آموزگار - محمدرضا عزیزی

ناشر: انتشارات علمی فار

مدیر مسئول: علی امین صادقیه

صفحه آرا: سوری درزی

حروفچینی: افسانه بابایی

رسم شکل: ندا صداقت

طراح جلد: شاهرخ آریا

ناظر چاپ: سعید حیدری

چاپ: اول، ۱۳۹۶

شمارگان: ۱۵۰۰ نسخه

بها: ۲۹۰۰۰ تومان

www.PharePub.com

فار نما:

info@pharepub.com

پست الکترونیک

۸۸۳۹۱۴۳۵ - ۶۶۵۹۷۹۹۹

روابط عمومی:



کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب برای انتشارات علمی فار
و پدیدآورندگان آن محفوظ است.

به نام خداوند جان و خرد

کزین برتر اندیشه بر نگذرد

در اهمیت و ارزش دانش، همین بس که اگر فری آن را به درستی نداشتی باشد داشتن آن را ادعا می‌کنی و زمانی که به او داشتن دانش را نسبت دهند، فوشنور می‌گردی و در نکوهش نارانی همین بس که اگر شفمی در بهالت باشی، منکر آن فواهد شد.

«حضرت علی (ع)»

در سال‌های اخیر بین دسته‌ای از دانش‌آموزان، به غلط رایج شده است که پاسخ به تست‌های هندسی در زمانی محدود، ناممکن است و متأسفانه بسیاری از مشاوران ناآگاه نیز این دیدگاه نادرست را تقویت می‌کنند و در نتیجه تعدادی از شرکت‌کنندگان در کنکور سراسری نیز برای این دستورالعمل ارزش قائل می‌شوند و درس هندسه را نادیده می‌گیرند؛ در عوض، دانش‌آموزانی که از این تصور باطل دوری می‌جویند، در این مسابقه پیشی می‌گیرند و چه بسا دانش‌آموزانی که از استعداد بیش‌تری برخوردارند، مسابقه را واگذار می‌کنند.

اگر درسه هندسه توأم با تمرین مناسب باشد، تست‌های آن بسیار ساده‌تر از بعضی مطالب درس‌های دیگر، قابل حل هستند و تعدادی از آن‌ها به زمان کمتری برای پاسخ‌گویی نیاز دارند. از طرفی ذکر این نکته لازم است که در هر رقابتی، پرسش‌های ساده را اغلب شرکت‌کنندگان پاسخ می‌دهند و میدان رقابت به قسمت‌های متوسط و سخت منتقل خواهد شد. توصیه می‌شود که به درس هندسه اهمیت بیش‌تری بدهید، زیرا حدود ۲۵٪ سوالات ریاضی در رشته‌های مهندسی را تشکیل می‌دهند و علاوه بر آن، ورزیدگی در درس هندسه به علت ماهیت آن، توانایی شما را در دیگر درس‌های ریاضی و هم‌چنین درس فیزیک افزایش چشم‌گیری می‌دهد، پس تسلط بر هندسه باعث غلبه بر مشکلات دیگر درس‌ها خواهد شد. برای تسلط در این درس، باید به اندازه کافی تلاش کنید، برای یادگیری شما باید به آب بنزید حتی اگر ناخواسته چند قلوپ آب هم بخورید و برای فراگیری هندسه نیز باید خود را در گرداب حل مسئله بیندازید و با چالش‌های آن برخورد کنید.

در این کتاب سعی شده است که تا حد امکان، زمینه لازم برای فراگیری درس هندسه کلاس دهم ریاضی فراهم شود و به دنبال آن زمینه لازم برای توانایی شما در سال‌های بعد نیز فراهم خواهد شد.

«حسین هاشمی طاهری - محسن محمدکریمی»

راهنمای استفاده از کتاب

۱- آزمون‌های موبیگی: ابتدای هر فصل، آزمون‌های موبیگی شروع می‌شود. این آزمون‌ها مبحث به مبحث طراحی شده‌اند تا هر یک از مباحث یک فصل را گام‌به‌گام پوشش دهند، برای پاسخ‌گویی به این آزمون‌ها لازم است ابتدا مبحث مورد نظر را به‌طور دقیق از روی جزوه دبیر یا درس‌نامه کتاب که در انتهای این کتاب قرار گرفته است (در عین کوتاه بودن کامل و دقیق است)، مطالعه کنید و سپس به سراغ این آزمون‌ها بروید. حتماً در پایان هر آزمون پاسخ‌نامه کامل و تشریحی آن را به‌طور دقیق مطالعه کنید. حتی پاسخ تست‌هایی که درست پاسخ داده‌اید را دوباره بررسی کنید، این کار سبب می‌شود راه‌های ساده‌تر و نکات مربوط به هر تست را فرابگیرید. از آن جایی که آزمون‌های موبیگی برای تکمیل آموزش ریزبخش‌های هر فصل طراحی شده است لذا رعایت وقت پیشنهادی ضرورتی ندارد بنابراین بدون نگرانی از زمان و به قصد یادگیری از این آزمون‌ها استفاده کنید.

۲- آزمون‌های جامع هر فصل: در پایان هر فصل آزمون‌هایی از مباحث کل فصل طراحی شده است. این آزمون‌ها را وقتی پاسخ دهید که مطالعه فصل را به‌طور کامل انجام داده و مطالب را کاملاً فرا گرفته‌اید. باز هم در پایان هر آزمون پاسخ‌نامه را دقیق مورد بررسی قرار دهید. در این آزمون‌ها سعی کنید کم‌کم بحث زمان‌بندی را هم تمرین کنید.

۳- آزمون‌های دوره‌ای و مروری: در پایان بعضی از فصول کتاب، آزمون‌هایی قرار دارد که ۲ یا ۳ فصل قبلی را مورد ارزیابی قرار می‌دهد؛ این آزمون‌ها برای مرور فصل‌های قبلی در نظر گرفته شده است و باعث می‌شود تا با سوالات ترکیبی از آن چند فصل روبه‌رو شوید و هم‌چنین دوره‌ای از فصل‌های گذشته داشته باشید. در این آزمون‌ها حتماً وقت پیشنهادی را برای پاسخ‌گویی در نظر بگیرید.

۴- آزمون‌های جامع پایان کتاب: این آزمون‌ها برای دوره کامل مطالب کتاب طراحی شده است. معمولاً زمان پاسخ‌گویی به این آزمون‌ها حوالی اردیبهشت ماه است (البته برای دانش‌آموزان پایه دهم داوطلبان کنکور می‌توانند هر زمان که مطالب کتاب ریاضی دهم را به‌طور کامل آموختند سراغ این آزمون‌ها بروند). این آزمون‌ها محک خوبی برای آموخته‌های شما از کتاب ریاضی دهم است. باز هم توصیه می‌کنیم پاسخ‌نامه هر یک از آزمون‌ها که به‌طور جامع و تشریحی نوشته شده است را در پایان هر آزمون به دقت بررسی کنید.

در انتها توصیه می‌کنیم هر آزمون را در چند نوبت و با فاصله زمانی مناسب، از خودتان امتحان بگیرید و نتیجه را در هر نوبت یادداشت کنید تا نقاط ضعف خود را به‌طور کامل پوشش داده باشید.

موفق باشید

ولفگانگ گهلر یکی از دانشمندان علم روانشناسی (متولد ۱۸۸۷) آزمایشی را روی یک میمون به نام سلطان انجام داد. او یک موز را با فاصله زیاد خارج از قفس سلطان قرار می دهد و سه تکه چوب کوچک، متوسط و بزرگ را در داخل قفس می گذارد و با دوربین حرکات سلطان را زیر نظر می گیرد. سلطان که بسیار گرسنه بود سعی می کند با دست و پا آن موز را بردارد اما به دلیل فاصله زیاد موفق نمی شود. از چوب متوسط و بعد از آن بقیه چوبها استفاده می کند ولی باز موفق نمی شود. دقایق زیادی این تلاش ادامه می یابد و در آخر سلطان بسیار خسته و نا امید در گوشه ای از قفس می افتد و با چشمانی خسته نظاره گر موز، قفس و چوبها می شود. بعد از چند دقیقه مکث از جای خودش بلند می شود و انتهای چوبها که دارای نری و مادگی بوده را به درون هم چفت کرده و آن چوب را کامل کرده و به بیرون قفس می اندازد و موفق می شود تا موز را به سمت خود بکشد و در نهایت با حس رضایت آن موز را نوش جان می کند. فردای همان روز آقای گهلر آزمایش دیگری ترتیب می دهد و برای دومین بار یک موز از بالای قفس آویزان می کند و چند جعبه چوبی در قفس می اندازد. در این آزمایش سلطان بدون فکر کردن بلافاصله جعبهها را روی هم می گذارد و به موز دست پیدا می کند و سریع آن را می بلعد. این آزمایشها ثابت کرد که تا قبل از توجه کافی به مسأله، سلطان نتوانست نکته را بیابد. یعنی سلطان می خواست موز را به داخل قفس بکشد ولی توجه کافی به وسایل دور و برش مثل چوبها نداشت اما بعد از توجه عمیق روی مسأله متوجه شده که نری و مادگی (نکته اصلی مسأله) در سر و ته چوبها است که می تواند آن ها را به هم وصل کند و چوب بزرگتری که احیاناً به موز می رسد را بسازد؛ که بعد از این عمل موفق به خوردن موز شد. گهلر نتیجه می گیرد: ۱- تا زمانی که سلطان به عمق مسأله پی نبرد نتوانست موفق عمل کند. ۲- وقتی سلطان به همه ابزارهای داخل قفس به خوبی نگاه کرد و در ذهنش راه حل را به طور کامل چید (یک پارچگی راه حل) و آن وقت نتوانست بلافاصله بدون هیچ اشتباهی مسأله را حل کند. ۳- وقتی که سلطان با مسأله ای مواجه شد و با تلاش زیاد و تفکر عمیق و یک پارچه آن را حل کرد این موضوع باعث شد تا بتواند مسایل مشابه را راحت تر و با صرف وقت کم تر حل نماید (مثل آزمایش دوم که سلطان باید موز آویزان شده از قفس را بدست می آورد).

در سال های بعدی دانشمندان دیگری روی موضوع حل مسأله کار کردند و نتیجه گرفتند کسانی که به دنبال حل مسأله هستند را می توان به دو گروه تقسیم کرد:

تازه کاران و کهنه کاران

- ۱- کهنه کاران به دلیل حل مسائل زیاد و تمرین های پی در پی، الگوی حل مسائل مختلف را در ذهن می پروراند و از اینکه با مسائل سخت روبه رو شوند نمی ترسند و ساعتها با آن کلنجار می روند ولی تازه کاران حوصله بررسی مسأله را ندارند و با چند یا حتی یک خطا سریع به پاسخ آن در پاسخنامه رجوع می کنند بنابراین الگوها در ذهنشان تثبیت نمی شود.
 - ۲- کهنه کاران تا به یک پارچگی در حل سوال نرسند شروع به حل نمی کنند و صرفاً با کشیدن شکل و برانداز کردن سوال سعی در پیدا کردن نکته سوال می کنند و بعد از اینکه توانستند به خوبی سوال را کالبدشکافی کنند به صورت یک پارچه شروع به پاسخ می کنند. ولی تازه کاران از همان ابتدا با دیدن سوال شروع به حل می کنند و به طور پراکنده هر چه به ذهنشان می رسد را می نویسند و در آخر نه تنها حل آن را نیافته اند بلکه سردرگم تر شده اند.
 - ۳- کهنه کاران بر روی سوال تمرکز می کنند تا بتوانند ابتدا محتوا و خواست اصلی سوال را دقیق و درست بفهمند، پس از آن است که جواب از دل سوال بیرون می آید ولی تازه کاران حل مسأله به صورت سوال توجه کافی ندارند و معمولاً شتاب زده از روی سوال می گذرانند و تمرکزشان بر روی جواب است، غافل از این که جواب سوال را نباید ابداع کرد. بلکه جواب را باید در درون سوال کشف کرد.
- این دانشمندان بعد از چنین آزمایش هایی توصیه می کنند که:
- ۱- برای حل مسأله از دیگران کمک نگیرید و سعی کنید خودتان با گذاشتن وقت و بدون خستگی سوال را موشکافی کنید تا نکته های آن را درک نمایید.
 - ۲- از کشیدن شکل و توضیح موضوع برای خودتان غافل نشوید تا درک بصری از مسأله پیدا کنید.
 - ۳- وقتی مسأله ای را حل کردید چند مسأله مشابه آن را مجدد حل کنید.
 - ۴- بعد از حل مسأله هایی که نکته دار هستند خودتان پارامترهای آن مسأله را تغییر دهید و یک مسأله شبیه آن طرح کنید این کار باعث می شود خودتان را جای طراح سوال حس نمایید.

۵. برای جا افتادن الگوهای متعددی که در مسأله‌های مربوط به یک فصل حل کرده‌ای بعد از چند روز دوباره آن‌ها را تکرار کنید تا آن الگوها در ذهنتان نقش ببندد.

حال با توجه به مطالب بالا می‌توان گفت:

- ۱- سعی کنید به طور مستمر در هفته روی درس ریاضی وقت بگذارید مثلاً ۳ روز از هفته به تمرین ریاضی بپردازید.
 - ۲- بلافاصله بعد از تدریس بخشی از درس توسط دبیر خود، یک بار دیگر به جزوه، کتاب و نکته‌های خود در منزل نگاهی بیندازید و مثال‌های حل شده توسط دبیر را مجدد خودتان بدون نگاه کردن به جواب حل کنید.
 - ۳- در روزهای بعدی تمرین‌های کتاب درسی و کمک آموزشی خود را بدون نگاه کردن به پاسخ‌نامه حل کنید حتی اگر سوال وقت‌گیر بود نگران نشوید و بدون توجه به زمان مشغول حل آن شوید. فراموش نکنید آنالیز سوال است که، شما را توانمند خواهد کرد و به مرور توان حل مسأله را در شما افزایش خواهد داد. مطمئن باشید که پاسخ همیشه در محتوای سوال مستتر و پنهان است و اگر با دقت سوال را آنالیز کنید حتماً پاسخ را خواهید یافت.
- به سوال زیر دقت کنید شاید کمی پیچیده به نظر برسد ولی با اندکی دقت و بررسی شکل و محتوای سوال متوجه خواهید شد که سوال کاملاً برایتان آشنا است.

مثال . منحنی به معادله $y = (2x + 1)(x + 8) - mx$ ، خطوط $y = mx$ نقطه مشترک ندارد. مجموعه مقادیر m کدام است؟

(۱) $9 < m < 25$ (۲) $15 < m < 23$ (۳) $7 < m < 15$ (۴) $5 < m < 13$

پاسخ: اگر قرار باشد نقطه مشترک نداشته باشد یعنی معادله $mx - (2x + 1)(x + 8) = 0$ جواب نداشته باشد. این معادله تشکیل معادله

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	موافق a	مخالف a	موافق a	

درجه ۲ می‌دهد، در صورتی جواب ندارد که $\Delta < 0$ باشد.
 حالا به یک تعیین علامت می‌رسیم. باید یک عبارت درجه ۲ را تعیین علامت کنیم. عبارت درجه ۲ را باید به صورت زیر تعیین علامت کنیم:
 پس مفهوم جواب نداشتن معادله این است که عبارت درجه ۲ فاقد ریشه بوده و Δ این معادله منفی باشد.

از این مثال نتیجه می‌گیریم که سوال‌هایی به ظاهر، پیچیده مثل سوال بالا با اندکی دقت، ابتکار و پردازش به سوالی ساده تبدیل شده و قابل حل می‌شود.

۴- حتماً بعد از انجام تمرین در بخش مورد نظر به کتاب فارآزمون مراجعه کنید و از همان بخش، از خودتان آزمون بگیرید. آزمون‌های اولیه این کتاب موثرگی هستند و به شما کمک می‌کنند تا آن درس در ذهنتان جا بیفتد. از آن جایی که سوالات در آزمون‌ها پراکندگی دارند و باعث تمرکز بیش‌تر روی مبحث می‌شوند و ضمناً هنر آزمون دادن را نیز از همین ابتدا به شما آموزش می‌دهند. به علاوه آزمون دادن باعث جمع‌بندی مطالب خوانده شده می‌شود.

۵- ضمناً سوالاتی را که از کتاب درسی، کمک آموزشی و فارآزمون نتوانسته‌اید جواب بدهید یا نکته‌دار بوده‌اند را در روزهای بعدی دوباره حل کنید؛ حتی این کار می‌تواند بیش از دو بار اتفاق بیفتد. یادتان باشد با حل مجدد سوالات، ویژگی‌های مطالب یاد گرفته شده و نکته‌های حل مسأله در ذهنتان تثبیت شده و الگوهای لازم (کلید حل مسأله) در حافظه‌تان شکل می‌گیرد؛ یعنی شما را از یک تازه‌کار به یک کهنه‌کار حل مسأله تبدیل می‌کند.

در انتها توصیه می‌کنیم که هرگز از ماشین حساب برای بدست آوردن جواب استفاده نکنید. چنانچه یک روز در میان به مقدار یک ساعت و نیم تا دو ساعت مطالعه و تمرین داشته باشید و سعی کنید که خودتان بدون کمک پاسخ‌نامه و یا دیگران پاسخ را بیابید حتماً در ۴ ماه آینده از پیشرفتتان تعجب خواهید کرد.

تفکر و دقت گام اول برای موفقیت است
 در پناه خداوند متعال پیروز و موفق باشید
 رامین منوری - محمدسجاد ثمودی

آزمون‌های فصل اول

- ۲
 ۲ آزمون ۱ درس اول - ترسیمات هندسی
 ۳ آزمون ۲ درس دوم - زاویه
 ۴ آزمون ۳ درس دوم - ویژگی نقاط
 ۵ آزمون ۴ درس دوم - نامساوی‌ها
 ۶ آزمون ۵ درس دوم - نامساوی‌ها
 ۷ آزمون ۶ درس دوم - استدلال
 ۸ آزمون ۷ جامع ۱
 ۱۰ آزمون ۸: جامع ۲

آزمون‌های فصل دوم

- ۱۲
 ۱۲ آزمون ۹ درس اول - نسبت و تناسب در هندسه
 ۱۳ آزمون ۱۰ درس اول - نسبت و تناسب در هندسه (نسبت مساحت‌ها)
 ۱۴ آزمون ۱۱ درس دوم - قضیه تالس
 ۱۵ آزمون ۱۲ درس دوم - قضیه تالس
 ۱۷ آزمون ۱۳ درس دوم - قضیه تالس
 ۱۸ آزمون ۱۴ درس دوم - قضیه تالس
 ۱۹ آزمون ۱۵ درس دوم - قضیه تالس (میان خط و ویژگی‌های میانه)
 ۲۱ آزمون ۱۶ درس دوم - قضیه تالس (در دوزنقه)
 ۲۲ آزمون ۱۷ درس سوم - تشابه مثلث‌ها
 ۲۳ آزمون ۱۸ درس سوم - تشابه مثلث‌ها
 ۲۵ آزمون ۱۹ درس سوم - تشابه مثلث‌ها
 ۲۶ آزمون ۲۰ درس سوم - تشابه مثلث‌ها (روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه)
 ۲۱ آزمون ۲۱ درس چهارم - نسبت اجزای فرعی، محیط و مساحت‌های دو مثلث متشابه
 ۲۷
 ۲۲ آزمون ۲۲ درس چهارم - نسبت اجزای فرعی، محیط و مساحت‌های دو مثلث متشابه
 ۲۹
 ۲۳ آزمون ۲۳ درس چهارم - تشابه در دوزنقه
 ۳۰
 ۲۴ آزمون ۲۴ جامع ۱
 ۲۵ آزمون ۲۵ جامع ۲
 ۲۶ آزمون ۲۶ جامع ۳
 ۲۷ آزمون ۲۷ جامع ۴
 ۲۸ آزمون ۲۸ جامع ۵
 ۲۹ آزمون ۲۹ جامع ۶
 ۳۰ آزمون ۳۰ جامع ۷ مروری فصل ۱ و ۲
 ۳۱ آزمون ۳۱ جامع ۸ مروری فصل ۱ و ۲
 ۳۲ آزمون ۳۲ جامع ۹ مروری فصل ۱ و ۲

آزمون‌های فصل سوم

- ۴۲
 ۴۲ آزمون ۳۳ درس اول - چندضلعی‌ها (روابط زاویه و قطر)
 ۴۳ آزمون ۳۴ درس اول - چندضلعی‌ها (روابط زاویه و قطر)

- ۴۳ آزمون ۳۵ درس اول - چند ضلعی (متوازی‌الاضلاع)
 ۴۵ آزمون ۳۶ درس اول - چند ضلعی (دوزنقه)
 ۴۷ آزمون ۳۷ درس اول - چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای یک چهارضلعی
 ۴۸ آزمون ۳۸ درس اول - نکاتی در مثلث قائم‌الزاویه
 ۴۸ آزمون ۳۹ درس دوم - روابط مساحت اشکال
 ۴۹ آزمون ۴۰ درس دوم - روابط مساحت اشکال
 ۵۰ آزمون ۴۱ درس دوم - روابط مساحت اشکال
 ۵۱ آزمون ۴۲ درس دوم - روابط مساحت اشکال
 ۵۲ آزمون ۴۳ درس دوم - روابط مساحت اشکال
 ۵۳ آزمون ۴۴ درس دوم - روابط مساحت
 ۵۴ آزمون ۴۵ درس دوم - روابط مساحت اشکال
 ۵۵ آزمون ۴۶ درس دوم - روابط مساحت اشکال
 ۵۶ آزمون ۴۷ درس دوم - روابط مساحت اشکال
 ۵۷ آزمون ۴۸ درس دوم - نسبت مساحت‌های دو مثلث هم‌ارتفاع
 ۵۸ آزمون ۴۹ درس دوم - نسبت مساحت‌های دو مثلث هم‌ارتفاع
 ۵۹ آزمون ۵۰ درس دوم - خاصیت میانه‌ها در مساحت
 ۶۰ آزمون ۵۱ درس دوم - خاصیت میانه‌ها در مساحت
 ۶۱ آزمون ۵۲ درس دوم - کاربردهایی از مساحت
 ۶۲ آزمون ۵۳ درس دوم - مساحت اشکال شبکه‌ای
 ۶۳ آزمون ۵۴ جامع ۱
 ۶۴ آزمون ۵۵ جامع ۲
 ۶۵ آزمون ۵۶ جامع ۳
 ۶۶ آزمون ۵۷ جامع ۴
 ۶۷ آزمون ۵۸ جامع ۵
 ۶۸ آزمون ۵۹ جامع ۶
 ۶۹ آزمون ۶۰ جامع ۷
 ۷۰ آزمون ۶۱ آزمون مروری (فصل‌های ۱ و ۲ و ۳)
 ۷۱ آزمون ۶۲ آزمون مروری (فصل‌های ۱ و ۲ و ۳)
 ۷۲ آزمون ۶۳ آزمون مروری (فصل‌های ۱ و ۲ و ۳)

آزمون‌های فصل چهارم

- ۷۴
 ۷۴ آزمون ۶۴ درس اول - خط، نقطه و صفحه
 ۷۵ آزمون ۶۵ درس اول - خط، نقطه و صفحه
 ۷۶ آزمون ۶۶ درس اول - خط، نقطه و صفحه
 ۷۷ آزمون ۶۷ درس اول - خط، نقطه و صفحه
 ۷۸ آزمون ۶۸ درس دوم - تفکر تجسمی (نمای اجسام)
 ۸۰ آزمون ۶۹ درس دوم - تفکر تجسمی (نمای اجسام)
 ۸۲ آزمون ۷۰ درس دوم - تفکر تجسمی (برش)
 ۸۳ آزمون ۷۱ درس دوم - تفکر تجسمی (برش)

۹۲	آزمون های فصل پنجم
۹۲	آزمون ۷۸ جامع ۱
۹۳	آزمون ۷۹ جامع ۲
۹۴	آزمون ۸۰ جامع ۳
۹۵	آزمون ۸۱ جامع ۴
۹۶	آزمون ۸۲ جامع ۵

۸۴	آزمون ۷۲ درس دوم - تفکر تجسمی (برش)
۸۶	آزمون ۷۳ درس دوم - تفکر تجسمی (دوران)
۸۷	آزمون ۷۴ درس دوم - تفکر تجسمی (دوران)
۸۸	آزمون ۷۵ جامع ۱
۸۹	آزمون ۷۶ جامع ۲
۹۰	آزمون ۷۷ جامع ۳

بخش دوم آزمون ها

۱۴۳	پاسخ نامه آزمون ۲۷ جامع ۴
۱۴۴	پاسخ نامه آزمون ۲۸ جامع ۵
۱۴۶	پاسخ نامه آزمون ۲۹ جامع ۶
۱۴۷	پاسخ نامه آزمون ۳۰ جامع ۷ مروری فصل ۱ و ۲
۱۴۹	پاسخ نامه آزمون ۳۱ جامع ۸ مروری فصل ۱ و ۲
۱۵۰	پاسخ نامه آزمون ۳۲ جامع ۹ مروری فصل ۱ و ۲

پاسخ نامه فصل سوم

۱۵۲	پاسخ نامه آزمون ۳۳ چندضلعی ها (روابط زاویه و قطر)
۱۵۳	پاسخ نامه آزمون ۳۴ چندضلعی ها (روابط زاویه و قطر)
۱۵۴	پاسخ نامه آزمون ۳۵ چندضلعی (متوازی الاضلاع)
۱۵۶	پاسخ نامه آزمون ۳۶ چندضلعی (دورنقه)
	پاسخ نامه آزمون ۳۷ چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای
۱۵۸	یک چهارضلعی
۱۵۹	پاسخ نامه آزمون ۳۸ نکاتی در مثلث قائم الزاویه
۱۶۱	پاسخ نامه آزمون ۳۹ روابط مساحت اشکال
۱۶۲	پاسخ نامه آزمون ۴۰ روابط مساحت اشکال
۱۶۴	پاسخ نامه آزمون ۴۱ روابط مساحت اشکال
۱۶۵	پاسخ نامه آزمون ۴۲ روابط مساحت اشکال
۱۶۷	پاسخ نامه آزمون ۴۳ روابط مساحت اشکال
۱۶۸	پاسخ نامه آزمون ۴۴ روابط مساحت اشکال
۱۷۰	پاسخ نامه آزمون ۴۵ روابط مساحت اشکال
۱۷۱	پاسخ نامه آزمون ۴۶ روابط مساحت اشکال
۱۷۳	پاسخ نامه آزمون ۴۷ روابط مساحت اشکال
۱۷۴	پاسخ نامه آزمون ۴۸ نسبت مساحت های دو مثلث هم ارتفاع
۱۷۶	پاسخ نامه آزمون ۴۹ نسبت مساحت های دو مثلث هم ارتفاع
۱۷۸	پاسخ نامه آزمون ۵۰ خاصیت میانه ها در مساحت
۱۸۰	پاسخ نامه آزمون ۵۱ خاصیت میانه ها در مساحت
۱۸۲	پاسخ نامه آزمون ۵۲ کاربردهایی از مساحت
۱۸۴	پاسخ نامه آزمون ۵۳ مساحت اشکال شبکه ای
۱۸۵	پاسخ نامه آزمون ۵۴ جامع ۱
۱۸۶	پاسخ نامه آزمون ۵۵ جامع ۲
۱۸۸	پاسخ نامه آزمون ۵۶ جامع ۳
۱۸۹	پاسخ نامه آزمون ۵۷: جامع ۴
۱۹۱	پاسخ نامه آزمون ۵۸: جامع ۵

پاسخ نامه فصل اول

۱۰۲	پاسخ نامه آزمون ۱ ترسیمات هندسی
۱۰۴	پاسخ نامه آزمون ۲ زاویه
۱۰۵	پاسخ نامه آزمون ۳ ویژگی نقاط
۱۰۷	پاسخ نامه آزمون ۴ نامساوی ها
۱۰۸	پاسخ نامه آزمون ۵ نامساوی ها
۱۱۰	پاسخ نامه آزمون ۶ استدلال
۱۱۱	پاسخ نامه آزمون ۷ جامع ۱
۱۱۲	پاسخ نامه آزمون ۸ جامع ۲

پاسخ نامه فصل دوم

۱۱۴	پاسخ نامه آزمون ۹ نسبت و تناسب در هندسه
	پاسخ نامه آزمون ۱۰ نسبت و تناسب در هندسه (نسبت مساحت ها)
۱۱۵	
۱۱۷	پاسخ نامه آزمون ۱۱ قضیه تالس
۱۱۸	پاسخ نامه آزمون ۱۲ قضیه تالس
۱۱۹	پاسخ نامه آزمون ۱۳ قضیه تالس
۱۲۱	پاسخ نامه آزمون ۱۴ قضیه تالس
	پاسخ نامه آزمون ۱۵ قضیه تالس (میان خط و ویژگی های میانه)
۱۲۳	
۱۲۵	پاسخ نامه آزمون ۱۶ قضیه تالس (در دورنقه)
۱۲۷	پاسخ نامه آزمون ۱۷ تشابه مثلث ها
۱۲۸	پاسخ نامه آزمون ۱۸ تشابه مثلث ها
۱۳۰	پاسخ نامه آزمون ۱۹ تشابه مثلث ها
	پاسخ نامه آزمون ۲۰ تشابه مثلث ها (روابط طولی در مثلث قائم الزاویه)
۱۳۱	
	پاسخ نامه آزمون ۲۱ نسبت اجزای فرعی، محیط ها و مساحت های دو مثلث متشابه
۱۳۲	
	پاسخ نامه آزمون ۲۲ نسبت اجزای فرعی، محیط ها و مساحت های دو مثلث متشابه
۱۳۴	
۱۳۶	پاسخ نامه آزمون ۲۳ تشابه در دورنقه
۱۳۹	پاسخ نامه آزمون ۲۴ جامع ۱
۱۴۰	پاسخ نامه آزمون ۲۵ جامع ۲
۱۴۲	پاسخ نامه آزمون ۲۶ جامع ۳

۲۱۰	پاسخنامه آزمون ۷۱ تفکر تجسمی (برش)	۱۹۲	پاسخنامه آزمون ۵۹ جامع ۶
۲۱۲	پاسخنامه آزمون ۷۲ تفکر تجسمی (برش)	۱۹۵	پاسخنامه آزمون ۶۰ جامع ۷
۲۱۴	پاسخنامه آزمون ۷۳ تفکر تجسمی (دوران)	۱۹۶	پاسخنامه آزمون ۶۱ جامع ۸ مروری فصل‌های ۱ و ۲ و ۳
۲۱۵	پاسخنامه آزمون ۷۴ تفکر تجسمی (دوران)	۱۹۸	پاسخنامه آزمون ۶۲ جامع ۹ مروری فصل‌های ۱ و ۲ و ۳
۲۱۷	پاسخنامه آزمون ۷۵ جامع ۱	۱۹۹	پاسخنامه آزمون ۶۳ جامع ۱۰ مروری فصل‌های ۱ و ۲ و ۳
۲۱۸	پاسخنامه آزمون ۷۶ جامع ۲		
۲۲۰	پاسخنامه آزمون ۷۷ جامع ۳		

پاسخنامه فصل چهارم

۲۰۲	پاسخنامه آزمون ۶۴ خط، نقطه و صفحه
۲۰۳	پاسخنامه آزمون ۶۵ خط، نقطه و صفحه
۲۰۵	پاسخنامه آزمون ۶۶ خط، نقطه و صفحه
۲۰۶	پاسخنامه آزمون ۶۷ خط، نقطه و صفحه
۲۰۸	پاسخنامه آزمون ۶۸ تفکر تجسمی (نمای اجسام)
۲۰۹	پاسخنامه آزمون ۶۹ تفکر تجسمی (نمای اجسام)
۲۰۹	پاسخنامه آزمون ۷۰ تفکر تجسمی (برش)

پاسخنامه فصل پنجم

۲۲۲	پاسخنامه آزمون ۷۸ جامع ۱
۲۲۴	پاسخنامه آزمون ۷۹ جامع ۲
۲۲۵	پاسخنامه آزمون ۸۰ جامع ۳
۲۲۷	پاسخنامه آزمون ۸۱ جامع ۴
۲۲۹	پاسخنامه آزمون ۸۲ جامع ۵

آزمون‌ها

بخش سوم

۲۵۲	درسنامه فصل سوم	۲۳۴	درسنامه فصل اول
۲۶۲	درسنامه فصل چهارم	۲۴۰	درسنامه فصل دوم

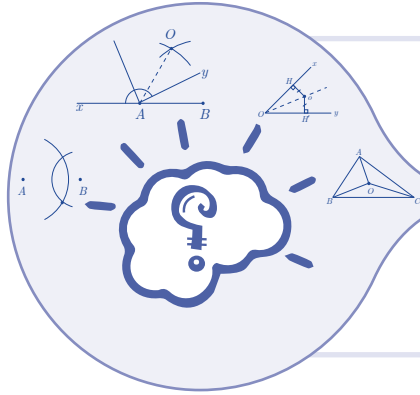
بخش اول

آزمون‌ها

-
- آزمون‌های فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال ۲
 - آزمون‌های فصل دوم: قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن ۱۲
 - آزمون‌های فصل سوم: چندضلعی‌ها ۴۲
 - آزمون‌های فصل چهارم: تجسم فضایی ۷۴
 - آزمون‌های فصل پنجم: جامع کل کتاب ۹۲

آزمون‌های فصل اول

ترسیم‌های هندسی و استدلال



۲۰ دقیقه

آزمون: درس اول – ترسیمات هندسی

۱. اگر پاره خط AB داده شده باشد، برای رسم عمود منصف این پاره خط، کدام گزینه درست است؟
 - (۱) دو کمان به مرکزهای A و B با شعاع‌های دلخواه رسم می‌کنیم.
 - (۲) دو کمان مساوی به مرکزهای A و B با شعاع دلخواه رسم می‌کنیم.
 - (۳) دو کمان به مرکزهای A و B با شعاع‌های دلخواه ولی بیش‌تر از نصف AB رسم می‌کنیم.
 - (۴) دو کمان مساوی به مرکزهای A و B با شعاع دلخواه ولی بیش‌تر از نصف AB رسم می‌کنیم.
۲. پاره خط AB به طول ۵ در صفحه داده شده است. چند نقطه در صفحه می‌توان یافت که از A به فاصله ۴ و از B به فاصله ۶ باشد؟

(۱) هیچ	(۲) یک	(۳) دو	(۴) بی‌شمار
---------	--------	--------	-------------
۳. مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$) داده شده است. برای رسم نیمساز زاویه درونی A کدام گزینه درست است؟
 - (۱) دو کمان به مرکزهای B و C و با شعاع‌های دلخواه رسم می‌کنیم.
 - (۲) دو کمان مساوی به مرکزهای B و C و با شعاع دلخواه رسم می‌کنیم.
 - (۳) دو کمان به مرکزهای B و C و با شعاع‌های دلخواه ولی بیش‌تر از نصف BC رسم می‌کنیم.
 - (۴) دو کمان مساوی به مرکزهای B و C و با شعاع دلخواه ولی بیش‌تر از نصف BC رسم می‌کنیم.
۴. مثلث ABC ($AB \neq AC$) مفروض است. چند نقطه در صفحه مثلث وجود دارد که از دو ضلع AC و AB به یک فاصله و از دو نقطه B و C نیز به یک فاصله باشد؟

(۱) یک	(۲) دو	(۳) سه	(۴) چهار
--------	--------	--------	----------
۵. کدام گزینه عمود منصف پاره خط AB را دقیق توصیف می‌کند؟
 - (۱) مجموعه نقاطی از صفحه که از پاره خط AB به فاصله مشخص m باشند.
 - (۲) مجموعه نقاطی از صفحه که از دو نقطه A و B به فاصله مشخص m باشند.
 - (۳) مجموعه نقاطی از صفحه که از دو سر پاره خط AB به یک فاصله باشند.
 - (۴) مجموعه خط‌هایی از صفحه که از وسط پاره خط AB می‌گذرند.
۶. خط d و نقطه A بیرون آن داده شده است. برای رسم خطی که از A بگذرد و بر d عمود باشد، حداقل چند کمان باید رسم شود؟

(۱) دو	(۲) سه	(۳) چهار	(۴) پنج
--------	--------	----------	---------
۷. خط d و نقطه A بیرون آن مفروض‌اند. برای رسم خطی که از A بگذرد و با d موازی باشد، حداقل چند کمان باید رسم شود؟

(۱) سه	(۲) چهار	(۳) پنج	(۴) شش
--------	----------	---------	--------
۸. می‌خواهیم متوازی‌الاضلاعی رسم کنیم که طول دو قطر آن ۶ و ۸ باشند. با این مشخصات چند متوازی‌الاضلاع قابل رسم است؟

(۱) یک	(۲) دو	(۳) هیچ	(۴) بی‌شمار
--------	--------	---------	-------------

۹. پاره خط MN داده شده است. اگر بخواهیم مربعی رسم کنیم که یک قطر آن MN باشد، حداقل چند کمان باید رسم کنیم؟

- دو (۲) سه (۳) چهار (۴) پنج (۵)

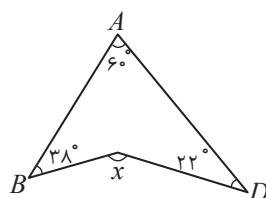
۱۰. کدام گزینه نیمساز یک زاویه را مشخص می کند؟

- (۱) مجموعه نقاطی از صفحه که از رأس زاویه می گذرند.
 (۲) مجموعه نقاطی از صفحه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشند.
 (۳) مجموعه نقاطی از صفحه که از هر ضلع زاویه به فاصله ای مشخص باشند.
 (۴) مجموعه نقاطی از صفحه که از رأس زاویه به فاصله ای مشخص باشند.

۱	۱	۲	۳	۴	۳	۱	۲	۳	۴	۵	۱	۲	۳	۴	۷	۱	۲	۳	۴	۹	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۴	۶	۱	۲	۳	۴	۸	۱	۲	۳	۴	۱۰	۱	۲	۳	۴

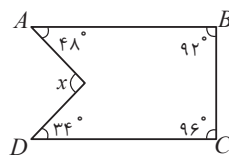
پاسخ آزمون ۱ در صفحه ۳

آزمون ۲: درس دوم - زاویه ۲۰ دقیقه



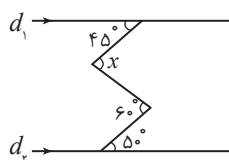
۱. در شکل مقابل، اندازه زاویه x کدام است؟

- (۱) 110° (۲) 11°
 (۳) 12° (۴) 13°



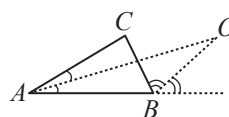
۲. در شکل مقابل، اندازه زاویه x چند درجه است؟

- (۱) 90° (۲) 95°
 (۳) 100° (۴) 105°



۳. در شکل مقابل، دو خط d_1 و d_2 موازی هستند. با توجه به اندازه های روی شکل، زاویه x چند درجه است؟

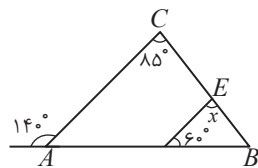
- (۱) 55° (۲) 5°
 (۳) 60° (۴) 65°



۴. در مثلث ABC ، نیمساز زاویه داخلی A و نیمساز زاویه خارجی B یکدیگر را در نقطه O قطع کرده اند.

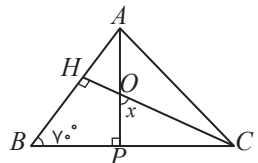
اندازه زاویه \hat{AOB} کدام است؟

- (۱) $90^\circ - \frac{C}{2}$ (۲) $90^\circ - \frac{B+C}{2}$
 (۳) $\frac{C}{2}$ (۴) $90^\circ - \frac{B-C}{2}$



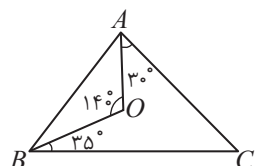
۵. در شکل مقابل، با توجه به اندازه های روی شکل، زاویه x چند درجه است؟

- (۱) 50 (۲) 55
 (۳) 60 (۴) 65



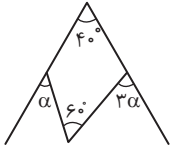
۶. در شکل مقابل، اندازه x چند درجه است؟

- (۱) 70 (۲) 75
 (۳) 60 (۴) 65



۷. در شکل مقابل، با توجه به اندازه های روی آن، زاویه C چند درجه است؟

- (۱) 80 (۲) 90
 (۳) 85 (۴) 95



۸. در شکل مقابل، با توجه به اندازه‌های روی شکل مقدار α چند درجه است؟

- (۱) ۲۰
(۲) ۲۵
(۳) ۳۰
(۴) ۳۵

۹. در چهارضلعی محدب $ABCD$ زاویه بین نیمسازهای داخلی دو زاویه B و C کدام است؟

- (۱) $\frac{B+C}{2}$
(۲) $\frac{A+D}{2}$
(۳) $\frac{A+B}{2}$
(۴) $\frac{B+D}{2}$

۱۰. در مثلث ABC ، $\hat{A} = 70^\circ$ و $\hat{B} = 30^\circ$ است. زاویه حاصل از برخورد نیمساز داخلی C با عمودمنصف AB چند درجه است؟

- (۱) ۲۰
(۲) ۳۰
(۳) ۳۵
(۴) ۴۰

۱ (۱) (۲) (۳) (۴)	۳ (۱) (۲) (۳) (۴)	۵ (۱) (۲) (۳) (۴)	۷ (۱) (۲) (۳) (۴)	۹ (۱) (۲) (۳) (۴)
۲ (۱) (۲) (۳) (۴)	۴ (۱) (۲) (۳) (۴)	۶ (۱) (۲) (۳) (۴)	۸ (۱) (۲) (۳) (۴)	۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ آزمون ۲ در صفحه ۴

۲۰ دقیقه

آزمون ۳: درس دوم - ویژگی نقاط

۱. چند نقطه در صفحه مثلث وجود دارد که از سه رأس آن به یک فاصله باشد؟
 (۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) چهار
۲. دو خط ناموازی d و d' را در یک صفحه در نظر بگیرید. مجموعه نقاطی از صفحه که از این دو خط به یک فاصله هستند، کدام است؟
 (۱) یک خط (۲) دو خط موازی (۳) دو خط عمود بر هم (۴) دو خط متقاطع که لزومی ندارد بر هم عمود باشند.
۳. دو خط موازی d و d' و خط D که دو خط d و d' را قطع می‌کند در نظر بگیرید. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از این سه خط به یک فاصله هستند؟
 (۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) بی‌شمار
۴. سه خط d_1 ، d_2 و d_3 که دو به دو متقاطع اند ولی هم‌رس نیستند را در نظر بگیرید. چند نقطه در صفحه می‌توان یافت که از این سه خط به یک فاصله باشند؟
 (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار
۵. خط d و نقطه‌های M و N در صفحه مفروض‌اند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از d به فاصله معلوم k و از M و N به یک فاصله باشد؟ (MN بر d عمود نیست)
 (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) بیشمار
۶. در مثلث ABC ، نقطه O ، نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها است. اگر وسط‌های اضلاع مثلث ABC را M ، N و P بنامیم، نقطه O برای مثلث MNP مطابق کدام گزینه است؟
 (۱) نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌های مثلث MNP
 (۲) نقطه هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث MNP
 (۳) نقطه هم‌رسی نیمسازهای مثلث MNP
 (۴) نقطه هم‌رسی میانه‌های مثلث MNP
۷. زاویه \hat{xOy} داده شده است. چند نقطه در صفحه این زاویه وجود دارد که از دو ضلع آن به فاصله مساوی باشد؟
 (۱) یک (۲) دو (۳) چهار (۴) بی‌شمار

۸. در مثلث ABC نیمسازهای دو زاویه خارجی B و C و نیمساز زاویه درونی A را رسم می‌کنیم. کدام گزینه درست است؟
- (۱) این سه خط در اغلب موارد هم‌رس نیستند.
 - (۲) این سه خط در یک نقطه درون مثلث هم‌رس هستند.
 - (۳) این سه خط در یک نقطه بیرون مثلث هم‌رس هستند.
 - (۴) این سه خط در یک نقطه هم‌رس هستند که آن نقطه از سه رأس مثلث به یک فاصله است.

۹. در چهارضلعی $ABCD$ نقطه‌ای وجود دارد که از هر چهار رأس آن به یک فاصله است. کدام گزینه درباره این چهارضلعی درست است؟
- (۱) نیمسازهای هر چهار زاویه در یک نقطه بیرون چهارضلعی هم‌رس‌اند.
 - (۲) نیمسازهای هر چهار زاویه در یک نقطه درون چهارضلعی هم‌رس‌اند.
 - (۳) عمود منصف‌های هر چهار ضلع در یک نقطه هم‌رس‌اند.
 - (۴) دو نیمساز A و B و دو عمود منصف اضلاع AC و BD در یک نقطه هم‌رس‌اند.

۱۰. زاویه xyO و نقطه M درون آن مفروض است. چند نقطه روی صفحه وجود دارد که از ox و oy به یک فاصله‌اند و از M به فاصله مشخص R باشند؟
- (۱) دقیقاً یک نقطه
 - (۲) حداکثر دو نقطه
 - (۳) دقیقاً دو نقطه
 - (۴) حداکثر چهار نقطه

۱	(۱) (۲) (۳) (۴)	۳	(۱) (۲) (۳) (۴)	۵	(۱) (۲) (۳) (۴)	۷	(۱) (۲) (۳) (۴)	۹	(۱) (۲) (۳) (۴)
۲	(۱) (۲) (۳) (۴)	۴	(۱) (۲) (۳) (۴)	۶	(۱) (۲) (۳) (۴)	۸	(۱) (۲) (۳) (۴)	۱۰	(۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ آزمون ۳ در صفحه ۵

۳۰ دقیقه

آزمون ۴: درس دوم - نامساوی‌ها

۱. کدام گزینه درباره مثلثی که متساوی‌الساقین نیست، درست است؟
- (۱) حداقل یک زاویه بزرگ‌تر از 30° دارد.
 - (۲) حداقل یک زاویه کوچک‌تر از 45° دارد.
 - (۳) حداقل یک زاویه کوچک‌تر از 60° دارد.
 - (۴) حداقل یک زاویه بزرگ‌تر از 75° دارد.
۲. کدام گزینه درباره یک مثلث همواره درست است؟
- (۱) هر زاویه خارجی مثلث، از زاویه داخلی نظیرش بزرگ‌تر است.
 - (۲) هر زاویه خارجی مثلث، از زاویه داخلی نظیرش کوچک‌تر است.
 - (۳) هر زاویه خارجی مثلث، کوچک‌تر از هر زاویه داخلی غیر مجاورش است.
 - (۴) هر زاویه خارجی مثلث، بزرگ‌تر از هر زاویه داخلی غیرمجاورش می‌باشد.
۳. اگر در مثلث ABC ، ضلع AB ، بزرگ‌ترین ضلع و ضلع BC کوچک‌ترین ضلع باشد، کدام گزینه درست است؟
- (۱) زاویه \hat{B} نمی‌تواند 60° باشد.
 - (۲) زاویه \hat{C} بزرگ‌تر از 60° و \hat{A} کوچک‌تر از 60° است.
 - (۳) زاویه خارجی \hat{B} نمی‌تواند 120° باشد.
 - (۴) زاویه \hat{B} دقیقاً 60° است.
۴. اگر در چهارضلعی $ABCD$ ، ضلع AB بزرگ‌ترین ضلع و ضلع CD کوچک‌ترین ضلع باشد، کدام گزینه همواره درست است؟
- (۱) $\hat{C} > \hat{A}$
 - (۲) $\hat{C} > \hat{B}$
 - (۳) $\hat{D} > \hat{A}$
 - (۴) $\hat{D} < \hat{A}$
۵. در مثلث ABC ، نیمسازهای درونی زاویه‌های \hat{B} و \hat{C} یکدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند. اگر $AB < AC$ باشد، کدام گزینه همواره درست است؟
- (۱) $OB < OC$
 - (۲) $OB > OC$
 - (۳) $OB > AC$
 - (۴) $OC > AB$

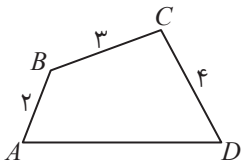
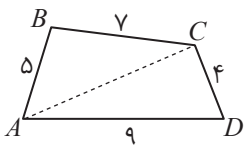
۶. در مثلث ABC ، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. کدام گزینه همواره درست است؟
 (۱) ارتفاع AH از ضلع BC بزرگ‌تر است.
 (۲) ارتفاع AH از ضلع BC کوچک‌تر است.
 (۳) ارتفاع AH از نصف مجموع دو ضلع AB و AC بزرگ‌تر است.
 (۴) ارتفاع AH از نصف مجموع دو ضلع AB و AC کوچک‌تر است.
۷. در مثلث ABC که تمام زوایای آن حاده و دوه‌دو نامساوی هستند، $AB < AC$ می‌باشد و ارتفاع AH رسم شده است. کدام گزینه همواره درست است؟
 (۱) $\widehat{BAH} < \widehat{CAH}$ (۲) $\widehat{BAH} > \widehat{CAH}$ (۳) $\widehat{CAH} > \widehat{C}$ (۴) $\widehat{BAH} < \widehat{B}$
۸. مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است. اگر AM میانه‌ی نظیر رأس A و BN میانه‌ی نظیر رأس B و CP میانه‌ی نظیر رأس C باشد، کدام گزینه همواره درست است؟
 (۱) $AM > CP$ (۲) $BN > AM$ (۳) $BN < CP$ (۴) $BN > CP$
۹. در مثلث ABC ، ضلع AB از ضلع AC کوچک‌تر و AM میانه‌ی نظیر رأس A است. کدام گزینه همواره درست است؟
 (۱) $\widehat{BAM} < \widehat{CAM}$ (۲) $\widehat{BAM} > \widehat{B}$ (۳) $\widehat{CAM} > \widehat{C}$ (۴) $\widehat{BAM} > \widehat{CAM}$
۱۰. در مثلث ABC ، ضلع AB از ضلع BC کوچک‌تر است. اگر AH ، BP و CK ، به ترتیب، ارتفاع‌های نظیر رأس‌های A ، B و C باشند، کدام گزینه همواره درست است؟
 (۱) $AH > BP$ (۲) $AH < CK$ (۳) $BP < CK$ (۴) $BP > CK$

۱	(۱) (۲) (۳) (۴)	۲	(۱) (۲) (۳) (۴)	۵	(۱) (۲) (۳) (۴)	۷	(۱) (۲) (۳) (۴)	۹	(۱) (۲) (۳) (۴)
۲	(۱) (۲) (۳) (۴)	۳	(۱) (۲) (۳) (۴)	۶	(۱) (۲) (۳) (۴)	۸	(۱) (۲) (۳) (۴)	۱۰	(۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ آزمون ۴ در صفحه ۶

۲۰ دقیقه

آزمون ۵: درس دوم - نامساوی‌ها

۱. در شکل مقابل اگر طول AD عددی طبیعی باشد، بیش‌ترین مقدار آن کدام است؟
 (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۶
- 
۲. در شکل مقابل اندازه AC کدام می‌تواند باشد؟
 (۱) ۱۲ (۲) ۵ (۳) ۱۳ (۴) ۷
- 
۳. اگر نقطه P درون مثلث ABC باشد، کدام گزینه همواره درست است؟
 (۱) $PB + PC < AB + BC$ (۲) $PB + PC < AB + AC$
 (۳) $PB + PC < AC + BC$ (۴) $PB + PC < BC$
۴. اگر M نقطه‌ای دلخواه درون مثلث ABC و محیط این مثلث $2P$ و مجموع فاصله‌های M از سه رأس مثلث برابر t باشد، کدام گزینه درست است؟
 (۱) $t < P$ (۲) $t > 2P$ (۳) $P < t < 2P$ (۴) $\frac{4}{3}P < t < \frac{2}{3}P$
۵. کدام گزینه همواره درست است؟
 (۱) میانه‌ی نظیر هر ضلع مثلث از هر یک از دو ضلع دیگر بزرگ‌تر است.
 (۲) میانه‌ی نظیر هر ضلع مثلث از هر یک از دو ضلع دیگر کوچک‌تر است.
 (۳) میانه‌ی نظیر هر ضلع مثلث از نصف مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است.
 (۴) میانه‌ی نظیر هر ضلع مثلث از تفاضل دو ضلع دیگر کوچک‌تر است.

۶. اگر مجموع میانه‌های مثلثی که محیط آن $2P$ است، برابر t باشد، کدام گزینه درست است؟

(۱) $t < P$ (۲) $t < 2P$

(۳) $t < \frac{3P}{4}$ (۴) هیچ یک از این‌ها

۷. اگر x ، عددی حقیقی و سه عدد $2 + 5x$ ، $11 - 9x$ و $8 + 2x$ اندازه‌های ضلع مثلثی باشند، مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقادیرهای صحیح x کدام است؟

(۱) ۱۴ (۲) ۱۳ (۳) ۱۲ (۴) ۱۱

۸. موقعیت‌های سه دهکده A ، B و C تشکیل یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌دهند. این سه دهکده به ترتیب ۲۰ ، ۳۰ و ۱۰ دانش‌آموز دارند و می‌خواهیم مدرسه‌ای برای این سه دهکده بنا کنیم. مدرسه را در چه نقطه‌ای بسازیم تا مجموع مسافت‌هایی که همه دانش‌آموزان برای رسیدن به مدرسه می‌پیمایند، کم‌ترین مقدار ممکن باشد؟

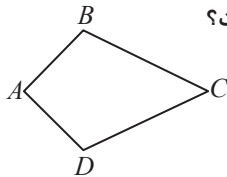
(۱) C (۲) B

(۳) نقطه هم‌رسی نیمسازها (۴) نقطه هم‌رسی سه عمود منصف

۹. محیط چهارضلعی محدب شکل مقابل $2P$ و مجموع دو قطر آن t است. کدام گزینه همواره درست است؟

(۱) $t < P$ (۲) $t \geq 2P$

(۳) $P < t < 2P$ (۴) $t < \frac{3P}{2}$



۱۰. کدام گزینه درست است؟

(۱) در هر مثلث، ارتفاع نظیر کوچک‌ترین ضلع، کوچک‌ترین ارتفاع مثلث است.

(۲) در هر مثلث، نیمساز نظیر کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌ترین نیمساز است.

(۳) در هر مثلث، ارتفاع نظیر بزرگ‌ترین ضلع، کوچک‌ترین ارتفاع مثلث است.

(۴) در هر مثلث، ارتفاع نظیر هر ضلع، از همان ضلع کوچک‌تر است.

۱	(۱) (۲) (۳) (۴)	۳	(۱) (۲) (۳) (۴)	۵	(۱) (۲) (۳) (۴)	۷	(۱) (۲) (۳) (۴)	۹	(۱) (۲) (۳) (۴)
۲	(۱) (۲) (۳) (۴)	۴	(۱) (۲) (۳) (۴)	۶	(۱) (۲) (۳) (۴)	۸	(۱) (۲) (۳) (۴)	۱۰	(۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ آزمون ۵ در صفحه

۳۰ دقیقه

آزمون ۷: درس دوم - استدلال

۱. کدام گزینه درست است؟

(۱) نتایج حاصل از استدلال استقرایی همیشه درست هستند.

(۲) نتایج حاصل از استدلال استنتاجی گاهی می‌توانند نادرست باشند.

(۳) استدلال استقرایی نوعی از استدلال است که از جزء به کل می‌رسد.

(۴) استدلال استنتاجی از درستی قضایای قبلی سرچشمه می‌گیرد و به اصول وابسته نیست.

۲. کدام گزینه همواره درست است؟

(۱) اگر در قضیه‌ای جای فرض و حکم را عوض کنیم، عکس قضیه حاصل می‌شود و همیشه درست است.

(۲) اگر در قضیه‌ای حکم را برعکس کنیم، عکس قضیه حاصل می‌شود.

(۳) اگر در قضیه‌ای فرض را برعکس کنیم، عکس قضیه حاصل می‌شود.

(۴) اگر در قضیه‌ای جای فرض و حکم را عوض کنیم، عکس قضیه حاصل می‌شود و گاهی درست است.

۳. کدام گزینه یک گزاره است؟

(۱) امروز به اداره می‌روی؟

(۲) کتاب مرا بیاور!

(۳) عجب هوای گرمی!

(۴) فردا باران می‌بارد.

۴. نقیض گزاره « x ، بزرگ‌تر از y است.» کدام است؟
- (۱) x ، بزرگ‌تر از y است.
 (۲) x ، کوچک‌تر از y است.
 (۳) x ، مساوی y است.
 (۴) x ، کوچک‌تر یا مساوی y است.
۵. در کدام گزینه، عکس قضیه درست نیست؟
- (۱) در یک متوازی‌الاضلاع، قطرهای یکدیگر را نصف می‌کند.
 (۲) اگر دو زاویه قائمه باشند، آن دو زاویه برابرند.
 (۳) اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد، ارتفاع‌های نظیر دو ساق، برابرند.
 (۴) اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه باشد، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.
۶. کدام گزینه برهان غیرمستقیم را توصیف می‌کند؟
- (۱) اگر جای فرض و حکم را عوض کنیم، اثبات غیرمستقیم ارایه شده است.
 (۲) اگر فرض را نادرست بگیریم و ثابت کنیم حکم نادرست است، آن‌گاه اثبات غیرمستقیم ارایه شده است.
 (۳) اگر حکم را نادرست بگیریم و به تناقض برسیم، آن‌گاه اثبات غیرمستقیم ارایه شده است.
 (۴) هیچ یک از این‌ها
۷. شخصی ادعا می‌کند که «هر مسئله‌ای که بدهید، آن را حل می‌کنم». کدام گزینه می‌تواند مثال نقض برای این ادعا باشد؟
- (۱) چند مسئله به او بدهیم، اگر حل کرد، ادعایش درست است و قابل نقض نیست.
 (۲) مسئله‌ای به او بدهیم اگر حل کرد، مسئله دیگری به او بدهیم و همینطور ادامه دهیم.
 (۳) مسئله‌ای به او بدهیم که او نتواند حل کند.
 (۴) هیچ یک از این موارد
۸. کدام گزینه درست است؟
- (۱) اگر $A \subset B$ ، آن‌گاه A و B نمی‌توانند مساوی باشند.
 (۲) اگر $A \subset B$ و $B \subset A$ ، آن‌گاه شاید $A \neq B$
 (۳) اگر $x \in A$ و $x \in B$ ، آن‌گاه $x \in A \cap B$
 (۴) اگر $x \in A \cap B$ ، آن‌گاه $x \notin A$
۹. اگر در مثلث ABC ، $AB > AC$ و $BC < AC$ ، آن‌گاه کدام درست است؟
- (۱) $\widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$
 (۲) $\widehat{C} > \widehat{A} > \widehat{B}$
 (۳) $\widehat{C} > \widehat{B} > \widehat{A}$
 (۴) $\widehat{B} > \widehat{C} > \widehat{A}$
۱۰. کدام گزینه یک مثال نقض برای حکم زیر است؟
- «اگر حاصل ضرب دو عدد ۶۴ باشد، لااقل یکی از آن‌ها بزرگ‌تر از ۸ است.»
- (۱) یکی از عددها ۹ باشد.
 (۲) یکی از عددها ۵ باشد.
 (۳) یکی از عددها ۳ باشد.
 (۴) یکی از عددها ۸ باشد.

۱	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۳	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۵	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۷	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۹	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)
۲	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۴	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۶	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۸	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۱۰	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)

پاسخ آزمون ۶ در صفحه

۲۰ دقیقه

آزمون ۷: جامع ۱

۱. اگر در مورد مثلث ABC داشته باشیم $BC > AB > AC$ و $\widehat{B} + \widehat{C} = \alpha$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟
- (۱) $\alpha > 60^\circ$
 (۲) $\alpha < 60^\circ$
 (۳) $\alpha > 120^\circ$
 (۴) $\alpha < 120^\circ$
۲. با معلومات $AB = 8$ ، $AC = 13$ و ارتفاع $AH = 9$ ، از مثلث ABC ، چند مثلث مختلف می‌توان رسم کرد؟
- (۱) هیچ
 (۲) ۱
 (۳) ۲
 (۴) ۴

۳. در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویه A ، ضلع BC را در نقطه D قطع می‌کند. کدام نامساوی همواره درست است؟

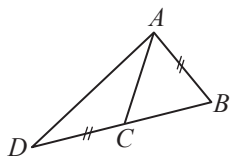
- (۱) $BA > BD$ (۲) $DA > DB$ (۳) $AB > AD$ (۴) $DB > DA$

۴. کدام یک از عبارات‌های زیر بیان گر «استدلال استقرایی» است؟

- (۱) چگونگی انطباق یک دستور کلی در مورد یک عضو از یک مجموعه.
 (۲) بررسی بخشی از یک مجموعه و حدس یک ویژگی مشترک برای همه اعضا.
 (۳) مطابقت یک دستور کلی با یک یا چند دستور دیگر.
 (۴) چگونگی استفاده از دلایل جهت اثبات یک حکم کلی.

۵. در شکل مقابل اگر $DC = AB$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $AD > AB$ (۲) $CB > AB$
 (۳) $AD > CB$ (۴) $AC > CB$

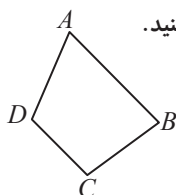


۶. سه پاره‌خط به طول‌های $6x$ ، $x+7$ و $4x-4$ اضلاع یک مثلث هستند. حدود x کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{3} < x < 3$ (۲) $3 < x < 4$ (۳) $\frac{11}{9} < x < 4$ (۴) $\frac{11}{9} < x < 3$

۷. اگر در چهارضلعی $ABCD$ ، AB بزرگ‌ترین ضلع و DC کوچک‌ترین ضلع باشد، گزینه صحیح را مشخص کنید.

- (۱) $A < C$ (۲) $\hat{B} < \hat{D}$
 (۳) $\hat{D} > \hat{C}$ (۴) گزینه‌های ۱ و ۲ صحیح‌اند.



۸. برای این که با استفاده از خط‌کش و پرگار، پاره‌خط AB را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنیم، حداقل چند کمان باید بزنیم؟

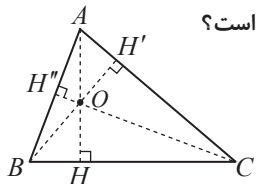
- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۹. در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$) طول نیمساز درونی B ، برابر ضلع BC است. زاویه A کدام است؟

- (۱) 18° (۲) 54° (۳) 36° (۴) 72°

۱۰. ارتفاع‌های مثلث ABC شکل مقابل، در نقطه O هم‌رس‌اند. نقطه A برای مثلث BOC چه نقطه‌ای است؟

- (۱) محل هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع
 (۲) محل هم‌رسی نیمسازها
 (۳) محل هم‌رسی میانه‌ها
 (۴) محل هم‌رسی ارتفاع‌ها



- ۱ (۱) (۲) (۳) (۴) ۳ (۱) (۲) (۳) (۴) ۵ (۱) (۲) (۳) (۴) ۷ (۱) (۲) (۳) (۴) ۹ (۱) (۲) (۳) (۴)
 ۲ (۱) (۲) (۳) (۴) ۴ (۱) (۲) (۳) (۴) ۶ (۱) (۲) (۳) (۴) ۸ (۱) (۲) (۳) (۴) ۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

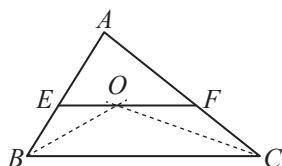
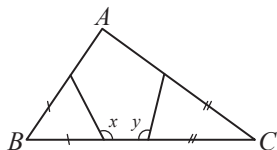
پاسخ آزمون ۷ در صفحه

۲۰ دقیقه

آزمون ۸: جامع ۲

۱. در شکل مقابل پاره‌خط‌های مساوی مشخص شده‌اند. اگر $x + y = 214^\circ$ باشد، اندازه زاویه A کدام است؟

- (۱) 72° (۲) 98°
 (۳) 112° (۴) 118°



۲. در مثلث ABC نیمسازهای درونی B و C یکدیگر را در نقطه O قطع کرده‌اند و از O خطی موازی ضلع BC رسم شده است تا دو ضلع دیگر را در E و F قطع کند. گزینه صحیح را مشخص کنید.

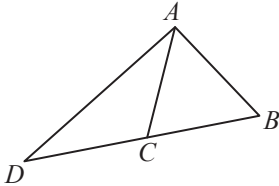
- (۱) $\sphericalangle EF < \sphericalangle BO + \sphericalangle CO$
 (۲) $BO + CO < \sphericalangle EF$
 (۳) $\sphericalangle BC < \sphericalangle BO + \sphericalangle CO$
 (۴) $BO + CO < \sphericalangle BC$

۳. کدام دسته از اندازه‌های زیر می‌تواند طول اضلاع یک مثلث باشد؟

- (۱) ۲ و ۳ و ۵
 (۲) ۲ و $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$
 (۳) ۴ و ۲/۵ و ۷
 (۴) $\sqrt{5}$ و $\sqrt{5}$ و ۵

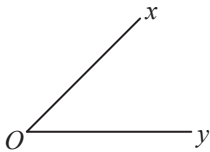
۴. در شکل مقابل اگر $AC = AB$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $AD > CB$
 (۲) $AB > CB$
 (۳) $AD > AB$
 (۴) $AB > DC$



۵. برای این که با استفاده از خط‌کش و پرگار زاویه‌ای مساوی $\frac{1}{4}$ زاویه مشخص xy رسم شود، حداقل چند کمان باید بزنیم؟

- (۱) ۴
 (۲) ۵
 (۳) ۶
 (۴) ۹



۶. اگر محیط مثلث ABC برابر ۳۶ و ضلع BC بزرگ‌ترین ضلع آن باشد، اندازه ضلع BC برابر کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱۱
 (۲) ۱۵
 (۳) ۱۸
 (۴) ۲۰

۷. کدام یک از عبارتهای زیر، یک گزاره است؟

- (۱) آیا مجید بلندقد است؟
 (۲) عجب، علی‌رضا دانش‌آموز منظمی است!
 (۳) معدل حسن در سال گذشته بالای ۱۸ بود.
 (۴) محسن، به هندسه علاقه نشان بده!

۸. در مثلثی به اضلاع ۶ و ۸ و ۱۰، فاصله نقطه هم‌رسی ارتفاع‌ها تا نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع کدام است؟

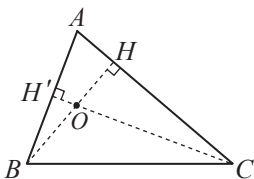
- (۱) ۶
 (۲) ۴
 (۳) صفر
 (۴) ۵

۹. برای اثبات هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث، از کدام قضیه استفاده می‌شود؟

- (۱) هم‌رس بودن نیمسازهای مثلث
 (۲) هم‌رس بودن میانه‌های مثلث
 (۳) هم‌رس بودن عمودمنصف‌های اضلاع مثلث
 (۴) خاصیت نقاط روی ارتفاع

۱۰. در مثلث ABC شکل مقابل $AB < AC$ است. کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $BH < CH'$
 (۲) $BO < CO$
 (۳) $\widehat{B} > \widehat{C}$
 (۴) $BH' > CH$



۱ (۱) (۲) (۳) (۴)	۳ (۱) (۲) (۳) (۴)	۵ (۱) (۲) (۳) (۴)	۷ (۱) (۲) (۳) (۴)	۹ (۱) (۲) (۳) (۴)
۲ (۱) (۲) (۳) (۴)	۴ (۱) (۲) (۳) (۴)	۶ (۱) (۲) (۳) (۴)	۸ (۱) (۲) (۳) (۴)	۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

بخش دوم

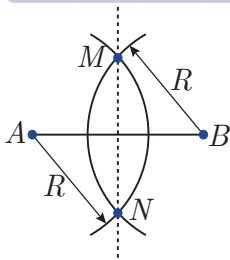
پاسخ نامه تشریحی

-
- پاسخ نامه فصل اول ۱۰۲
 - پاسخ نامه فصل دوم ۱۱۴
 - پاسخ نامه فصل سوم ۱۵۴
 - پاسخ نامه فصل چهارم ۲۰۴
 - پاسخ نامه فصل پنجم ۲۲۴

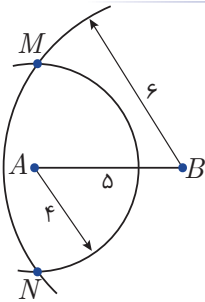
پاسخنامه فصل اول

ترسیم هندسی و استدلال

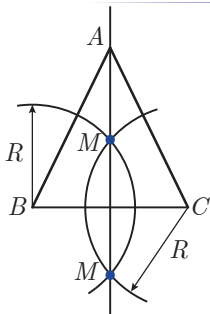
پاسخنامه آزمون ۱: ترسیمات هندسی



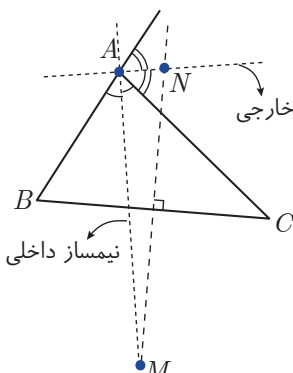
۱. **نقشه ۴** ***
برای رسم عمود منصف یک پاره‌خط مانند AB باید به مرکزهای A و B دو کمان مساوی با شعاع دلخواه ولی بیش‌تر از نصف AB رسم کنیم تا یک‌دیگر را در دو نقطه M و N قطع کنند. خطی که از دو نقطه M و N می‌گذرد، عمود منصف AB است.



۲. **نقشه ۳** ***
اگر به مرکز A شعاع ۴ و نیز به مرکز B شعاع ۶ دو دایره رسم کنیم، چون فاصله دو مرکز از یک‌دیگر از مجموع دو شعاع، کم‌تر و از تفاضل دو شعاع بیش‌تر است، پس این دو دایره یک‌دیگر را در دو نقطه M و N قطع می‌کنند و مسأله دو جواب دارد.



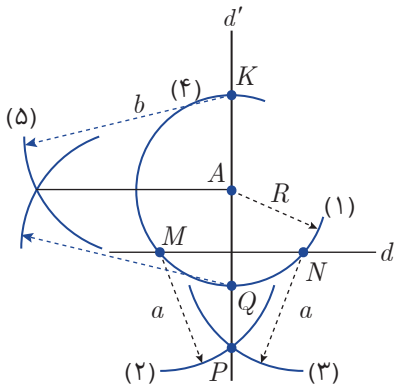
۳. **نقشه ۴** ***
می‌دانیم در یک مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز زاویه رأس، همان عمود منصف قاعده است، پس کافی است عمود منصف BC را رسم کنیم، در نتیجه کافی است دو کمان با شعاع‌های مساوی ولی دلخواه و بیش‌تر از نصف BC رسم و نقاط برخورد این دو کمان را به هم وصل کنیم.



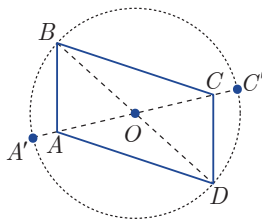
۴. **نقشه ۲** ***
نقاطی که از دو ضلع AB و AC به یک فاصله باشند روی نیمسازهای داخلی و خارجی نظیر رأس A قرار دارند. از طرفی دیگر نقاطی که از دو نقطه B و C به یک فاصله باشند، روی عمود منصف پاره‌خط BC هستند. نقطه‌های برخورد عمود منصف BC با نیمسازها، جواب مسأله می‌باشند که دقیقاً دو نقطه M و N هستند.

 ۵. عمود منصف یک پاره خط، مجموعه تمام نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله باشند.

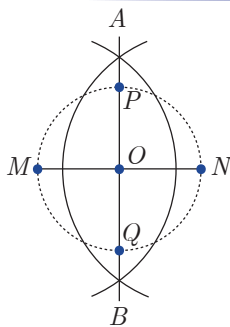
 ۶. ابتدا به مرکز A و شعاع دلخواه، ولی بیش تر از فاصله A از خط d ، کمائی رسم می کنیم (و آن را کمان (۱) می نامیم) تا خط d را در دو نقطه M و N قطع کند. اکنون به مرکزهای M و N و شعاعهای مساوی ولی دلخواه، که بیش تر از نصف MN باشد، دو کمان (کمانهای (۲) و (۳)) را رسم می کنیم تا یکدیگر را در P قطع کنند. خطی که از دو نقطه A و P می گذرد بر d عمود است، پس حداقل به ۳ کمان نیازمندیم.



 ۷. ابتدا به مرکز A و شعاع دلخواه R که بیش تر از فاصله A از خط d است، کمائی رسم می کنیم و آن را کمان (۱) می نامیم تا d را در M و N قطع کند، سپس به مرکزهای M و N و شعاعهای مساوی ولی دلخواه و بیش تر از نصف MN دو کمان (۲) و (۳) را رسم می کنیم تا یکدیگر را در P قطع کنند. خطی که از A و P می گذرد را d' می نامیم. نقطه های برخورد خط d' با کمان (۱) را Q و K می نامیم. اکنون به مرکزهای Q و K و شعاعهای مساوی که بیش تر از R باشند دو کمان رسم می کنیم تا یکدیگر را در B قطع کنند (کمانهای (۴) و (۵)) خطی که از A و B می گذرد با خط d موازی است، پس حداقل به پنج کمان نیازمندیم.

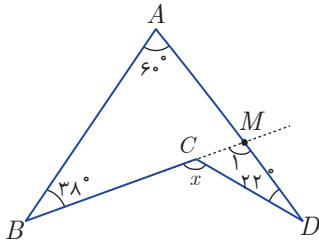


 ۸. ابتدا پاره خط $AC' = 6$ را رسم می کنیم و وسط این پاره خط را O می نامیم. اکنون دهانه پراگر را به اندازه ۴ واحد باز می کنیم و به مرکز O ، دایره ای رسم می کنیم. هر نقطه از این دایره مانند B (به جز A' و C') را به O وصل کنیم و امتداد دهیم تا دایره را در نقطه دیگری مانند D قطع کند. چهار ضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاعی است که طول قطرهای آن ۶ و ۸ هستند. چون B نقطه ای دلخواه و روی دایره است، پس مسأله بی شمار جواب دارد.



 ۹. به مرکزهای M و N و شعاعهای مساوی دلخواه ولی بیش تر از نصف MN دو کمان می زنیم تا یکدیگر را از A و B قطع کند (تا این جا دو کمان). خطی که A را به B وصل می کند را d و نقطه برخورد d با MN را O می نامیم. دهانه پراگر را به اندازه $ON = OM$ باز می کنیم و به مرکز O کمائی می زنیم تا d را در P و Q قطع کند. چهار ضلعی $MPNQ$ مربع مورد نظر است، پس دست کم به سه کمان نیازمندیم.

 ۱۰. از ویژگی های مهم نیمساز یک زاویه این است که هر نقطه روی آن از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

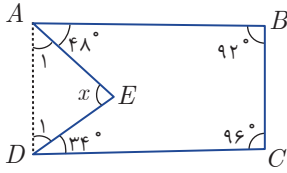


۱. **پرسش ۳** *** اگر ضلع BC را امتداد دهیم تا AD را در M قطع کنند، آن گاه \widehat{M}_1 زاویه خارجی مثلث ABM است و داریم:

$$\widehat{M}_1 = \widehat{A} + \widehat{B} = 60^\circ + 38^\circ = 98^\circ$$

زاویه x برای مثلث CMD زاویه‌ای خارجی است، پس

$$x = \widehat{M}_1 + \widehat{D} = 98^\circ + 22^\circ = 120^\circ$$

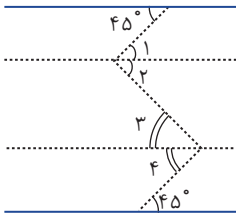


۲. **پرسش ۱** *** اگر از A به D وصل کنیم، در چهارضلعی $ABCD$ مجموع زاویه‌ها 360° است، پس

$$(\widehat{A} + 48^\circ) + 92^\circ + 96^\circ + (\widehat{D}_1 + 34^\circ) = 360^\circ \Rightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{D}_1 = 90^\circ$$

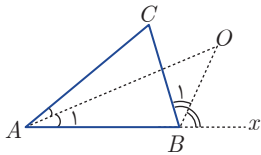
در مثلث ADE داریم

$$\underbrace{\widehat{A}_1 + \widehat{D}_1}_{=90^\circ} + x = 180^\circ \rightarrow 90^\circ + x = 180^\circ \rightarrow x = 90^\circ$$



۳. **پرسش ۲** *** از رأس زاویه‌ها بین دو خط موازی، خط‌هایی موازی با آن‌ها رسم می‌کنیم. با توجه خط‌های موازی و مورب داریم $\widehat{1} = 45^\circ$ و $\widehat{4} = 50^\circ$ پس $\widehat{2} = 60^\circ - 50^\circ = 10^\circ$ بنابراین $\widehat{2} = \widehat{3} = 10^\circ$.

$$x = \widehat{1} + \widehat{2} = 45^\circ + 10^\circ = 55^\circ$$



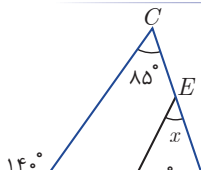
$$\widehat{A}_1 = \frac{1}{3}\widehat{A}$$

$$\widehat{B}_1 = \frac{1}{3}\widehat{CBx} = \frac{1}{3}(180^\circ - \widehat{B}) = 90^\circ - \frac{1}{3}\widehat{B}$$

در مثلث OAB مجموع زاویه‌ها باید 180° باشد، پس:

$$\widehat{A}_1 + (\widehat{B} + \widehat{B}_1) + \widehat{O} = 180^\circ \Rightarrow \frac{1}{3}\widehat{A} + (\widehat{B} + 90^\circ - \frac{1}{3}\widehat{B}) + \widehat{O} = 180^\circ$$

$$\frac{1}{3}\widehat{A} + \frac{1}{3}\widehat{B} + 90^\circ + \widehat{O} = 180^\circ \Rightarrow \frac{1}{3}(\widehat{A} + \widehat{B}) + \widehat{O} = 90^\circ \Rightarrow \frac{1}{3}(180^\circ - \widehat{C}) + \widehat{O} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{O} = \frac{\widehat{C}}{3}$$



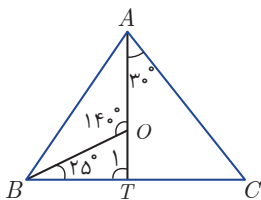
۵. **پرسش ۴** *** زاویه 140° زاویه خارجی مثلث ABC است، پس: $140^\circ + 85^\circ + \widehat{B} = \widehat{B} = 55^\circ$ و در مثلث EFB داریم:

$$x + 60^\circ + 55^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 65^\circ$$

۶. **پرسش ۱** *** در چهارضلعی $BHOP$ داریم:

$$\widehat{O}_1 + \widehat{H} + \widehat{B} + \widehat{P} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{O}_1 + 90^\circ + 70^\circ + 90^\circ = 360^\circ \rightarrow \widehat{O}_1 = 110^\circ$$

اما $x + \widehat{O}_1 = 180^\circ$ پس $x = 70^\circ$.



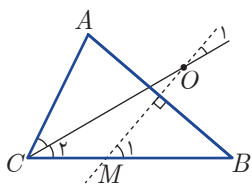
۷. **پرسش ۳** *** AO را امتداد می‌دهیم تا BC را در T قطع کند. زاویه 140° خارجی مثلث BOT است و داریم:

$$25^\circ + \widehat{T}_1 = 140^\circ \Rightarrow \widehat{T}_1 = 115^\circ$$

\widehat{T}_1 زاویه خارجی مثلث ATC است، پس $\widehat{T}_1 = \widehat{A}_1 + \widehat{C} \Rightarrow 115^\circ = 30^\circ + \widehat{C} \Rightarrow \widehat{C} = 85^\circ$

۲. از A به C وصل می‌کنیم. در مثلث ABC ، زاویهٔ خارجی α است و

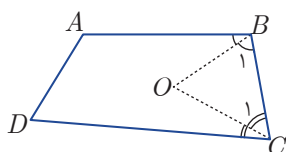
در مثلث ACD ، 3α زاویهٔ خارجی است، پس داریم:



$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \hat{A}_1 + \hat{C}_1 \\ 3\alpha &= \hat{A}_2 + \hat{C}_2 \end{aligned} \right\} \rightarrow 4\alpha = \underbrace{\hat{A}_1 + \hat{A}_2}_{=40^\circ} + \underbrace{\hat{C}_1 + \hat{C}_2}_{=60^\circ} = 100^\circ \Rightarrow \alpha = 25^\circ$$

۳. اگر نیمسازهای داخلی B و C یک‌دیگر را در نقطهٔ O قطع کنند، آن‌گاه در مثلث OBC داریم:

$$\hat{O} + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ \Rightarrow \hat{O} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 180^\circ \rightarrow \hat{O} = 180^\circ - \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} \quad (1)$$



اما در چهارضلعی $ABCD$ داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 360^\circ - (\hat{A} + \hat{D}) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \hat{O} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{2} + \frac{\hat{A} + \hat{D}}{2} = \frac{\hat{A} + \hat{D}}{2}$$

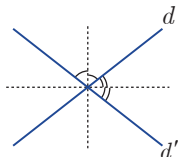
۴. واضح است که زاویهٔ \hat{C} برابر 8° است. اگر عمود منصف AB ضلع BC را در M قطع کند، به سادگی معلوم می‌شود

اما $\hat{M}_1 = 6^\circ$ ، زاویهٔ خارجی مثلث OCM است، پس

$$\hat{M}_1 = \hat{O}_1 + \hat{C}_1 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{M}_1 - \hat{C}_1 = 6^\circ - \frac{8^\circ}{2} = 2^\circ$$

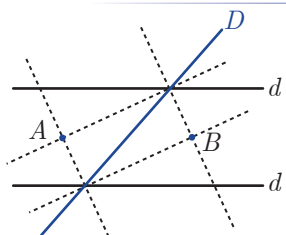
پاسخ‌نامه آزمون ۳: ویژگی نقاط

۱. نقطه‌ای که از سه رأس مثلث به یک فاصله باشد، نقطهٔ هم‌رسی عمود منصف‌های مثلث است و این نقطه یکتا است.



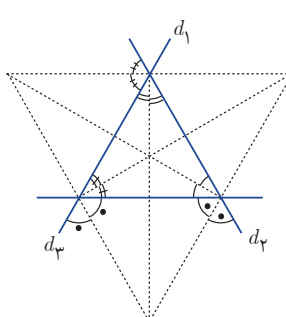
۲. مجموعهٔ نقاطی که از دو خط ناموازی به یک فاصله باشند، روی نیمساز زاویه‌های بین آن

دو خط قرار دارند و می‌دانیم دو خط متقاطع دو نیمساز دارند. پس مجموعهٔ نقاط مورد نظر روی دو خط هستند ولی می‌دانیم نیم‌سازهای دو زاویهٔ مجانب، بر هم عمودند. در نتیجه این مجموعهٔ نقاط دو خط عمود بر هم را تشکیل می‌دهند.



۳. نقطه‌ای که از دو خط d و D به یک فاصله‌اند روی نیمسازهای زوایای بین این

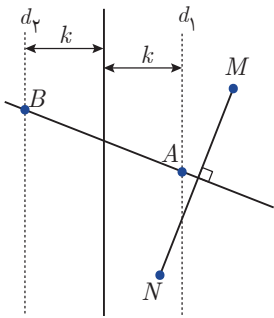
دو خط است و هم‌چنین است برای d' و D . این نیمسازها در دو نقطه، متقاطع هستند (نقاط A و B)



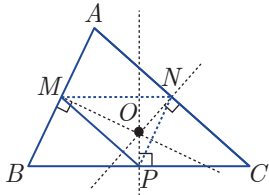
۴. مجموعهٔ نقاطی که از دو خط متقاطع به یک فاصله هستند روی نیمسازهای

زوایایی هستند که با آن دو خط تشکیل می‌شوند. به بیان دیگر نقاطی که از d_1 و d_2 به یک فاصله‌اند، همان نقطهٔ هم‌رسی نیمسازهای مثلثی است که با این سه خط تشکیل می‌شود اما یکی از آن نقاط، نقطهٔ هم‌رسی نیمساز داخلی مثلث است.

ضمناً هر دو نیمساز خارجی نظیر دو زاویهٔ مثلث با نیمساز داخلی زاویهٔ سوم نیز هم‌رس هستند، پس در کل چهار نقطه وجود دارد.

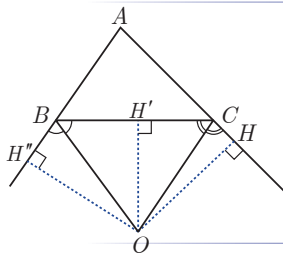


- ***
۵. گزینه ۲ مجموعه نقاطی که از خط d به فاصله معلوم k باشند، دو خط موازی با d هستند. در شکل این دو خط را با d_1 و d_2 نمایش داده‌ایم. از طرف دیگر مجموعه نقاطی که از M و N به یک فاصله هستند، روی عمود منصف MN قرار دارند. نقطه برخورد عمود منصف MN با هر یک از خط‌های d_1 و d_2 جواب مسأله می‌باشد؛ یعنی دو نقطه وجود دارد.



- ***
۶. گزینه ۲ اگر وسط‌های دو ضلع مثلثی را به هم وصل کنیم پاره‌خط حاصل، با ضلع سوم موازی است. عمود منصف AC بر پاره‌خط MP نیز عمود است زیرا $AC \parallel MP$ ، پس عمود منصف AC ، همان ارتفاع رأس N از مثلث MNP است، پس نقطه O ، نقطه هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث MNP می‌باشد.

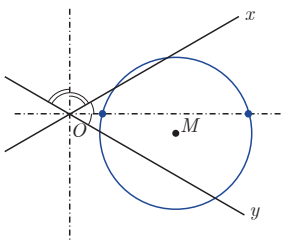
- ***
۷. گزینه ۴ هر نقطه روی نیمساز زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.



- ***
۸. گزینه ۳ اگر نیمسازهای دو زاویه خارجی B و C یک‌دیگر را در نقطه O قطع کنند، آن‌گاه:

$$\left. \begin{array}{l} O \text{ روی نیمساز } B \Rightarrow OH' = OH'' \\ O \text{ روی نیمساز } C \Rightarrow OH' = OH \end{array} \right\} \Rightarrow OH'' = OH$$
 چون O از دو ضلع زاویه داخلی A به یک فاصله است؛ روی نیمساز زاویه A قرار دارد. پس، دو نیمساز خارجی B و C و نیمساز داخلی A در یک نقطه هم‌رس هستند.

- ***
۹. گزینه ۳ چون نقطه مورد نظر از هر چهار رأس به یک فاصله است، پس این نقطه روی عمود منصف‌های هر یک از اضلاع چهار ضلعی قرار دارد. به بیان دیگر، در این چند ضلعی، عمود منصف‌های هر چهار ضلع در آن نقطه، هم‌رس هستند.



- ***
۱۰. گزینه ۴ نقاطی که از Ox و Oy به یک فاصله‌اند، روی نیمسازهای زاویه‌های بین این دو خط قرار دارند. از طرفی نقاطی که از نقطه M به فاصله مشخص R باشد، روی دایره‌ای که به مرکز M و شعاع R قرار دارند. نقطه برخورد دو نیمساز و این دایره، جواب مسأله است. چون دایره با این دو خط، حداکثر در ۴ نقطه می‌تواند برخورد داشته باشد، پس مسأله حداکثر چهار جواب دارد.

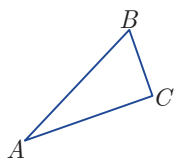
$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A} \\ \hat{A} < \hat{B} \\ \hat{A} < \hat{C} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} 3\hat{A} < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} < 60^\circ$$

پاسخنامه آزمون ۴: نامساوی‌ها

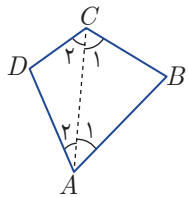
۱. **پایه ۳** مثلثی که متساوی‌الساقین نباشد، اندازه هر سه زاویه آن مخالف یکدیگرند. فرض کنیم در مثلث ABC ، داشته باشیم $\hat{A} < \hat{B} < \hat{C}$ پس: یعنی حداقل یک زاویه کوچک‌تر از 60° دارد.

۲. **پایه ۴** می‌دانیم هر زاویه خارجی مثلث، برابر است با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن پس هر زاویه خارجی از هر زاویه داخلی غیر مجاورش بزرگ‌تر است.

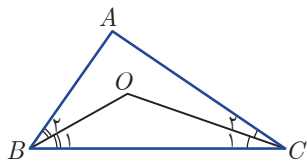
۳. **پایه ۲** چون AB بزرگ‌ترین ضلع و BC کوچک‌ترین ضلع است، پس ترتیب اضلاع مثلث به صورت $BC < AC < AB$ است. می‌دانیم در هر مثلث، ضلعی که بزرگ‌تر است، روبرو به زاویه بزرگ‌تر می‌باشد، پس $\hat{A} < \hat{B} < \hat{C}$. از طرفی: $3\hat{A} < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow 3\hat{A} < 180^\circ \Rightarrow \hat{A} < 60^\circ$
 $3\hat{C} > \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow 3\hat{C} > 180^\circ \Rightarrow \hat{C} > 60^\circ$



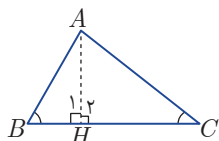
۴. **پایه ۱** چون AB بزرگ‌ترین ضلع است، پس $AB > BC$ ، در نتیجه در مثلث ABC داریم $\hat{C}_1 > \hat{A}_1$ (۱)
 و از آن‌جا که CD کوچک‌ترین ضلع است، پس $AD > CD$ و در نتیجه در مثلث ACD داریم $\hat{C}_2 > \hat{A}_2$ (۲)
 اگر رابطه‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم خواهیم داشت: $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 > \hat{A}_1 + \hat{A}_2$ یا $\hat{C} > \hat{A}$



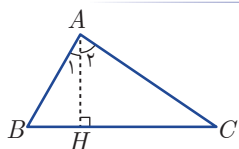
۵. **پایه ۱** چون بنا به فرض $AB < AC$ ، پس $\hat{C} < \hat{B}$ ، در نتیجه $\frac{\hat{C}}{2} < \frac{\hat{B}}{2}$ یا $\hat{C}_1 < \hat{B}_1$ اکنون دو مثلث OBC داریم $OB < OC$.



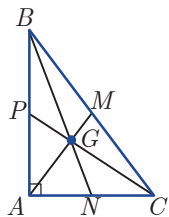
۶. **پایه ۴** اگر ارتفاع AH درون مثلث باشد، خواهیم داشت: $\Delta ABH : \hat{B} < \hat{H}_1 \Rightarrow AH < AB$
 $\Delta ACH : \hat{C} < \hat{H}_2 \Rightarrow AH < AC$
 اگر این دو نامساوی هم‌جهت را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:
 $2AH < AB + AC \Rightarrow AH < \frac{AB + AC}{2}$
 اگر مثلث ABC قائم‌الزاویه و یا ارتفاع AH بیرون مثلث باشد نیز به روش مشابه می‌توان نشان داد که از نصف مجموع دو ضلع مجاورش کوچک‌تر است.

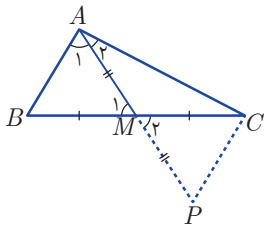


۷. **پایه ۱** $\left. \begin{array}{l} AB < AC \Rightarrow C < B \Rightarrow 90 - C > 90 - B \\ 90 - C = A_2, 90 - B = A_1 \end{array} \right\} \Rightarrow A_2 > A_1$



۸. **پایه ۲** پاره‌خط GN را در نظر می‌گیریم. با توجه به این که زاویه \widehat{BMN} منفرجه است و از زاویه \widehat{BNM} بزرگ‌تر است، پس $BN > BM$ است. پس: البته به همین ترتیب ثابت می‌شود: $CP > AM$ است.



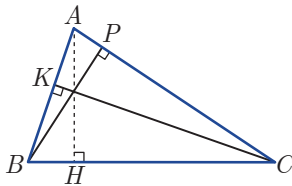


 ۹. **بزینه ۴** اگر AM را به اندازه خودش از طرف M امتداد دهیم تا نقطه P به دست آید و P را به C وصل کنیم. آن گاه:

$$\left. \begin{array}{l} BM = MC \\ AM = MP \\ \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض.ض.ض}} \triangle ABM \cong \triangle PCM \Rightarrow AB = CP \text{ و } \widehat{P} = \widehat{A}$$

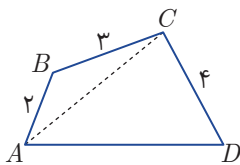
چون $AB < AC$ ، پس $PC < AC$.

انکون در مثلث ACP نتیجه می‌شود $\widehat{A}_1 < \widehat{P}$ و چون $\widehat{P} = \widehat{A}$ در نتیجه $\widehat{A}_1 < \widehat{A}$ یا $\widehat{CAM} < \widehat{BAM}$.

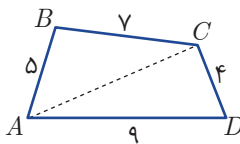


 ۱۰. **بزینه ۲** اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، ارتفاع نظیر ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر از ارتفاع نظیر ضلع بزرگ‌تر است. چون $AB < BC$ ، پس $CK > AH$.

پاسخنامه آزمون ۵ : نامساوی‌ها

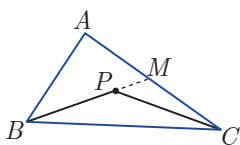


 ۱. **بزینه ۲** از A به C وصل می‌کنیم.
 $\triangle ABC: AC < AB + BC \Rightarrow AC < 5$
 $\triangle ACD: AD < AC + CD < 5 + 4 \Rightarrow AD < 9$
 پس حداکثر مقدار طبیعی AD ، برابر ۸ است.

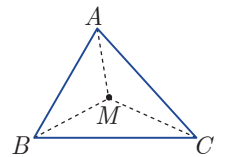


 ۲. **بزینه ۴**
 $\triangle ABC: BC - AB < AC < AB + BC \Rightarrow 2 < AC < 12$ (۱)
 $\triangle ACD: AD - CD < AC < AD + CD \Rightarrow 5 < AC < 13$ (۲)
 $(1) \cap (2) \Rightarrow 5 < AC < 12$

در بین گزینه‌ها تنها گزینه «۴» در این نامساوی صدق می‌کند.



 ۳. **بزینه ۲** اگر امتداد PB ، ضلع AC را در M قطع کند، آن گاه
 $\triangle ABM: BP + PM < AB + AM$
 $\triangle PMC: PC < PM + MC$
 $\Rightarrow PB + PC < AB + \underbrace{AM + MC}_{=AC}$

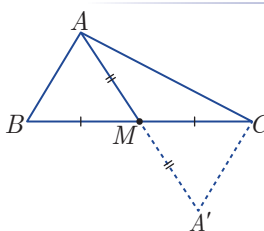


 ۴. **بزینه ۳**
 $\triangle MBC \Rightarrow BC < BM + MC < AB + AC$
 $\triangle MAB \Rightarrow AB < MA + MB < AC + BC$
 $\triangle MAC \Rightarrow AC < MA + MC < AB + BC$

این سه رابطه را که هم جهت هستند با هم جمع می‌کنیم:

$$BC + AB + AC < 2(BM + CM + AM) < 2(AB + AC + BC)$$

$$2P < 2t < 2 \times 2P \Rightarrow P < t < 2P$$

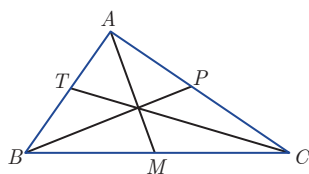


 ۵. **بزینه ۳** اگر میانه AM را به اندازه خودش تا نقطه A' امتداد دهیم، دو مثلث ABM و $A'CM$ هم‌نهشت هستند، پس $A'C = AB$ و داریم:

$$\triangle AA'C: AA' < AC + A'C \Rightarrow 2AM < AC + AB$$

$$\Rightarrow AM < \frac{AB + AC}{2}$$

بنابر تست قبلی داریم: **۲** **۶** *******



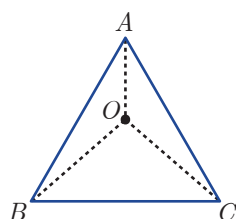
$$\left. \begin{array}{l} AM < \frac{AB+AC}{2} \\ BP < \frac{AB+BC}{2} \\ CT < \frac{AC+BC}{2} \end{array} \right| \xrightarrow{+} AM+BP+CT < \frac{2(AB+AC+BC)}{2} \Rightarrow t < 2P$$

باید هر یک از اضلاع مثبت باشند، پس کافی است داشته باشیم $9x-11 > 0$ یا $x > \frac{11}{9}$ **۳** **۷** *******

از طرفی هر ضلع باید از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر باشد:

$$\left\{ \begin{array}{l} 9x-11 < (\Delta x+2) + (2x+8) \Rightarrow x < \frac{21}{2} \\ \Delta x+2 < (9x-11) + (2x+8) \Rightarrow x > \frac{5}{6} \\ 2x+8 < (9x-11) + (\Delta x+2) \Rightarrow x > \frac{17}{12} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{اشتراک}} \frac{17}{12} < x < \frac{21}{2} \quad (2) \Rightarrow (1) \cap (2) \Rightarrow \frac{17}{12} < x < \frac{21}{2}$$

بیشترین مقدار صحیح x ، برابر 10 و کمترین مقدار صحیح آن 2 است و مجموع آن‌ها 12 است.



فرض کنیم طول ضلع مثلث x باشد و نقطه‌ای دلخواه مانند O در نظر می‌گیریم: **۲** **۸** *******

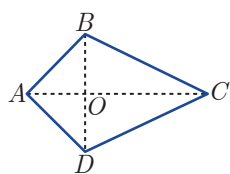
$$\begin{aligned} \Delta AOB: AB - OA < OB &\Rightarrow OA > x - OB \\ \Delta BOC: BC - OC < OB &\Rightarrow OC > x - OB \end{aligned}$$

$$\text{مجموع مسافت‌های پیموده‌شده} = 2 \cdot OA + 3 \cdot OB + 1 \cdot OC > 2 \cdot (x - OB) + 3 \cdot OB + 1 \cdot (x - OB)$$

$$\text{مجموع مسافت‌های پیموده‌شده} > 3 \cdot x + 4 \cdot OB$$

$$\text{مجموع مسافت‌ها} = 2 \cdot AB + 1 \cdot BC = 3 \cdot x \Rightarrow \text{اگر } O \text{ بر } B \text{ منطبق باشد}$$

چون $3 \cdot x < 3 \cdot x + 1 \cdot OB$ ، پس کمترین مجموع مسافت‌های پیموده‌شده زمانی است که O بر B منطبق باشد. **۳** **۹** *******

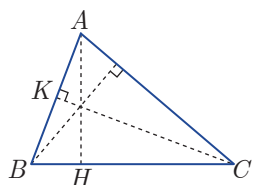


$$\left. \begin{array}{l} \Delta ABC: AB+BC > AC \\ \Delta ADC: AD+DC > AC \\ \Delta ABD: AB+AD > BD \\ \Delta BCD: BC+CD > BD \end{array} \right| \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} \sqrt{(AB+AC+CD+AD)} > \sqrt{(AC+BC)} \Rightarrow 2P > t \quad (1)$$

از طرفی

$$\left. \begin{array}{l} \Delta AOB: AB < OA+OB \\ \Delta BOC: BC < OB+OC \\ \Delta COD: CD < OC+OD \\ \Delta AOD: AD < AO+OD \end{array} \right| \xrightarrow{+} 2P < 2(\underbrace{OA+OC}_{AC} + \underbrace{OB+OD}_{BD}) \Rightarrow P < t \quad (2) \Rightarrow (1), (2) \Rightarrow P < t < 2P$$

اگر $BC > AB$ بزرگترین ضلع و AB کوچکترین ضلع مثلث ABC باشد. **۳** **۱۰** *******



$$\left. \begin{array}{l} S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \times AH \\ S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times CK \end{array} \right| \Rightarrow BC \times AH = AB \times CK$$

چون $BC > AB$ ، پس $AH < CK$: یعنی ارتفاع نظیر بزرگترین ضلع، کوچکترین ارتفاع مثلث است.

پاسخنامه آزمون ۶: استدلال



۱. استدلال استقرایی از جزء به کل رسیدن است. **درجه ۳**

توجه داشته باشیم که استدلال استقرایی می‌تواند درست یا نادرست باشد، پس گزینه «۱» نادرست است. هم‌چنین نتایج حاصل از استدلال استنتاجی همیشه درست هستند و گزینه «۲» نادرست می‌باشد. ضمناً استدلال استنتاجی از درستی قضایای قبلی و اصول پذیرفته شده سرچشمه می‌گیرند، پس گزینه «۴» نیز نادرست است.

۲. اگر در قضیه‌ای جای فرض و حکم را عوض کنیم، گزاره شرطی جدیدی به دست می‌آید که آن را عکس قضیه می‌نامند. توجه داشته باشیم که عکس یک قضیه دلیلی ندارد که درست باشد. **درجه ۴**

۳. گزاره جمله‌ای خبری است و جمله‌های امری، پرسشی و تعجبی نمی‌توانند گزاره باشند. **درجه ۴**
گزینه «۱»: جمله‌ای پرسشی است و گزاره نمی‌باشد.
گزینه «۲»: جمله‌ای امری است و نمی‌تواند گزاره باشد.
گزینه «۳»: نیز جمله‌ای تعجبی است و گزاره نمی‌باشد.
گزینه «۴»: خبری است که می‌تواند درست یا نادرست باشد، پس یک گزاره است.

۴. نقیض گزاره « x ، بزرگ‌تر از y است.» به صورت زیر است: **درجه ۴**
«چنین نیست که x ، بزرگ‌تر از y نیست.» و این معادل است با « x ، کوچک‌تر یا مساوی y است.»

۵. عکس قضیه «اگر دو زاویه قائمه باشند، آن دو زاویه برابرند.» به صورت زیر است: **درجه ۲**
«اگر دو زاویه برابر باشند، آن دو زاویه قائمه هستند.»
این گزاره شرطی، درست نیست، زیرا دو زاویه 25° با هم برابرند ولی قائمه نیستند؛ یعنی قضیه عکس، خودش یک قضیه نیست. در سه گزینه دیگر عکس قضیه‌های داده شده درست هستند.

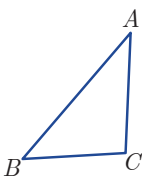
۶. در برهان غیرمستقیم یا همان برهان خلف به جای این که درستی حکم را نشان دهیم، نادرستی نقیض حکم را اثبات می‌کنیم؛ یعنی فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد و به تناقض می‌رسیم. **درجه ۳**

۷. نقیض گزاره «هر مسأله‌ای که بدهید، آن را حل می‌کنم.» به صورت زیر است: **درجه ۳**
«مسأله‌ای وجود دارد که نمی‌توانم آن را حل کنم.»
پس کافی است مسأله‌ای به او بدهیم که نتواند حل کند.

۸. اگر عنصری در دو مجموعه وجود داشته باشد، آن عنصر در اشتراک آن دو مجموعه نیز وجود دارد. توجه کنید که اگر $A \subset B$ باشد، شاید A و B مساوی هم باشند، پس گزینه «۱» نادرست است. هم‌چنین اگر $A \subset B$ و $B \subset A$ باشد، آن‌گاه $A = B$ است و گزینه «۲» نادرست است. ضمناً شاید x ، عضوی از $A \cap B$ نباشد ولی x ، عضوی از A باشد. پس گزینه «۴» هم نادرست است.

۹. چون $AB > AC > BC$ و $AC > BC$ ، نتیجه می‌گیریم $AB > AC > BC$. ضمناً می‌دانیم اگر در مثلثی دو ضلع، نابرابر باشند، ضلعی که بزرگ‌تر است، زاویه مقابل به آن نیز بزرگ‌تر است، پس:

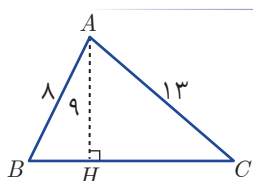
$$\widehat{C} > \widehat{B} > \widehat{A}$$



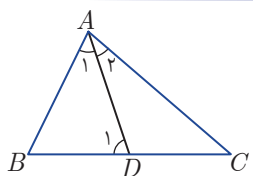
 ۱۰. **پژیه ۴** اگر یکی از عددها ۸ باشد، چون حاصل ضرب آن‌ها ۶۴ است، پس عدد دوم نیز ۸ است و در این مثال، هیچ کدام از عددها بزرگ‌تر از ۸ نیست.

پاسخ نامه آزمون ۱: جامع ۱

 ۱. **پژیه ۴** $BC > AB > AC \Rightarrow \hat{A} > \hat{C} > \hat{B} \Rightarrow 3\hat{A} = \hat{A} + \hat{A} + \hat{A} > \hat{A} + \hat{C} + \hat{B} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} > 60^\circ$ (۱)
 از طرفی $\hat{A} + \underbrace{\hat{B} + \hat{C}}_{= \alpha} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - \alpha$ (۲)
 (۱)، (۲) $\Rightarrow 180^\circ - \alpha > 60^\circ \Rightarrow \alpha < 120^\circ$



 ۲. **پژیه ۱** اگر فرض کنیم مثلث ABC جواب مسئله باشد، آن‌گاه چون در مثلث ABH، $\hat{H} > \hat{B}$ ، پس باید $AB > AH$ باشد ولی چون $AB = 8$ و $AH = 9$ ، چنین مثلی وجود ندارد.



 ۳. **پژیه ۱** $\hat{D}_1 > \hat{A}_1$ زاویه خارجی مثلث ACD است، پس $\hat{D}_1 > \hat{A}_1$ چون $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ، در نتیجه $\hat{D}_1 > \hat{A}_1$ و بنابراین در مثلث ABD نتیجه می‌شود: $AB > BD$

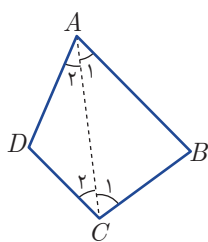
 ۴. **پژیه ۲** بررسی درستی بخشی از یک مجموعه و تعمیم آن به کل مجموعه را استدلال استقرایی نامند.

 ۵. **پژیه ۳** هر ضلع مثلث باید از تفاضل دو ضلع دیگر، بزرگ‌تر باشد، پس در مثلث ABD داریم:
 $AD > BD - AB = (DC + BC) - AB = BC$
 پس $AD > BC$

 ۶. **پژیه ۳** باید هر یک از اضلاع، کوچک‌تر از مجموع دو ضلع دیگر باشد، پس باید داشته باشیم:

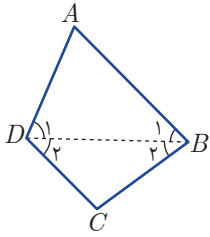
$$\begin{cases} 6x < (4x - 4) + (x + 7) \\ x + 7 < (4x - 4) + 6x \\ 4x - 4 < (x + 7) + 6x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ 11 < 9x \Rightarrow x > \frac{11}{9} \\ -11 < 3x \Rightarrow x > -\frac{11}{3} \end{cases}$$

اشتراک این سه نامساوی به صورت $\frac{11}{9} < x < 3$ است. توجه داشته باشیم که اگر $\frac{11}{9} \leq x < 3$ باشد هر یک از اضلاع مثبت هستند، پس این فاصله قابل قبول می‌باشد.



 ۷. **پژیه ۴** چون AB بزرگ‌ترین ضلع است، پس $AB > BC$ و در مثلث ABC نتیجه می‌شود:
 $\hat{C}_1 > \hat{A}_1$ (۱)
 و چون CD کوچک‌ترین ضلع است، پس $AD > CD$ و در مثلث ACD داریم:
 $\hat{C}_2 > \hat{A}_2$ (۲)
 طرفین نامساوی‌های هم جهت (۱) و (۲) را جمع می‌کنیم:
 $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 > \hat{A}_1 + \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{C} > \hat{A}$
 از طرفی چون AB بزرگ‌ترین ضلع است، پس $AB > AD$ و در مثلث ABD نتیجه می‌شود:

$\hat{D}_1 > \hat{B}_1$ (۳)



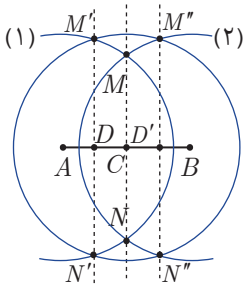
و چون CD کوچکترین ضلع است، پس $BC > CD$ و در مثلث BCD نتیجه می‌شود:

$$\widehat{D}_1 > \widehat{B}_2 \quad (4)$$

$$\widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 > \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 \Rightarrow \widehat{D} > \widehat{B}$$

طرفین نامساوی‌های هم‌جهت (۳) و (۴) را جمع می‌کنیم:

پس گزینه‌های «۱» و «۲» درست هستند.



۸. ابتدا به مرکزهای A و B دو کمان با شعاع‌های مساوی دل‌خواه و بزرگ‌تر از نصف

AB رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در M و N قطع کنند. (کمان به مرکز A را شماره ۱) و کمان به

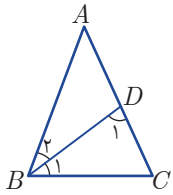
مرکز B را شماره ۲) می‌نامیم. محل برخورد MN با AB را C می‌نامیم و به مرکز C و همان

شعاع قبلی کمانی می‌زنیم تا کمان (۱) را در M' و N' و کمان (۲) را در M'' و N'' قطع کند.

$M'N'$ عمود منصف پاره خط AC و $M''N''$ عمود منصف پاره خط BC است. با رسم پاره خط‌های

$M'N'$ و $M''N''$ پاره خط AB به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌شود و به این ترتیب رسم سه

کمان رسم کرده‌ایم.



۹. اگر $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \alpha$ باشد چون $\widehat{B} = \widehat{C} = 2\alpha$ و چون $BD = BC$ ، در نتیجه

$$\widehat{D}_1 = \widehat{C} = 2\alpha$$

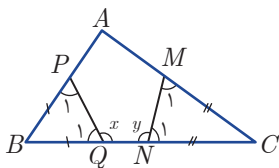
$$\triangle BCD: \widehat{B}_1 + \widehat{D}_1 + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ$$

$$\triangle ABC: \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 180^\circ - 4\alpha = 180^\circ - 4 \times 36^\circ = 36^\circ$$

۱۰. در مثلث BOC ، CH' ارتفاع نظیر OB و BH'' ارتفاع نظیر OC هستند و این دو ارتفاع در نقطه A به هم می‌رسند.

۱۰. ۴. ۳

پاسخ‌نامه آزمون ۸: جامع ۲



$$MC = NC \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{N}_1 = 180^\circ - y$$

$$\widehat{C} = 180^\circ - 2\widehat{N}_1 = 2y - 180^\circ \quad (1)$$

$$BP = BQ \Rightarrow \widehat{P}_1 = \widehat{Q}_1 = 180^\circ - x$$

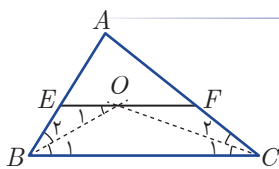
$$\widehat{B} = 180^\circ - 2\widehat{Q}_1 = 2x - 180^\circ \quad (2)$$

۱. ۳. ۳. پس در مثلث MNC داریم:

پس در مثلث BPC داریم:

$$\triangle ABC: \widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - (2x + 2y - 360^\circ)$$

$$A = 540^\circ - 2(x + y) = 540^\circ - 2 \times 214 = 112^\circ$$



$$EO \parallel BC \xrightarrow{\text{مورب } OB} \widehat{O}_1 = \widehat{B}_1 \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{B}_2$$

$$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$$

پس $EO = BE$ ، به دلیل مشابه $OF = FC$

$$\triangle BOE: BO < BE + OE \Rightarrow BO < 2OE$$

$$\triangle COF: CO < OF + FC \Rightarrow CO < 2OF$$

$$BO + CO < 2(OE + OF) \Rightarrow BO + CO < 2EF$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود $OF = FC$ و در نتیجه

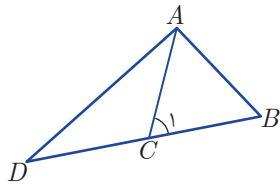
اگر این دو رابطه هم‌جهت را با هم جمع کنیم خواهیم داشت:

۳. باید هر ضلع مثلث از مجموع دو ضلع دیگر، کوچک‌تر باشد و برای این منظور کافی است بزرگ‌ترین ضلع از مجموع

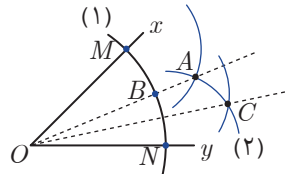
$$5 > \sqrt{5} + \sqrt{5}$$

دو ضلع دیگر کوچک‌تر باشد. در گزینه «۴»، بزرگ‌ترین ضلع، ۵ است و داریم:

زیرا اگر $5 > 2\sqrt{5}$ ، آن‌گاه $5^2 > (2\sqrt{5})^2$ یا $25 > 20$ که همیشه درست است.



 ۴. **تذکره ۳** در مثلث ACD ، $\widehat{C}_1 > \widehat{D}$ پس (۱) $\widehat{C}_1 > \widehat{D}$ از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\widehat{B} > \widehat{D}$ ، چون $AC = AB$ ، پس (۲) $\widehat{B} = \widehat{C}_1$ ، از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\widehat{B} > \widehat{D}$ ، بنابراین در مثلث ABD داریم: $AD > AB$.



 ۵. **تذکره ۱** ابتدا به مرکز O و شعاع دلخواه، کمانی رسم می‌کنیم (کمان (۱)) تا اضلاع زاویه را در M و N قطع کند. اکنون به مرکزهای M و N دو کمان به شعاع R ($R > \frac{MN}{2}$) رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در A قطع کنند. OA نیمساز زاویه xoy است. نقطه برخورد OA با کمان (۱) را B می‌نامیم. اکنون به مرکز B و همان شعاع R کمانی رسم می‌کنیم تا کمان (۲) را در نقطه C قطع کند، OC نیمساز Aoy است، پس زاویه $Coxy$ یک چهارم زاویه xoy است، پس دست کم به چهار کمان نیاز داریم.

 ۶. **تذکره ۲** می‌دانیم هر ضلع مثلث از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است، پس:

$$BC < AB + AC \Rightarrow 2BC < AB + AC + BC = 36 \Rightarrow BC < 18 \quad (1)$$

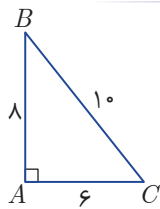
چون BC بزرگ‌ترین ضلع مثلث است. پس:

$$\left. \begin{array}{l} BC > AB \\ BC > AC \end{array} \right\} \Rightarrow 2BC > AB + AC \Rightarrow 3BC > AB + AC + BC = 36 \Rightarrow BC > 12 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 12 < BC < 18$$

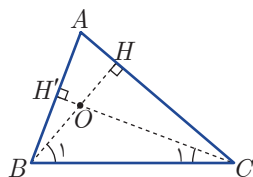
در بین گزینه‌ها فقط ۱۵ در این نابرابری صدق می‌کند.

 ۷. **تذکره ۳** می‌دانیم گزاره جمله‌ای خبری است که می‌تواند درست یا نادرست باشد. گزینه «۱»، جمله‌ای سوالی است. گزینه «۲»، جمله تعجبی است. گزینه «۴»، جمله‌ای امری است. فقط گزینه «۳» جمله‌ای خبری می‌باشد.



 ۸. **تذکره ۴** طول‌های اضلاع این مثلث در رابطه فیثاغورس صدق می‌کنند، پس مثلث، قائم‌الزاویه است. نقطه هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث قائم‌الزاویه همان رأس قائم است و نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث قائم‌الزاویه، نقطه وسط وتر است، پس فاصله این دو نقطه، برابر میانه نظیر وتر است و می‌دانیم میانه وارد بر وتر، نصف وتر است، پس این فاصله برابر ۵ می‌باشد.

 ۹. **تذکره ۳** برای اثبات هم‌رس بودن ارتفاع‌های هر مثلث، از هر رأس، خطی موازی ضلع مقابل رسم می‌کنیم تا مثلث جدیدی حاصل شود. عمودمنصف‌های مثلث جدید همان ارتفاع‌های مثلث اولیه است.



 ۱۰. **تذکره ۴** چون $AB < AC$ است، پس $B > C$ است. در نتیجه $90 - B < 90 - C$ ؛ یعنی $C_1 < B_1$ و در نتیجه در مثلث BOC می‌توان گفت $BO < CO$ است.

$$BH \times AC = CH' \times AB \Rightarrow \frac{BH}{CH'} = \frac{AB}{AC} < 1$$

از طرفی بنا بر رابطه مساحت مثلث داریم:

$$BH < CH$$

در نتیجه $BH < CH$.

بخش سوم

درس نامه

● درس نامه فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال ۲۳۸

● درس نامه فصل دوم: قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن ۲۴۴

● درس نامه فصل سوم: چندضلعی‌ها ۲۵۶

● درس نامه فصل چهارم: تجسم فضایی ۲۶۶

درس نامه فصل اول

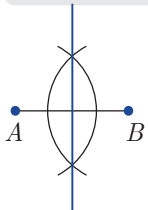
ترسیم هندسی و استدلال

● درسی اول: ترسیم

مجموعه نقاطی که از یک نقطه مشخص مانند O به فاصله مشخص r هستند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع r می‌باشند.

مثال: نقطه A و نقطه B را در نظر بگیرید. نقاطی را مشخص کنید که از A به فاصله ۳ سانتی‌متر و از B به فاصله ۲ سانتی‌متر باشند.

پاسخ: دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ سانتی‌متر و دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو دایره نقاطی هستند که هر دو ویژگی را دارا هستند.

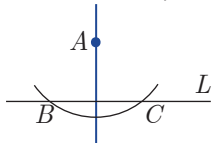


نحوه رسم عمودمنصف یک پاره‌خط: فرض کنیم پاره‌خط AB داده شده باشد. برای رسم عمودمنصف این پاره‌خط به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱ دهانه پرگار را بیش از نصف پاره‌خط AB باز می‌کنیم و کمانی به مرکز A و کمانی به مرکز B می‌زنیم تا یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند.

۲ دو نقطه به وجود آمده را به هم وصل می‌کنیم که همان خط عمودمنصف پاره‌خط AB است.

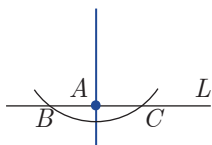
نحوه رسم خطی عمود بر یک خط از یک نقطه بیرون آن: فرض کنیم خط L و نقطه A بیرون آن داده شده‌اند. برای رسم خطی عمود بر خط L از نقطه A به صورت زیر عمل می‌کنیم:



۱ کمانی به مرکز A و شعاع دلخواه و بیش از فاصله A تا خط L می‌زنیم تا خط L را در دو نقطه B و C قطع کند.

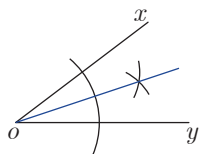
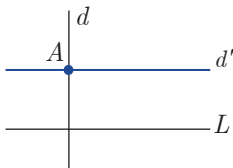
۲ عمودمنصف پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم که حتماً از نقطه A می‌گذرد و بر خط L عمود است.

نحوه رسم خطی عمود بر یک خط از یک نقطه روی آن: فرض کنیم خط L و نقطه A روی آن داده شده‌اند. برای رسم خطی عمود بر خط L از A ، به صورت زیر عمل می‌کنیم:



۱ دهانه پرگار را به مقدار دلخواه باز کرده، کمانی به مرکز A می‌زنیم تا خط L را در دو نقطه B و C قطع کند.

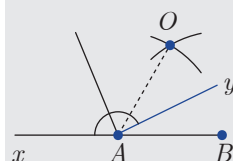
۲ عمودمنصف پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم که حتماً در نقطه A بر خط L عمود است.



نحوه رسم خطی موازی یک خط از یک نقطه بیرون آن: فرض کنیم خط L و نقطه A بیرون آن داده شده‌اند. برای رسم خطی موازی خط L از نقطه A ، باید از دو مسأله رسم قبلی استفاده کنیم. یعنی:

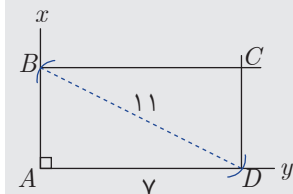
- ۱ از نقطه A خط d را بر خط L عمود می‌کنیم.
 - ۲ از نقطه A خط d' را بر خط d عمود می‌کنیم که حتماً با خط L موازی است.
- نحوه رسم نیمساز یک زاویه: فرض کنیم زاویه xoy داده شده است. برای رسم نیمساز این زاویه:
- ۲ کمانی به مرکز O و شعاع دل‌خواه می‌زنیم تا هر یک از اضلاع زاویه را قطع کند.
 - ۲ دو کمان به مراکز نقاط به دست آمده و شعاع برابر و دل‌خواه می‌زنیم تا یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند.
 - ۲ نقطه O را به نقطه به دست آمده وصل می‌کنیم که همان نیمساز زاویه xoy است.

مثال . یک زاویه 75° درجه رسم کنید.



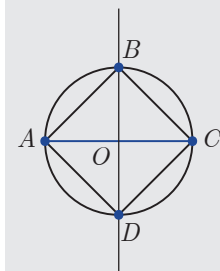
- پاسخ:** (۱) ابتدا پاره‌خط AB را به طول دل‌خواه رسم می‌کنیم.
 (۲) دو کمان به مراکز A و B و شعاع AB می‌زنیم تا از برخورد آن‌ها نقطه O پدید آید.
 (۳) O را به A وصل می‌کنیم و سپس نیمساز زاویه OAB را رسم می‌کنیم و آن را Ay می‌نامیم.
 (۴) نیمساز زاویه بین امتداد AB (یعنی Ax) با Ay را رسم می‌کنیم که در این صورت دو زاویه 75° درجه رسم می‌شود.

مثال . یک مستطیل به قطر ۱۱ سانتی‌متر و یک ضلع ۷ سانتی‌متر رسم کنید.



- پاسخ:** (۱) زاویه xAy را برابر 90° درجه رسم می‌کنیم.
 (۲) کمانی به مرکز A و شعاع ۷ می‌زنیم تا Ay را در B قطع کند.
 (۳) کمانی به مرکز D و شعاع ۱۱ می‌زنیم، تا Ax را در B قطع کند.
 (۴) در نقطه B خطی را بر Ax و در نقطه D خطی را بر Ay عمود می‌کنیم و محل برخورد آن‌ها را C می‌نامیم.
 چهارضلعی $ABCD$ همان مستطیل مورد نظر است.

مثال . پاره‌خط AC داده شده است. مربعی رسم کنید که پاره‌خط AC قطر آن باشد.



- پاسخ:** (۱) عمودمنصف پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم تا AC را در نقطه O قطع کند.
 (۲) دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA می‌زنیم تا خط عمودمنصف را در B و D قطع کند.
 (۳) B و D را به A و C وصل می‌کنیم.
 چهارضلعی $ABCD$ همان مربع مورد نظر است.

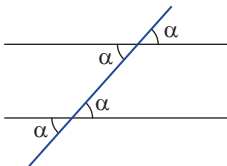
● بررسی دوم: استدلال

الف) انواع استدلال

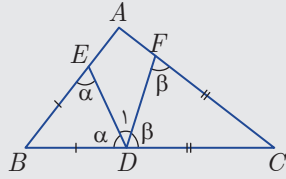
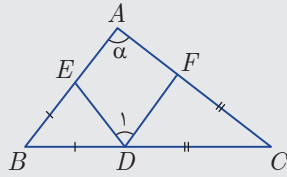
- **استدلال استقرایی:** در این نوع از استدلال، از مشاهده و بررسی موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی در آن موضوع گرفته می‌شود یا به اصطلاح «از جزء به کل» می‌رسیم.
- **استدلال استنتاجی:** این نوع استدلال براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.
- **قضیه:** نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به دست می‌آیند، قضیه نامیده می‌شوند.
- **عکس قضیه:** اگر جای فرض و حکم یک قضیه را عوض کنیم، آن چه حاصل می‌شود، «عکس قضیه» است. که البته می‌تواند درست یا نادرست باشد.
- **قضیه دو شرطی:** اگر یک قضیه و عکس آن، هر دو درست باشند، آن دو را می‌توان یک جا به صورت یک قضیه دو شرطی بیان کرد. به این صورت که یک طرف قضیه را بیان می‌کنیم و در آخر آن کلمه «و بالعکس» اضافه می‌کنیم و یا این که از عبارت «اگر و تنها اگر» استفاده می‌کنیم.
- **مثلا:** اگر مثلث متساوی الساقین باشد، آنگاه دارای دو ارتفاع برابر است و به عکس.
- **یا:** مثلث متساوی الساقین است، اگر و تنها اگر دارای دو ارتفاع برابر باشد.
- **گزاره:** یک جمله خبری است که دقیقاً «درست» یا «نادرست» باشد. اگرچه درستی یا نادرستی آن بر ما معلوم نباشد.
- گزاره می‌تواند یک خبر را اعلام کند که به آن گزاره ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزاره ساده باشد که به آن گزاره مرکب می‌گویند.
- **نقیض یک گزاره:** ارزش یک گزاره دقیقاً درست یا نادرست است. نقیض یک گزاره به صورت «چنین نیست که...» ساخته می‌شود و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود آن گزاره است.
- **برهان خلف:** نوعی از استدلال که به جای این که به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و به یک تناقض یا به یک نتیجه غیرممکن می‌رسیم. به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می‌شود.
- **مثال نقض (نوعی دیگر از استدلال):** مثالی که از آن برای رد یک حکم کلی استفاده می‌شود.

ب) زاویه

- اگر خط موربی دو خط متقاطع را قطع کند، زوایای حاده‌ای که ایجاد می‌شوند با هم و زوایای منفرجه‌ای که ایجاد می‌شوند با هم برابرند.



- مجموع زوایای درونی هر مثلث برابر 180° درجه است.
- هر زاویه بیرونی مثلث برابر مجموع دو زاویه درونی آن است.
- مجموع زوایای درونی هر چهارضلعی برابر 360° درجه است.
- مجموع زوایای درونی هر n ضلعی برابر $180(n-2)$ درجه است.
- مجموع زوایای بیرونی هر n ضلعی برابر 360° درجه است.



مثال. در شکل مقابل پاره‌خط‌های مساوی مشخص شده‌اند. زاویه \widehat{EDF} را برحسب زاویه A محاسبه کنید.

پاسخ: در پاسخ به این گونه سؤالات، برای سرعت بخشیدن به حل و واضح شدن اطلاعات

سؤال برایمان، زوایای برابر را روی شکل برحسب α, β, \dots نشان می‌دهیم.

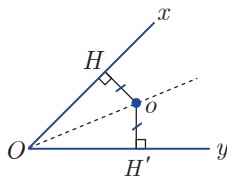
$$\left. \begin{array}{l} 2\alpha + B = 180 \\ 2\beta + C = 180 \end{array} \right\} \Rightarrow 2\alpha + 2\beta + B + C = 360 \rightarrow 2\alpha + 2\beta + (180 - A) = 360$$

$$\rightarrow \alpha + \beta = 90 + \frac{A}{2}$$

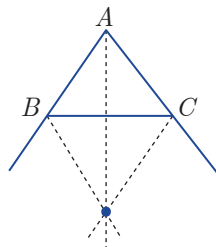
$$D_1 = 180 - (\alpha + \beta) = 180 - (90 + \frac{A}{2}) = 90 - \frac{A}{2}$$

پ) ویژگی‌های نقاط روی برخی اشکال

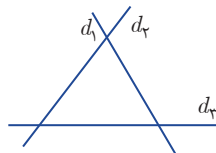
- هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دوسر آن پاره‌خط به یک فاصله است و اگر نقطه‌ای از دوسر آن پاره‌خط به یک فاصله باشد، حتماً روی عمودمنصف آن قرار دارد.



- در هر مثلث هر دو نیمساز خارجی با نیمساز داخلی رأس سوم هم‌مرس‌اند.

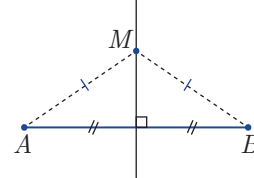


- نقطه هم‌مرسی نیمسازهای مثلث، نقطه‌ای است که از اضلاع آن به یک فاصله‌اند. به عبارت دیگر برای هر سه خط دو به دو متقاطع، چهار نقطه وجود دارد که از آن‌ها به یک فاصله‌اند.



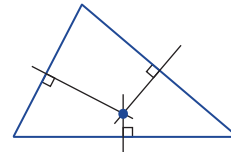
- با استفاده از هم‌مرسی عمود منصف‌های اضلاع مثلث می‌توان نشان داد: «ارتفاع‌های هر مثلث هم‌مرس‌اند.»
- اگر زوایای مثلث همگی حاده باشند، نقطه هم‌مرسی ارتفاع‌ها، درون آن و اگر مثلث دارای زاویه منفرجه باشد، نقطه هم‌مرسی ارتفاع‌ها، بیرون آن واقع می‌شوند.
- در مثلث قائم‌الزاویه نقطه هم‌مرسی ارتفاع‌ها دقیقاً بر روی

- هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از اضلاع آن زاویه به یک فاصله است و اگر نقطه‌ای از اضلاع یک زاویه به یک فاصله باشد، حتماً روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.



- عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث هم‌مرس‌اند.

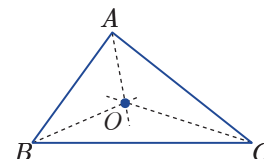
- نقطه هم‌مرسی عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث، نقطه‌ای است که از سه رأس آن به یک فاصله است. به عبارت دیگر برای هر سه نقطه غیرواقع بر یک راستا، یک نقطه وجود دارد که از آن‌ها به یک فاصله است.



توجه! اگر زوایای مثلث حاده باشند، نقطه هم‌مرسی عمودمنصف‌ها، درون مثلث و اگر زاویه منفرجه داشته باشد، نقطه هم‌مرسی عمودمنصف‌ها، بیرون مثلث قرار می‌گیرد. اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، نقطه هم‌مرسی عمودمنصف‌ها، دقیقاً وسط وتر است.

توجه! در یک چهارضلعی اگر عمودمنصف‌های سه ضلع هم‌مرس باشند، عمودمنصف ضلع چهارم هم حتماً از آن نقطه هم‌مرسی، می‌گذرد.

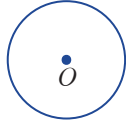
- نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث هم‌مرس‌اند.



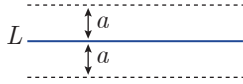
خطی موازی آن‌ها و بین آن دو خط را تشکیل می‌دهند.



نقاطی که از یک نقطه مانند O به فاصله a هستند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع a را تشکیل می‌دهند.



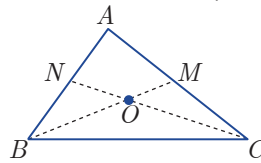
نقاطی که از یک خط مانند L به فاصله a هستند، دو خط موازی در دو طرفش را تشکیل می‌دهند.



رأس قائمه آن منطبق است.

در هر مثلث هر دو میانه یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند. یعنی در شکل روبه‌رو داریم:

$$\frac{BO}{MO} = \frac{CO}{NO} = 2$$



با استفاده از این خاصیت میانه‌ها می‌توان ثابت کرد:

«میانه‌های هر مثلث هم‌مس‌اند.»

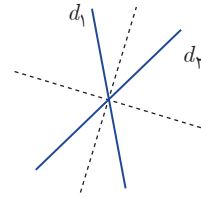
نقطه هم‌رسی میانه‌های هر مثلث را «مرکز ثقل» آن می‌گوئیم.

نقاطی که از دو خط متقاطع d_1 و d_2 به یک فاصله‌اند،

نیمسازهای زوایای بین این دو خط را تشکیل می‌دهند، که

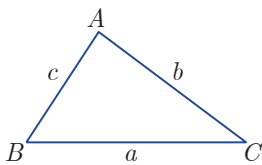
دو خط عمود برهم‌اند.

نقاطی که از دو خط موازی d_1 و d_2 به یک فاصله‌اند،



نامساوی‌ها

۴) در هر مثلث اندازه هر ضلع، از مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر آن کوچک‌تر است. (قضیه حمار) $c < a + b$ و $b < a + c$ و $a < b + c$

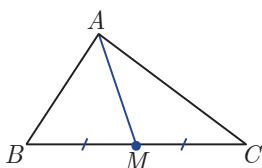


با استفاده از قضیه حمار می‌توان ثابت کرد:

الف) در هر مثلث اندازه هر ضلع، از تفاضل اندازه‌های دو ضلع دیگر آن بزرگ‌تر است.

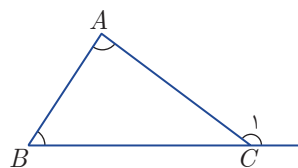
ب) اندازه هر میانه مثلث، از نصف تفاضل دو ضلع مجاور به آن بزرگ‌تر و از نصف مجموع دو ضلع مجاور به آن کوچک‌تر است.

$$\frac{|AB - AC|}{2} < AM < \frac{AB + AC}{2}$$



پ) مجموع فواصل هر نقطه دل‌خواه درون یک مثلث تا رأس‌های آن، از نصف محیط آن مثلث بزرگ‌تر است.

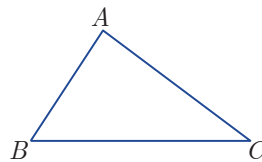
۱) در هر مثلث، هر زاویه خارجی از هر زاویه داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است. $C_1 > A$ و $C_2 > B$



۲) در مثلثی که دو ضلع نابرابر دارد، زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر،

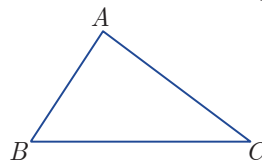
از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.

$$AB < AC \Rightarrow C < B$$



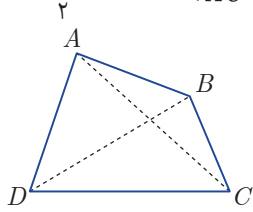
۳) در مثلثی که دو زاویه نابرابر دارد، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر،

از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر، بزرگ‌تر است. $B > C \Rightarrow AC > AB$



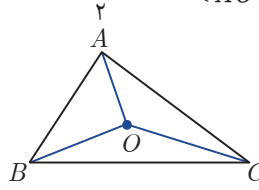
هر کدام آن‌ها از تفاضل دو نای دیگر بزرگ‌تر و از مجموع دو نای دیگر کوچک‌تر است.
 $|m_b - m_c| < m_a < m_b + m_c$
 (ج) در هر چهارضلعی، مجموع دو قطر از نصف محیط آن بزرگ‌تر و از محیط آن کوچک‌تر است.

$$\frac{AB + BC + CD + DA}{2} < AC + BD < AB + BC + CD + DA$$



(ج) در هر مثلث اندازه هر ضلع، از نصف محیط آن کوچک‌تر است.

$$\frac{AB + AC + BC}{2} < AO + BO + CO$$



(ت) اگر اندازه‌های ارتفاع‌های یک مثلث را با h_a ، h_b ، h_c نشان دهیم، بین آن‌ها رابطه زیر برقرار است:

$$\left| \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} \right| < \frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

(ث) چون میانه‌های هر مثلث، خودشان تشکیل مثلث می‌دهند، پس