

مقدمه ویرایش جدید

درسنامه و تست‌های دهم، یازدهم و دوازدهم رو همراه پاسخ‌های تشریحی اون‌ها توی یک کتاب آوردیم!! برای این که حجم کتاب خیلی بالا نره، شروع به دست‌چین کردن تست‌ها و ویرایش درسنامه‌ها کردیم. توی این کار چنان وسواسی به خرج دادیم که مثال‌زدنیه!

از مؤلفای باتجربه خودمون استادان وهاب تقی‌زاده (سرگروه ریاضی دبیرستان البرز)، علیرضا نداف‌زاده (دبیر دبیرستان‌های ممتاز علامه) و شروین سیاح‌نیا خواستیم تا همه درسنامه‌ها و تست‌های کتاب رو دوباره بررسی کنن. یه تعداد از تست‌های خوب آزمون‌های کانون فرهنگی آموزش (قلم‌چی) رو به کتاب اضافه و تست‌های احیاناً تکراری رو حذف کردیم.

ولی به اینجا بسنده نکردیم!

از یه گروه از بهترین دبیرا خواستیم تا (اون‌ها هم) کتاب رو بررسی و نقد کنن تا حتی ایرادهای کوچیک باقی‌مونده هم برطرف شه. (اسامی این دبیرای مطرح کشور رو برای قدردانی توی انتهای این مقدمه آوردیم). کاری کردیم که حداکثر استفاده خرد جمعی رو به کار برده باشیم تا شما تو حداقل زمان به بهترین نتیجه برسین. تست‌های کنکور امسال رو هم به کتاب اضافه کردیم.

روی بند بند جمله‌ها و تست‌های کتاب وقت گذاشتیم. شاید باورتون نشه ولی برای درک مفاهیم کتاب، کلی جلسه با مؤلفای محترم کتاب درسی داشتیم. خلاصه قدر این کتاب رو بدونین.

حالا بذار بگم ما توی درس شیرین ریاضی براتون چیکار کردیم.

هر فصل رو به سه قسمت تقسیم کردیم:

قسمت اول: درسنامه

توی این قسمت یه درسنامه مفصل آوردیم که تمام مباحث رو مو به مو بهت یاد میده که پر از مثال‌ها و تست‌های آموزشی دوست داشتنیه؛ خلاصه این قسمت گل کتابه.

 توی حل تست‌های آموزشی یه روش تکنیکی برات آوردیم که مطمئنم جایی ندیدی!

 یه جاهایی که مهم بوده و باید حفظ باشی رو برات مهر مهم زدیم تا بیشتر وقت بذاری.

 هر جا دیدیم بیشتر بچه‌ها راه‌حل رو اشتباه میرن برات هشدار گذاشتیم.

 اون جاهایی هم که دیدیم درس سنگین شده و فقط به درد بچه‌های قوی می‌خوره یک‌گام فراتر گذاشتیم.

 از همه مهم‌تر!!! یه راه‌حلی رو استفاده کردیم که اصلاً نیاز به فرمول نداره، اسمش رو گذاشتیم فرمول ممنوع، این دیگه آخرشه، بدون این که تست رو حل کنی، جواب رو پیدا می‌کنی.

 نکته،  دقت کنید و  تذکرهم که جای خودشون رو دارن.

قسمت دوم: پرسش‌های چهارگزینه‌ای

تعدادی تست که توسط باتجربه‌ترین معلم‌ها و مؤلف‌ها دست‌چین شدن که هر کدام از این مؤلف‌ها، به وزنه‌ای هستند تو ریاضی!

راستی به سری از تست‌های کنکور سراسری هم که پای ثابت این بخش هستند رو برات تو این قسمت آوردیم. تا یادم نرفته بگم، تک‌تک تمرین‌ها، فعالیت‌ها، مثال‌ها و ... کتاب رو خوندم و به تست تبدیلشون کردیم تا چیزی از دستمون در نره!

بعضی تست‌ها رو با علامت  مشخص کردیم که سوال‌های سختی هستند.

به سری هم تست‌هایی اومده به نام برای ۱۰۰٪ واسه اونایی که می‌خوان ۱۰۰٪ بزبن و برای همه لازم نیست. و در آخر، آزمون گذاشتیم تا ببینیم چند مرده حلاجید.

قسمت سوم: پاسخنامه تشریحی

خیلی از تست‌ها رو با دو روش و حتی بعضی جاها تا سه روش هم حل کردیم که مطمئنم تا حالا این روش‌ها و مسائل یک‌جا توی هیچ کتاب دیگه‌ای به کار نرفتن.

به همه همکارها توصیه کردم تا اون‌جا که میشه فارسی‌نویسی کنن چون همه اساتید ریاضی دوست دارن فقط از علائم ریاضی در حل مسائل استفاده کنن و شاید این طوری کسی که داره پاسخ رو می‌خونه چیزی متوجه نشه. تو پاسخ‌هامون استراتژی حل داریم تا بفهمی مرحله به مرحله چیکار داریم می‌کنیم و در آخر هر چیزی که مهم بوده رو با راهبرد مشخص کردیم تا بیشتر به این قسمت‌ها اهمیت بدی.

قدردانی

توی تهیه این کتاب خیلی‌ها تأثیرگذار بودن، از جمله:

« آقای احمد اختیاری مدیر انتشارات که واقعاً مثل یک کاپیتان، کشتی بزرگ مهروماه رو هدایت می‌کنن.

« استاد محمدحسین انوشه مدیر شورای تألیف که راهنمایی‌ها و مشاوره‌هاشون بسیار مفید بود.

« آقای احسان لعل مسئول ویراستاری و تیم ویراستاریشون خانم مهرنوش رضوی، و آقایان وحید جعفری، امیرحسین عباسی و مهرشاد حسنی که اگه نبودن چاپ کتاب شاید تا سه سال دیگه هم طول می‌کشید.

« گروه هنری خلاق و دوست‌داشتنی انتشارات مهروماه به مدیریت آقای محسن فرهادی و تیم حرفه‌ایشون خانم الهام اسلامی و آقای تایماز کاویانی که با طراحی‌های زیبا روح تازه‌ای به کتاب بخشیدند.

« از گروه تولید انتشارات مهروماه به مدیریت سرکار خانم مریم تاجداری و مدیریت فنی جناب آقای میلاد صفایی و تیم چیره‌دست صفحه‌آرایی خانم رویا طبسی و رسام‌های محترم سرکار خانم مریم صابری و میترا میرمصطفی کمال تشکر را داریم که در مراحل تولید و ویرایش جدید کتاب با صبر و پشتکار فراوان این امر را میسر نمودند

از تمام صاحب‌نظران، استادان و خوانندگان عزیز صمیمانه درخواست می‌کنیم که این مجموعه را از نقد و نظر خود محروم نسازند. خواهشمند است نظرات خود را از طریق اینستاگرم به آیدی زیر ارسال نمایند.

@ashrafii.official

عباس اشرفی

استادان مشاور به سرپرستی آقای میلاد منصوری که از نظرات ارزنده آن‌ها در ویرایش جدید کتاب استفاده نموده‌ایم:

• قمر جیر کریمی • عباس ربیعیان • فرزین عطاران

فهرست

۷	فصل ۱: عبارتهای جبری (اتحادها)	
۱۷	فصل ۲: توانهای گویا (ریشه و رادیکال)	
۲۷	فصل ۳: نامعادله و تعیین علامت	
۳۷	فصل ۴: الگو و دنباله	
۵۳	فصل ۵: هندسه تحلیلی (خط)	
۶۷	فصل ۶: معادلات گویا و گنگ	
۷۷	فصل ۷: قدر مطلق و ویژگیهای آن	
۹۱	فصل ۸: جزء صحیح	
۱۰۳	فصل ۹: مثلثات (دهم، یازدهم)	
۱۳۷	فصل ۱۰: تابع (دهم، یازدهم)	
۱۶۹	فصل ۱۱: معادله و تابع درجه دو	
۱۸۷	فصل ۱۲: توابع نمایی و لگاریتمی	
۲۰۷	فصل ۱۳: حد و پیوستگی	
۲۳۵	فصل ۱۴: تابع (دوازدهم)	
۲۶۵	فصل ۱۵: مثلثات (دوازدهم)	
۲۹۳	فصل ۱۶: حدهای نامتناهی و حد دربی نهایت	
۳۳۹	فصل ۱۷: مشتق	
۳۸۹	فصل ۱۸: کاربردهای مشتق	
۴۳۷	پاسخنامه تشریحی	
۶۴۶	پاسخنامه کلیدی	
۶۵۳	سؤالات کنکور ۱۴۰۰	



معادله و تابع درجه دو

این فصل به دو بخش اصلی نمودار تابع درجه دوم و ریشه‌های آن تقسیم می‌شود. یافتن ضابطه از روی نمودار و پارامتریابی به کمک ریشه‌ها نیز از مباحث این فصل هستند.

حل معادله درجه دوم

به معادله‌ای یک مجهولی که پس از ساده نمودن، بزرگ‌ترین درجه متغیر آن دو است، معادله درجه دوم می‌گوییم. برای حل معادله درجه دوم از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم:

الف) روش تجزیه

در این روش می‌توانیم از اتحاد مزدوج ($x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$) یا اتحاد جمله مشترک ($x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$) استفاده کنیم.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $(x-1)^2 - 4 = 0$

ب) $x^2 - 8x + 7 = 0$

الف) $(x-1)^2 - 4 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} ((x-1)-2)((x-1)+2) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$

پاسخ

ب) $x^2 - 8x + 7 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} x^2 + (-1-7)x + (-1)(-7) = 0 \Rightarrow (x-1)(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x-7=0 \Rightarrow x=7 \end{cases}$

استراتژی حل: می‌خواهیم معادله $3x^2 - 2x - 8 = 0$ را به کمک تجزیه حل کنیم.

با توجه به روش زیر عبارت را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$3x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}(3x^2 - 2x - 8) = 0$$

حال به دنبال دو عدد می‌گردیم که جمع آن‌ها برابر -2 و ضرب آن‌ها برابر $3 \times (-8) = -24$ باشند:

$$\frac{1}{3}(3x^2 - 2x - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 3x + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

ضرب
 $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \frac{1}{a}(ax^2 + bx + c) = 0$

برای حل برخی از معادلات درجه دوم ضریب‌دار، می‌توان از قاعدهٔ روبه‌رو استفاده نمود:

برای تکمیل تجزیه، باید ۲ عدد بیابیم که جمع آن‌ها b و حاصل ضرب آن‌ها برابر ac باشد و آن‌ها را درون پرانتزها جای گذاری کنیم.

نکته:

۱) در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر مجموع ضرایب برابر صفر شود ($a + b + c = 0$)، ریشه‌های معادله $x_1 = 1$ و $x_2 = \frac{c}{a}$ هستند.

برای نمونه: ریشه‌های معادله $5x^2 - 2x - 2 = 0$ برابر ۱ و $\frac{c}{a} = -\frac{2}{5}$ هستند.

۲) در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر $a + c = b$ باشد، ریشه‌های معادله $x_1 = -1$ و $x_2 = -\frac{c}{a}$ هستند.

برای نمونه: ریشه‌های معادله $7x^2 + 4x - 2 = 0$ برابر -1 و $-\frac{c}{a} = -\frac{-2}{7} = \frac{2}{7}$ هستند.

ب) روش مربع

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

برای حل معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ابتدا طرفین را بر a تقسیم می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \xrightarrow{\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}} x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

سپس ضریب x را نصف کرده و مربع آن را به طرفین اضافه می‌کنیم:

سه جمله عبارت بالا را به اتحاد مربع کامل تبدیل می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

با جذر گرفتن از طرفین معادله آخر، مقدار x به دست می‌آید.

تست: درحل معادله $5x^2 - 2x = 1$ به روش مربع کامل، پس از آن‌که ضریب x^2 را به یک تبدیل می‌کنیم، کدام عدد را به طرفین معادله اضافه می‌کنیم؟

$\frac{5}{3}$ (۴)

$\frac{25}{9}$ (۳)

$\frac{3}{10}$ (۲)

$\frac{9}{100}$ (۱)

$$x^2 - \frac{3}{5}x = \frac{1}{5}$$

$$-\frac{3}{5} \div 2 = -\frac{3}{10}$$

$$\left(-\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{9}{100}$$

پاسخ **گزینه ۱** طریقین معادله را بر ۵ تقسیم می‌کنیم:
ضرب x را نصف می‌کنیم:
عدد حاصل را به توان دو می‌رسانیم:
باید $\frac{9}{100}$ را به طریقین معادله اضافه کنیم.

پا روش کلی حل

ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ به صورت $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ می‌باشند که در آن $\Delta = b^2 - 4ac$ است. در این معادله در صورتی که:



- ① اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دو ریشه حقیقی و متمایز دارد.
- ② اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله یک ریشه مضاعف دارد.
- ③ اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد.

① **تست:** حدود m کدام باشد تا معادله $mx^2 + (m-1)x + m = 0$ حداقل یک ریشه داشته باشد؟

(۱) $(-\infty, -\frac{1}{3})$ (۲) $[-1, \frac{1}{3}]$ (۳) $(-\infty, -1] \cup [\frac{1}{3}, +\infty)$ (۴) $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$

پاسخ **گزینه ۲** وقتی معادله درجه دوم، حداقل یک ریشه دارد، یعنی یا یک و یا دو ریشه دارد. بنابراین دلتای معادله، مثبت یا صفر است.

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 4m \times m \geq 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 - 4m^2 \geq 0 \Rightarrow -3m^2 - 2m + 1 \geq 0$$

باید ریشه‌های معادله $-3m^2 - 2m + 1 = 0$ را بیابیم. در این معادله $a + c = b$ است، پس ریشه‌ها -1 و $\frac{1}{3}$ هستند. $x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$ و $x_1 = -1$ است.



اکنون جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم:

در بازه $[-1, \frac{1}{3}]$ مقدار دلتا مثبت یا صفر است و معادله حداقل یک ریشه دارد.

② **توجه:** در حالت $m = 0$ ، معادله به صورت $-x = 0$ درمی‌آید و معادله درجه دوم نیست ولی یک ریشه دارد.

③ **نکته:** عبارت درجه دومی قابل تبدیل به مربع کامل است که دلتای آن برابر صفر باشد.

① **تست:** چند واحد به عبارت $25x^2 - x - 1$ اضافه کنیم تا تبدیل به مربع کامل شود؟

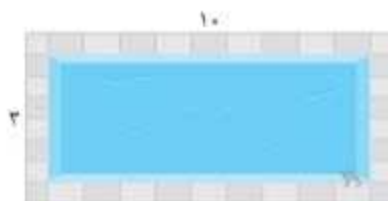
(۱) $\frac{1}{100}$ (۲) $\frac{101}{100}$ (۳) $\frac{100}{101}$ (۴) $\frac{11}{10}$

پاسخ **گزینه ۲** فرض می‌کنیم باید k واحد به $25x^2 - x - 1$ اضافه کنیم تا مربع کامل شود، پس عبارت $25x^2 - x - 1 + k$ مربع کامل است و

اگر دلتای آن را محاسبه کنیم باید برابر صفر شود. $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(25)(-1+k) = 0 \Rightarrow 1 + 100 - 100k = 0 \Rightarrow k = \frac{101}{100}$

کاربرد معادله درجه دوم در حل مسائل

برای درک این مفهوم به مثال زیر توجه کنید:



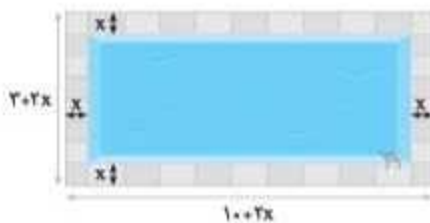
② **مثال:** یک استخر مستطیل شکل به طول ۱۰ متر و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ متر مربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید. (تمرین کتاب دوس)

پاسخ فرض می‌کنیم پهنای آبراه x باشد. مساحت مستطیل خارجی برابر $(10+2x)(3+2x)$ است. مساحت آبراه با کم کردن مساحت استخر از مساحت مستطیل خارجی، به دست می‌آید.

$$\text{مساحت آبراه} = (10+2x)(3+2x) - 3 \times 10$$

$$14 = (30 + 26x + 4x^2) - 30$$

با حل معادله فوق، پهنای آبراه پیدا می‌شود:



$$26x + 4x^2 = 14 \xrightarrow{+2} 2x^2 + 13x = 7 \Rightarrow 2x^2 + 13x - 7 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(2x+14)(2x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -7 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

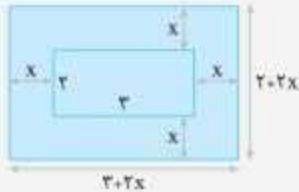
بنابراین پهنای آبراه برابر $\frac{1}{2}$ متر است.

تست: می‌خواهیم بر روی یک میز 2×2 متری، یک رومیزی مستطیل شکل به مساحت ۲۰ متر مربع، پهن کنیم، به طوری که از هر چهار طرف به یک اندازه آویزان شده باشد. رومیزی از هر طرف چقدر آویزان شده است؟



- ۲ (۱) $\frac{2}{3}$
- ۱ (۳) $\frac{1}{2}$

پاسخ (گزینه ۳): اگر طول مقداری از رومیزی که آویزان است را x در نظر بگیریم، با توجه به شکل زیر خواهیم داشت:



$$\begin{aligned} \text{مساحت رومیزی} &= (2+2x)(2+2x) \\ 20 &= 4+10x+4x^2 \end{aligned}$$

$$4x^2 + 10x - 16 = 0$$

با حل این معادله مقدار x را می‌یابیم:

در این معادله درجه دوم مقدار $a+b+c=0$ است، پس ریشه‌ها $x_1 = \frac{c}{a} = -\frac{y}{x}$ ، $x_2 = 1$ می‌باشند. با توجه به این که طول نمی‌تواند منفی باشد، تنها گزینه قابل قبول $x=1$ است.

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، می‌توان مجموع و حاصل ضرب آن‌ها را به کمک روابط زیر پیدا کرد.

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases}$$



تست: کدام m باشد تا ریشه‌های معادله $x^2 + (m-2)x + m^2 - 2 = 0$ معکوس هم باشند؟

- ۲ (۳) ± 2
- ۲ (۱) -2

(۴) هیچ مقداری برای m وجود ندارد.

پاسخ (گزینه ۱): اگر ریشه‌های معادله معکوس هم باشند، حاصل ضرب آن‌ها برابر ۱ می‌باشد، بنابراین $P = \frac{c}{a} = 1$ است.

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m^2 - 2}{1} = 1 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

اما دقت کن! گزینه «۳» صحیح نیست، زیرا به ازای دو مقدار $m = \pm 2$ باید معادله دارای دو ریشه باشد، یعنی دلتای معادله باید مثبت باشد.

$$x^2 + (m-2)x + m^2 - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=2 : x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 = -3 < 0 \\ m=-2 : x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 = 21 > 0 \end{cases}$$

درحالتی که $m=2$ باشد، معادله ریشه ندارد و این جواب قابل قبول نیست.

نکته: اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است. $(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

تست: به ازای دو مقدار m ریشه‌های معادله $x^2 - (2m+1)x + 6m = 0$ دو عدد متوالی‌اند. مجموع این دو مقدار کدام است؟

- ۵ (۳) 10
- ۵ (۲) -10
- ۵ (۱) -5

پاسخ (گزینه ۲): ریشه‌های معادله، دو عدد متوالی‌اند، بنابراین تفاضل آن‌ها برابر ۱ است.

$$|\alpha - \beta| = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{(-(2m+1))^2 - 4(6m)}}{1} = 1 \Rightarrow (2m+1)^2 - 24m = 1$$

$$\Rightarrow 4m^2 + 4m + 1 - 24m = 1 \Rightarrow 4m^2 - 20m = 0 \Rightarrow 4m(m-5) = 0 \Rightarrow m=0, m=5$$

به‌ازای این دو مقدار معادله دارای دو ریشه صحیح متوالی می‌باشد و مجموع این دو مقدار برابر ۵ است.

محاسبه روابط متقارن بین ریشه‌ها

به روابطی از ریشه‌ها که با جابه‌جا کردن ریشه‌ها مقدار آن‌ها تغییر نمی‌کند رابطه‌های متقارن می‌گویند. برای نمونه: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$, $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha^2 + \beta^2$, $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$. برای محاسبه این مقادیر، معمولاً از اتحادها یا منفرجه مشترک استفاده می‌کنیم.

برای نمونه: برای محاسبه مقدار $\alpha^2 + \beta^2$ آن را به شکل $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ درمی‌آوریم. با قراردادن S به جای $\alpha + \beta$ و P به جای $\alpha\beta$ حاصل عبارت به صورت $S^2 - 2P$ درمی‌آید.

❗ تست: اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 2x - 8 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta}{\alpha+1}$ کدام است؟

$$\frac{-25}{18} \text{ (۴)} \quad \frac{25}{18} \text{ (۳)} \quad \frac{18}{25} \text{ (۲)} \quad \frac{-18}{25} \text{ (۱)}$$

پاسخ گزینه ۴ این رابطه، یک رابطه متقارن است، چون با تغییر α به β و بالعکس، حاصل عبارت تغییر نمی‌کند. به زبان خودمانی هر بلایی سر α آمده بر سر β هم آمده!

$$\frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta}{\alpha+1} = \frac{\alpha^2 + \alpha + \beta^2 + \beta}{(\beta+1)(\alpha+1)} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha + \beta}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1}$$

برای شروع، منفرجه مشترک می‌گیریم:

$$\frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + \alpha + \beta}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1} = \frac{S^2 - 2P + S}{P + S + 1}$$

حالا به جای $\alpha^2 + \beta^2$ عبارت $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ را جای گذاری می‌کنیم:

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{8}{1} = -8, \quad S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2 \Rightarrow \frac{S^2 - 2P + S}{P + S + 1} = \frac{(-2)^2 - 2(-8) + (-2)}{-8 + (-2) + 1} = \frac{4}{-9} = -\frac{4}{9}$$

❶ $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$

❷ $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2PS$

❸ $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{S}{P}$

نکته: برای محاسبه سریع‌تر، بهتر است برخی از روابط را به‌خاطر بسپارید.

❗ تست: اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 7x + 4 = 0$ باشند، حاصل $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ کدام است؟

$$\sqrt{10} \text{ (۴)} \quad \sqrt{11} \text{ (۳)} \quad \sqrt{7} \text{ (۲)} \quad 2 \text{ (۱)}$$

پاسخ گزینه ۳ اگر فرض کنیم حاصل $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ برابر عددی مانند A باشد، طرفین را به توان دو می‌رسانیم:

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = A \Rightarrow (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = A^2 \Rightarrow \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = A^2 \Rightarrow \sqrt{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}} = A \Rightarrow \sqrt{S + 2\sqrt{P}} = A$$

$$A = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} = \sqrt{7 + 2\sqrt{4}} = \sqrt{7 + 4} = \sqrt{11} \quad \text{در این معادله } P = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4 \text{ و } S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-7)}{1} = 7 \text{ هستند}$$

محاسبه روابط نامتقارن بین ریشه

رابطه‌ای که متقارن نباشد، نامتقارن نامیده می‌شود. برای محاسبه این روابط، از جای‌گذاری ریشه‌ها در معادله کمک می‌گیریم.

❗ تست: اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 6x - 3 = 0$ باشند، حاصل $A = \alpha\beta^2 - 6\alpha\beta$ کدام است؟

$$-18 \text{ (۴)} \quad 18 \text{ (۳)} \quad -9 \text{ (۲)} \quad 9 \text{ (۱)}$$

$$A = \alpha\beta^2 - 6\alpha\beta = \alpha\beta(\beta - 6)$$

پاسخ گزینه ۲ در رابطه داده شده از $\alpha\beta$ فاکتور می‌گیریم:

$$\beta^2 - 6\beta - 3 = 0 \Rightarrow \beta^2 - 6\beta = 3$$

با جای‌گذاری β به‌عنوان ریشه در معادله $x^2 - 6x - 3 = 0$ به عبارت $\beta^2 - 6\beta - 3 = 0$ می‌رسیم:

$$A = \alpha\beta(\beta^2 - 6\beta) = \alpha\beta(3) = 3\alpha\beta = 3P$$

اکنون به محاسبه A می‌پردازیم:

$$A = 3P = 3(-3) = -9$$

در این معادله $P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{3}{1} = -3$ است، پس:

❗ تست: اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 4 = 0$ باشند، حاصل $(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2$ کدام است؟

$$-28 \text{ (۴)} \quad 28 \text{ (۳)} \quad -16 \text{ (۲)} \quad 16 \text{ (۱)}$$

$$\alpha^2 - 2\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 4 = 2\alpha$$

پاسخ گزینه ۳ را در معادله $x^2 - 2x - 4 = 0$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2 = (2\alpha)^2 + 4\beta^2 = 4\alpha^2 + 4\beta^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2)$$

حال به محاسبه عبارت $(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2$ می‌پردازیم:

$$4(\alpha^2 + \beta^2) = 4(S^2 - 2P)$$

در بخش رابطه‌های متقارن ثابت کردیم که $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$ است، پس:

$$4(2^2 - 2(-4)) = 4(4 + 8) = 48$$

در این معادله $P = \frac{c}{a} = \frac{-4}{1} = -4$ و $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-2)}{1} = 2$ هستند.

بحث راجع به ریشه‌های معادله درجه دوم

با استفاده از Δ ، S و P می‌توان (بدون حل معادله) در مورد وجود و علامت ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ بحث نمود:
الف) اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد.

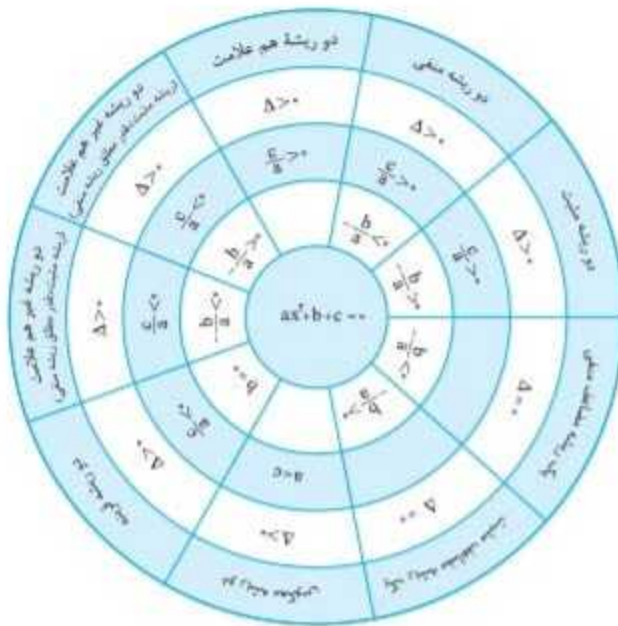
ب) اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله یک ریشه مضاعف برابر $x = -\frac{b}{2a}$ و هم‌علامت با S دارد.

پ) اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دو ریشه متمایز دارد. در صورتی که $P < 0$ باشد، دو ریشه مختلف‌العلامت هستند و اگر $P > 0$ باشد، دو ریشه هم‌علامت بوده و در این حالت، ریشه‌ها، هم‌علامت با S هستند.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow \text{معادله ریشه حقیقی ندارد.} \\ \Delta = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \text{ معادله ریشه مضاعفی هم‌علامت با } S \text{ دارد.} \\ \Delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} P < 0 \Rightarrow \text{معادله دو ریشه مختلف‌العلامت دارد.} \\ P > 0 \Rightarrow \begin{cases} S > 0 \Rightarrow \text{معادله دو ریشه مثبت دارد.} \\ S < 0 \Rightarrow \text{معادله دو ریشه منفی دارد.} \end{cases} \end{cases}$$



گردونه علامت:



تست: معادله $mx^2 + (2-2m)x + 2m = 0$ به ازای $m \in (a, b)$ دارای دو ریشه حقیقی مثبت است. حداکثر $b - a$ کدام است؟

پاسخ گزینه ۲ در مرحله اول دلتای معادله باید مثبت باشد، پس:

$$2\sqrt{2} - 2 \quad (4) \qquad 2 - \sqrt{2} \quad (3) \qquad \sqrt{2} + 1 \quad (2) \qquad \sqrt{2} - 1 \quad (1)$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow (2-2m)^2 - 4(m)(2m) > 0 \Rightarrow 4 + 4m^2 - 8m - 8m^2 > 0 \Rightarrow -2m^2 - 8m + 4 > 0$$

طرفین را بر -2 تقسیم می‌کنیم تا ضریب m^2 مثبت شود:

$$m^2 + 2m - 1 < 0$$

برای حل این نامعادله باید ریشه‌های معادله $m^2 + 2m - 1 = 0$ را بیابیم:

$$m^2 + 2m - 1 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

به کمک جدول تعیین علامت حدود m را پیدا می‌کنیم:

$$P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{2m}{m} > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (2)$$

در مرحله دوم حاصل ضرب ریشه‌ها باید مثبت باشد.

در مرحله سوم باید مجموع ریشه‌ها مثبت باشد.

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{2-2m}{m} > 0 \Rightarrow \frac{2m-2}{m} > 0 \Rightarrow \begin{matrix} m & -\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 2m-2 & - & 0 & + & + \\ m & - & 0 & + & + \\ \frac{2m-2}{m} & + & 0 & - & + \end{matrix} \Rightarrow (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \quad (2)$$

پاسخ نهایی تست اشتراک مجموعه‌های (۱)، (۲) و (۳) است.

$$\underline{(1) \cap (2) \cap (3)} \rightarrow -1-\sqrt{2} < m < 0 \Rightarrow m \in (-1-\sqrt{2}, 0) \Rightarrow \begin{cases} a = -1-\sqrt{2} \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow b-a = 0 - (-1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}+1$$

ساختن معادله درجه دوم

معادله درجه دومی که α و β ریشه‌های آن باشند، به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ نوشته می‌شود که در آن $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ هستند.

(تمرین کتاب درسی)

مثال: معادله درجه دومی بسازید که ریشه‌های آن $2+\sqrt{3}$ و $2-\sqrt{3}$ باشند.

$$\begin{cases} S = (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4 \\ P = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4-3 = 1 \end{cases}$$

پاسخ ابتدا به محاسبه مجموع و حاصل ضرب این دو ریشه می‌پردازیم:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

حال مقادیر S و P را در معادله جای گذاری می‌کنیم:

تست: اگر بخواهیم زمینی مستطیل شکل به مساحت ۴۸ متر مربع را با طنابی به طول ۲۲ متر محصور کنیم، حاصل تقاضل عرض از طول مستطیل

(مشابه تمرین کتاب درسی)

کدام است؟

۱۴ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۸ (۱)

پاسخ **گزینه ۱** اگر طول مستطیل را α متر و عرض آن را β متر در نظر بگیریم، محیط مستطیل ۲۲ متر و مساحت آن ۴۸ متر مربع است.

$$\beta \begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 22 \\ \alpha\beta = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 11 \\ \alpha\beta = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 11 \\ P = 48 \end{cases}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 11x + 48 = 0$$

حال معادله درجه دومی که ریشه‌های آن α و β است را پیدا می‌کنیم:

برای محاسبه تقاضل عرض از طول مستطیل ($|\alpha - \beta|$) می‌توان از رابطه $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ استفاده نمود:

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{(-11)^2 - 4(1)(48)}}{|1|} = \sqrt{121 - 192} = \sqrt{64} = 8$$

البته برای محاسبه تقاضل دو ریشه در اینجا چون حل معادله $x^2 - 11x + 48 = 0$ کار سختی نیست، می‌توانیم خود ریشه‌ها را نیز محاسبه کنیم:

$$x^2 - 11x + 48 = 0 \Rightarrow (x-12)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 12 = \alpha \\ x = 4 = \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha - \beta = 12 - 4 = 8$$

تست: معادله درجه دومی با ضرایب گویا که یکی از ریشه‌های آن $x_1 = 2 - \sqrt{n}$ باشد، کدام است؟ ($n \in \mathbb{N}$)

$$x^2 - 4x + 4 - n = 0 \quad (۴) \quad x^2 + 4x_1 + 4 - n = 0 \quad (۳) \quad x^2 - 4x + 4 + n = 0 \quad (۲) \quad x^2 + 4x + 4 + n = 0 \quad (۱)$$

پاسخ **گزینه ۴** به توان رساندن طرفین معادله $x_1 = 2 - \sqrt{n}$ و از بین بردن رادیکال، معادله درجه دوم ظاهر می‌شود.

$$x_1 = 2 - \sqrt{n} \Rightarrow x_1 - 2 = -\sqrt{n} \Rightarrow (x_1 - 2)^2 = n \Rightarrow x_1^2 - 4x_1 + 4 - n = 0$$

بنابراین معادله می‌تواند به صورت $x^2 - 4x + 4 - n = 0$ باشد.

ساختن معادله درجه دوم بر اساس ریشه‌های یک معادله دیگر

این بخش را به کمک یک مثال پیش می‌بریم:

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 5 = 0$ باشند، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش $2\alpha + 1$ و $2\beta + 1$ باشند.

پاسخ می‌دانیم مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 5 = 0$ به ترتیب 2 و -5 است $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2$ و $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-5}{1} = -5$ هستند.

حال مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله جدید، یعنی $2\alpha + 1$ و $2\beta + 1$ را محاسبه می‌کنیم:

$$S' = \text{جدید } S = (2\alpha + 1) + (2\beta + 1) = 2(\alpha + \beta) + 2 = 2(2) + 2 = 8$$

$$P' = \text{جدید } P = (2\alpha + 1)(2\beta + 1) = 4\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 1 = 4(-5) + 2(2) + 1 = -20 + 4 + 1 = -15$$

معادله درجه دومی را می‌یابیم که مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های آن به ترتیب ۸ و -۱۵ هستند. $X^2 - S'X + P' = 0 \Rightarrow X^2 - 8X - 15 = 0$

تست: ریشه‌های کدام معادله از معکوس ریشه‌های معادله $2x^2 - x - 4 = 0$ یک واحد بزرگ‌تر است؟

$$7x^2 - x - 2 = 0 \quad (۴) \quad 2x^2 - 7x + 1 = 0 \quad (۳) \quad 4x^2 - 7x + 1 = 0 \quad (۲) \quad 7x^2 - 4x - 1 = 0 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲. روش اول اگر ریشه‌های معادله $2x^2 - x - 4 = 0$ را α و β در نظر بگیریم، ریشه‌های معادله جدید $\frac{1}{\alpha} + 1$ و $\frac{1}{\beta} + 1$ می‌باشند.

به محاسبه مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله جدید می‌پردازیم:

$$\begin{cases} S' = (\frac{1}{\alpha} + 1) + (\frac{1}{\beta} + 1) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2 = \frac{-\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} + 2 = \frac{-\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} + 2 = \frac{-b}{a} + 2 = \frac{1}{-2} + 2 = \frac{3}{2} \\ P' = (\frac{1}{\alpha} + 1)(\frac{1}{\beta} + 1) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 1 = \frac{1 + \alpha + \beta}{\alpha\beta} + 1 = \frac{1 + (-\frac{b}{a})}{\frac{c}{a}} + 1 = \frac{1 + \frac{1}{-2}}{-2} + 1 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

معادله جدید را به کمک فرمول $x^2 - S'x + P' = 0$ می‌یابیم: $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 7x + 1 = 0$

روش دوم اگر α ریشه معادله $2x^2 - x - 4 = 0$ باشد $t = \frac{1}{\alpha} + 1$ ریشه معادله جدید خواهد بود. حال مقدار α را برحسب t به دست می‌آوریم:

$$t - 1 = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{t - 1}$$

چون ریشه هر معادله در خود آن معادله صدق می‌کند، پس:

$$2\left(\frac{1}{t-1}\right)^2 - \frac{1}{t-1} - 4 = 0 \xrightarrow{\times(t-1)^2} 2 - (t-1) - 4(t-1)^2 = 0 \Rightarrow 4t^2 - 7t + 1 = 0 \xrightarrow{\text{معادله نهایی}} 4x^2 - 7x + 1 = 0$$

پارامتریابی به کمک رابطه بین ریشه‌ها

هرگاه رابطه‌ای بین ریشه‌های معادله درجه دوم داشته باشیم، با تشکیل مقادیر S و P و جای‌گذاری رابطه داده شده در آن‌ها، پارامتر خواسته شده را می‌یابیم.

تست: اگر یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + (2m+1)x + 2m = 0$ دو برابر دیگری باشد، مجموع مربعات ریشه‌ها کدام می‌تواند باشد؟

$$\frac{1}{4} \quad (۴) \quad \frac{4}{5} \quad (۳) \quad 4 \quad (۲) \quad \frac{5}{4} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱. ریشه‌های این معادله α و 2α می‌باشند، پس می‌توان مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را به شکل زیر محاسبه نمود:

$$\begin{cases} S = \alpha + 2\alpha = -\frac{b}{a} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha = -\frac{2m+1}{1} \\ \alpha = -\frac{2m+1}{3} \end{cases} \\ P = \alpha \cdot 2\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 = 2m \\ \alpha^2 = m \end{cases} \end{cases}$$

به جای α در رابطه $\alpha^2 = m$ مقدار $-\frac{2m+1}{3}$ را قرار می‌دهیم:

$$\alpha^2 = m \Rightarrow \left(-\frac{2m+1}{3}\right)^2 = m \Rightarrow \frac{4m^2 + 4m + 1}{9} = m \Rightarrow 4m^2 - 5m + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{1}{4} \end{cases}$$

به ازای دو مقدار مختلف m ، معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$x^2 + (2m+1)x + 2m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \text{مجموع مربعات ریشه‌ها} = S^2 - 2P = 9 - 4 = 5 \\ m = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \text{مجموع مربعات ریشه‌ها} = S^2 - 2P = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

مجموع مربعات ریشه‌ها ۵ یا $\frac{5}{4}$ می‌تواند باشد.

$$\frac{(k+1)^2}{k} = \frac{b^2}{ac}$$

نکته: اگر در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ یکی از ریشه‌ها، k برابر دیگری باشد، آن‌گاه داریم:

اگر بخواهیم همین تست را با استفاده از نکته گفته شده حل کنیم با در نظر گرفتن $k = 2$ داریم:

$$\frac{(k+1)^2}{k} = \frac{b^2}{ac} \Rightarrow \frac{(2+1)^2}{2} = \frac{(2m+1)^2}{1 \times 2m} \Rightarrow 9m = 2m^2 + 2m + 1$$

در نهایت به معادله $2m^2 - 5m + 1 = 0$ می‌رسیم و دو مقدار $m = 1$ و $m = \frac{1}{4}$ به دست می‌آید. برای محاسبه مجموع مربعات ریشه‌ها باید مشابه حل قبلی مراحل را ادامه دهیم.

معادله دو مجذور

برخی از معادلات را با یک تغییر متغیر مناسب می‌توان به معادله درجه دوم تبدیل نمود.
برای نمونه: معادله $x^4 - 5x^2 + 2 = 0$ را با تغییر متغیر $x^2 = t$ می‌توان به معادله درجه دوم $t^2 - 5t + 2 = 0$ تبدیل نمود.

❶ تست: مجموع ریشه‌های معادله $(x^2 - 1)^2 - 9x^2 = -17$ کدام است؟

- ۲ (۱) $4\sqrt{2}$ (۲) $4\sqrt{2} + 2$ (۳) صفر (۴)

پاسخ **گزینه ۴** با تغییر متغیر $x^2 = t$ معادله را به یک معادله درجه دوم تبدیل می‌کنیم:

$$x^2 - 1 = t \Rightarrow x^2 = t + 1 \Rightarrow t^2 - 9(t + 1) = -17 \Rightarrow t^2 - 9t - 9 = -17 \Rightarrow t^2 - 9t + 8 = 0 \Rightarrow (t - 1)(t - 8) = 0$$

معادله دارای ۴ ریشه است که دو به دو قرینه‌اند و مجموع همه آن‌ها برابر صفر است.
 $\Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ t = 8 \Rightarrow x^2 = 8 + 1 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$

بحث راجع به ریشه‌های معادله: $ax^2 + bx^2 + c = 0$ (با فرض $a, b, c \neq 0$)

فرض کنید می‌خواهیم تعداد ریشه‌های معادله $x^2 - 7x^2 - 2 = 0$ را بدون حل آن بدانیم.

با تغییر متغیر $x^2 = t$ معادله به شکل $t^2 - 7t - 2 = 0$ درمی‌آید.

دلتای این معادله مثبت است، پس این معادله دو ریشه t_1 و t_2 دارد.

مجموع ریشه‌های معادله برابر $S = -\frac{b}{a} = 7$ و حاصل ضرب آن‌ها $P = \frac{c}{a} = -2$ است.

بنابراین مجموع t_1 و t_2 مثبت و ضرب آن‌ها منفی است، پس یکی از اعداد t_1 و t_2 مثبت و دیگری منفی است.

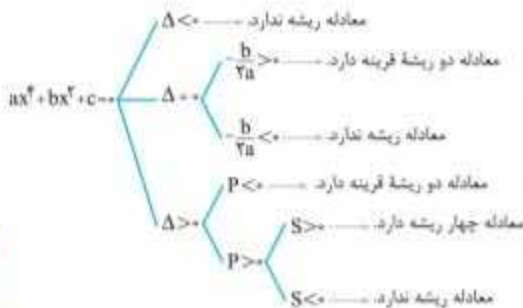
اما دقت کنید که $x^2 = t$ است و t_1 و t_2 نمی‌توانند منفی باشند و تنها یک ریشه برای معادله $t^2 - 7t + 2 = 0$ قابل قبول است.

در نهایت به ازای یک مقدار t ، دو مقدار برای x به دست می‌آید:

این معادله دو ریشه دارد.

برای ساده‌تر شدن مفهوم این موضوع، آن را به صورت نمودار مقابل بیان می‌کنیم.

$$x^2 = t \Rightarrow x = \pm\sqrt{t}$$



❷ نکته: در حالت $P < 0$ نیازی به بررسی دلتا وجود ندارد، چرا که هر وقت a و c مختلف‌العلامت باشند، دلتا لزوماً مثبت می‌شود.

❶ تست: معادله $x^4 - 4x^2 + 2 - a = 0$ چهار ریشه متمایز دارد. حدود a کدام است؟

- $a > -2$ (۱) $-8 < a < -2$ (۲) $a < 2$ (۳) $-2 < a < 2$ (۴)

پاسخ **گزینه ۴** مطابق آن چه در نمودار قبل گفته شد، زمانی معادله ۴ ریشه دارد که:

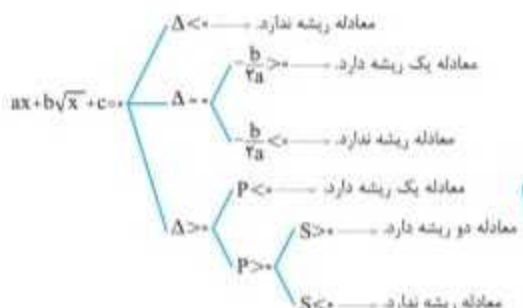
❶ $\Delta > 0 \Rightarrow 4^2 - 4(1)(2 - a) > 0 \Rightarrow 16 - 8 + 4a > 0 \Rightarrow 8 + 4a > 0 \Rightarrow a > -2$

❷ $P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{2 - a}{1} = 2 - a > 0 \Rightarrow a < 2$

❸ $S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4 > 0$ بدیهی

اشتراک مجموعه‌های فوق $-2 < a < 2$ می‌شود.

بحث راجع به ریشه‌های معادله: $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ (با فرض $a, b, c \neq 0$)



تست: اگر نمودار تابع $f(x) = mx^2 - 4x + (m+1)$ فقط از ربع اول عبور نکند، حدود m کدام است؟

$$\frac{-1-\sqrt{17}}{2} < m < \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{-1-\sqrt{17}}{2} < m \leq -1 \quad (۱)$$

$$\frac{-1-\sqrt{17}}{2} < m < 1 \quad (۴)$$

$$-1 \leq m < \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \quad (۳)$$

پاسخ گزینه ۱ نمودار تابع $f(x)$ می تواند به شکل مقابل باشد.

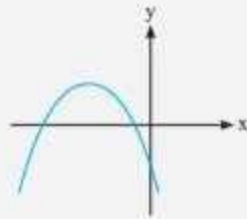
در این نمودار:

۱ $a < 0$ است، پس $m < 0$ است.

۲ $c \leq 0$ است، پس $m+1 \leq 0$ ، در نتیجه $m \leq -1$ است.

۳ شیب مماس در نقطه برخورد با محور عرض ها منفی است، پس $b < 0$ است. در این سؤال $b = -4$ است و شرط برقرار است.

۴ منحنی دو بار محور طول ها را قطع کرده است، پس $\Delta > 0$ است.



$$\Delta > 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4m(m+1) > 0 \Rightarrow 16 - 4m^2 - 4m > 0 \Rightarrow 4m^2 + 4m - 16 < 0 \xrightarrow{+4} m^2 + m - 4 < 0$$

$$\Rightarrow m_{۱,۲} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < m < \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

پاسخ سؤال، اشتراک همه جواب های به دست آمده است، یعنی:

$$\{m < 0\} \cap \{m \leq -1\} \cap \left\{ \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < m < \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \right\} = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < m \leq -1$$

پرسش های چهارگزینه ای

معادله درجه دوم و مسائل کاربردی

۶۶۱ مجموعه جواب های معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ ، کدام است؟

{۴+√۳, ۴-√۳} (۴) {۲+√۳, ۲-√۳} (۳) {۲+√۵, ۲-√۵} (۲) {۳+√۵, ۳-√۵} (۱)

(کانون فرهنگی آموزش)

۶۶۲ یکی از ریشه های معادله $(1-\sqrt{2})x^2 - 2x + \sqrt{2} + 1 = 0$ ، کدام است؟

-(۵+۲√۲) (۴) -(۵-۲√۲) (۳) -(۳+۲√۲) (۲) -(۳-۲√۲) (۱)

۶۶۳ اختلاف دو ریشه معادله $x^2 - (\log_{15} 5)x - \log_{15} 3 = 0$ ، چقدر است؟

$\log_{15} 45$ (۴) ۱ (۳) $\log_{15} 5$ (۲) $\log_{15} 3$ (۱)

۶۶۴ اگر $x = \frac{1}{y}$ یکی از ریشه های معادله $2x^2 + x^2 - 7x + m = 0$ باشد، بزرگ ترین ریشه معادله کدام است؟

$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ (۴) $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ (۳) $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ (۲) $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ (۱)

۶۶۵ اگر معادله $(x+2)^2 = k-2$ ریشه مضاعف داشته باشد، جواب های معادله $(x-1)^2 = k+1$ کدام است؟

-۲ و ۲ (۴) ۱ و -۲ (۳) ۱ و -۲ (۲) -۱ و ۲ (۱)

۶۶۶ اگر x ریشه مثبت و مضاعف معادله $(k+2)x^2 - 2kx + 1 = 0$ باشد، مقدار kx کدام است؟

۲ (۴) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) -۱ (۱)

۶۶۷ نمودارهای $y = 2x+2$ و $y = x^2$ یکدیگر را در دو نقطه A و B قطع می کنند. طول پاره خط AB کدام است؟

$4\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{4}$ (۳) $5\sqrt{4}$ (۲) $4\sqrt{5}$ (۱)

۶۶۸ حاصل ضرب دو عدد فرد مثبت و متوالی برابر ۱۹۵ می باشد. مجموع آن ها کدام است؟

۳۰ (۴) ۲۸ (۳) ۲۶ (۲) ۲۴ (۱)

۶۶۹ اگر مساحت قسمت رنگی از مربع روبه رو برابر ۲۱۶ سانتی متر مربع باشد، x چند سانتی متر است؟

۱۰ (۱)

۹ (۲)

۸ (۳)

۷ (۴)

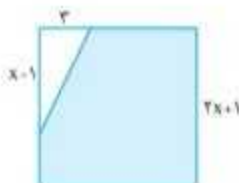
۶۷۰ اضلاع مثلث قائم الزاویه ای به صورت $x+1$ ، $x+2$ و $x+3$ می باشد. تانژانت کوچک ترین زاویه آن کدام است؟

$\frac{1}{5}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{2}{5}$ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۱)



۶۷۱ در مسابقات جام جهانی فوتبال در سال ۲۰۱۴ در کل ۲۱۰ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم‌های حاضر در جام فقط یک بازی انجام داده باشد. تعداد کل تیم‌های راه یافته به جام جهانی کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۱ (۳) ۲۲ (۴) ۲۳

مجموع و حاصل ضرب دیریشه



۶۷۲ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند. حاصل $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{11\sqrt{2}}{2}$

۶۷۳ اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 6x + 1 = 0$ باشند. حاصل $|\alpha\sqrt{\beta} - \beta\sqrt{\alpha}|$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}\sqrt{6+2\sqrt{2}}$ (۲) $\frac{1}{2}\sqrt{6-2\sqrt{2}}$ (۳) $\frac{1}{2}\sqrt{6-2\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{1}{2}\sqrt{6+2\sqrt{2}}$

۶۷۴ اگر α و β جواب‌های معادله $x^2 - 5x - 2 = 0$ باشند. حاصل $\frac{\alpha-1}{\alpha+1} + \frac{\beta-1}{\beta+1}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) $\frac{2}{3}$

۶۷۵ اختلاف واسطه حسابی از واسطه هندسی مثبت ریشه‌های معادله $x^2 - (fm-1)x + fm^2 = 0$ برابر ۱ واحد است. چند مقدار برای m ممکن است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۶۷۶ ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 2x + 1 = 0$ برابر x_1 و x_2 هستند. حاصل $\sqrt{x_1^2(2x_2-1)}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۱ (۴) ۲

(کانون فرهنگی آموزش)

۶۷۷ اگر α یک جواب معادله $x^2 + fx - 2 = 0$ باشد. حاصل $P = (\alpha+1)(\alpha+4)(\alpha-2)$ کدام است؟

- (۱) -۱۸ (۲) -۱۵ (۳) -۱۶ (۴) -۱۲

(انجمن ۹۳)

۶۷۸ به ازای کدام مقدار m مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - (m+2)x + 5 = 0$ برابر ۶ می‌باشد؟

- (۱) $-\frac{9}{5}$ (۲) ۱ (۳) 1 و $\frac{9}{5}$ (۴) $-\frac{9}{5}$

رابطه بین ریشه‌ها



۶۷۹ معادله درجه دومی که ریشه‌های آن $2 + \sqrt{a+1}$ و $2 - \sqrt{a+1}$ باشد. کدام است؟ ($a > -1$)

$$x^2 + (6-a)x + 8 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - 6x + 8 - a = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + 8x + a - 6 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 + (a-8)x + 6 = 0 \quad (3)$$

۶۸۰ اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 2x = 1$ باشند. به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله $8x^2 + kx - 1 = 0$ به صورت $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$ است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۲ (۴) ۹

۶۸۱ اگر در معادله $2x^2 + mx + 6 = 0$ یکی از جواب‌ها ۲ واحد از جواب دیگر بیشتر باشد. m کدام است؟

- (۱) ± 6 (۲) ± 4 (۳) ± 12 (۴) ± 8

۶۸۲ در معادله درجه دوم $x^2 - (m+1)x + m - 2 = 0$ یکی از ریشه‌ها از ۲ برابر ریشه دیگر ۳ واحد بزرگ‌تر است. m کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{2}$

(انجمن ۹۴)

۶۸۳ ریشه‌های کدام معادله از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 - 2x - 1 = 0$ یک واحد کمتر است؟

- (۱) $x^2 - 2x + 1 = 0$ (۲) $x^2 + 2x + 1 = 0$ (۳) $x^2 - 5x + 2 = 0$ (۴) $x^2 + 5x + 2 = 0$

۶۸۴ اگر α و β ریشه‌های معادله $x(\Delta x + 2) = 2$ باشند. به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله $4x^2 - kx + 2\Delta = 0$ به صورت $\{\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}\}$ است؟ (ریاضی ۹۰)

- (۱) ۲۷ (۲) ۲۸ (۳) ۲۹ (۴) ۳۱

(ریاضی ۹۲)

۶۸۵ اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 2x - 4 = 0$ باشند. مجموعه جواب‌های کدام معادله به صورت $\{\frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1\}$ است؟

- (۱) $2x^2 - 5x + 1 = 0$ (۲) $2x^2 - 2x + 1 = 0$ (۳) $2x^2 - 5x - 1 = 0$ (۴) $2x^2 - 2x - 1 = 0$

(ریاضی ۹۶)

۶۸۶ به ازای کدام مقدار m مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم $2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{m} = 0$ برابر ۲ می‌باشد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۶۸۷ به ازای کدام مقدار m هر یک از ریشه‌های معادله درجه دوم $8x^2 - mx - 8 = 0$ توان سوم ریشه‌های معادله $2x^2 - x - 2 = 0$ می‌باشد؟

(ریاضی خارج ۹۶)

- (۱) ۹ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

$\Rightarrow x > 1$ یا $x < -1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \cup \{0\}$ ۲

$\frac{1 \cap 2}{1 \cap 2} \rightarrow D_{gof} = \{0\}$

۶۴۹. گزینه ۳ ابتدا دامنه هر کدام از توابع داده شده را تعیین می‌کنیم:

$D_f: 1+x^2 \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

$D_g: 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_g = [-1, 1]$

حال با توجه به تعریف دامنه تابع gof می‌توان نوشت:

$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1-x^2}{1+x^2} \in [-1, 1]\}$

چون $\frac{1-x^2}{1+x^2} \in [-1, 1]$ پس نامعادله مضاعف $1-x^2 \leq 1+x^2$ را حل می‌کنیم:

$\frac{x(1+x^2)}{(1+x^2)^2} \rightarrow -1-x^2 \leq 1-x^2 \leq 1+x^2$

$\Rightarrow \begin{cases} 1-x^2 \leq 1+x^2 \Rightarrow 2x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \\ 1-x^2 \leq 1-x^2 \text{ همواره برقرار است.} \end{cases}$

$\Rightarrow D_{gof} = \mathbb{R}$

۶۵۰. گزینه ۳ دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را می‌یابیم:

$g(x) = 0 \Rightarrow x + |x| = 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow x \leq 0$

$\Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - (-\infty, 0] = (0, +\infty)$

حال ضابطه تابع را با توجه به دامنه بدون قدرمطلق می‌نویسیم:

$x > 0 \rightarrow (\frac{f}{g})(x) = \frac{2-(x+1)}{x+x} = \frac{-x+1}{2x} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2x}$

با توجه به اینکه $x > 0$ است، می‌توان نوشت:

$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \frac{x}{2} > \frac{1}{2x} > 0$

$\frac{+(-\frac{1}{2})}{-} \rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{2x} > -\frac{1}{2} \Rightarrow y > -\frac{1}{2}$

برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$ بازه $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ است.

۶۵۳. گزینه ۱

۶۵۲. گزینه ۲

۶۵۱. گزینه ۳

۶۵۶. گزینه ۱

۶۵۵. گزینه ۲

۶۵۴. گزینه ۲

۶۵۹. گزینه ۲

۶۵۸. گزینه ۲

۶۵۷. گزینه ۱

۶۶۰. گزینه ۴

۶۶۱. گزینه ۱ دلتا را محاسبه می‌کنیم:

$\Delta = b^2 - 4ac = 26 - 4 \times 1 \times 4 = 20$

$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow x_1 = 3 + \sqrt{5}, x_2 = 3 - \sqrt{5}$

۶۶۲. گزینه ۲ در معادله داده شده جمع ضرایب برابر صفر است، پس:

$A = (1 - \sqrt{2})x^2 - 2x + \sqrt{2} + 1 = 0 \rightarrow a+b+c=0$

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \times \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{1 - 2} = -(3 + 2\sqrt{2}) \end{cases}$

۶۶۳. گزینه ۴ مجموع ضرایب این معادله برابر صفر است:

$a+b+c=0 \rightarrow 1 - \log_{15} 5 - \log_{15} 2 = 0$

$\Rightarrow 1 - (\log_{15} 5 + \log_{15} 2) = 1 - \log_{15} 5 \times 2 = 1 - 1 = 0$

برای محاسبه $g^{-1}(30)$ هم، مقدار $g(x)$ را برابر ۳۰ قرار می‌دهیم.

$x^2 + x = 30 \Rightarrow x = 2$

۶۴۵. گزینه ۱ با توجه به زوج مرتب‌های واقع در f و g می‌توان نوشت:

$(4, 5) \in f \Rightarrow f(4) = 5$

$(4, 1) \in gof \Rightarrow g(f(4)) = 1 \xrightarrow{f(4)=5} g(5) = 1$

$(b, 1) \in g \rightarrow b = 5$

$(4, 2) \in fog \Rightarrow f(g(4)) = 2 \xrightarrow{(4, 2) \in f} g(4) = 2$

$(a, 2) \in g \rightarrow a = 4$

$(a, b) = (4, 5)$

در نتیجه:

۶۴۶. گزینه ۲ با توجه به توابع داده شده:

$\begin{cases} f(g(x)) = \frac{x}{x-2} \Rightarrow f(2x-1) = \frac{x}{x-2} \quad 1 \\ g(x) = 2x-1 \end{cases}$

حال برای محاسبه $f(2)$ کافی است $(2x-1)$ را برابر ۲ قرار داده، سپس x را یافته و در عبارت ۱ قرار دهیم:

$2x-1=2 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=1.5$

$\frac{1}{1} \rightarrow f(2x-1) = \frac{x}{x-2} \xrightarrow{x=1.5} f(2) = \frac{1.5}{1.5-2} = -2$

۶۴۷. گزینه ۲ می‌دانیم $f(-\frac{1}{4}) = f(6) = 0$ است. حال برای این

که fog محور x ها را قطع کند باید $f(g(x)) = 0$ باشد. با توجه به این

که $f(6) = 0$ و $f(-\frac{1}{4}) = 0$ است، پس باید $g(x) = 6$ و $g(x) = -\frac{1}{4}$ باشد. برای حل این معادلات می‌توانیم از یکی از روش‌های زیر استفاده کنیم.

حالت اول $g(x) = x - \sqrt{x} = 6 \xrightarrow{\sqrt{x}=A} A^2 - A = 6$

$\Rightarrow A^2 - A - 6 = 0 \Rightarrow (A-3)(A+2) = 0$

$\Rightarrow A = 3, A = -2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9 \\ \sqrt{x} = -2 \quad \times \end{cases}$

حالت دوم $g(x) = x - \sqrt{x} = -\frac{1}{4} \xrightarrow{\sqrt{x}=A} A^2 - A + \frac{1}{4} = 0$

$\Rightarrow (A - \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

۶۴۸. گزینه ۲ تعریف دامنه ترکیب توابع را پیاده می‌کنیم:

$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

پس ابتدا با توجه به توابع f و g ، دامنه آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$D_g: x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0$

$D_g = [0, 1]$

$D_f: 1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

$D_{gof} = \left\{ x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \mid \frac{1+x^2}{1-x^2} \in [0, 1] \right\}$

عبارت $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ متعلق به بازه $[0, 1]$ است، پس نامعادله مضاعف $0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1$ را حل می‌کنیم:

$\frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \xrightarrow{1+x^2 > 0} 1-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$ ۱

$\frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2} \leq 0$

$\Rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0 \xrightarrow{2x^2 \geq 0} 1-x^2 < 0 \Rightarrow x^2 > 1$

۶۶۹. **گزینه ۴** مساحت مربع $(2x+1)^2$ و مساحت مثلث $\frac{1}{2}(x-1)(2)$ است. مساحت قسمت هاشور زده، تفاضل مساحت مثلث از مربع است، یعنی:

$$216 = (2x+1)^2 - \frac{2}{2}(x-1) \Rightarrow 216 = 4x^2 + 4x + 1 - x + \frac{2}{2}$$

$$\Rightarrow 216 = 4x^2 + \frac{5x}{2} + \frac{5}{2}$$

طرفین معادله را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$432 = 8x^2 + 5x + 5$$

حل معادله دشوار است و بهتر است گزینه‌ها را به جای x قرار دهیم. گزینه‌ای که حاصل جای‌گذاری آن در رابطه $8x^2 + 5x + 5$ برابر ۴۳۲ می‌شود، **گزینه ۴** است.

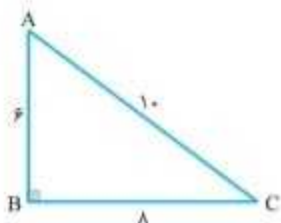
۶۷۰. **گزینه ۳** بین مقادیر $x+1$ ، $x+2$ ، $x+3$ و عبارت $x+3$ بزرگ‌ترین مقدار می‌باشد، پس وتر مثلث قائم‌الزاویه خواهد شد. در نتیجه طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$(x+3)^2 = (x+2)^2 + (x+1)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 4x + 4 + x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$x = -2$ غیرقابل قبول است؛ زیرا طول ضلع نمی‌تواند عددی منفی باشد، پس $x = 2$ خواهد شد و اضلاع مثلث عبارت‌اند از: ۵، ۴، ۳. ضلع کوچک مثلث، ضلع $AB = 2$ و متوسط آن $BC = 4$ و تنازانت زاویه C (کوچک‌ترین زاویه) برابر است با:



$$\tan \hat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{4}$$

۶۷۱. **گزینه ۲** با توجه به رابطه تعداد کل بازی‌های انجام شده داریم:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 210 \Rightarrow n(n-1) = 420$$

با جای‌گذاری گزینه‌ها مقدار $n = 21$ به دست می‌آید.

۶۷۲. **گزینه ۱** روش اول عبارت را برابر A فرض می‌کنیم و طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \Rightarrow A^2 = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 2 \Rightarrow A^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} + 2$$

اگر مجموع ریشه‌های معادله را $S = -\frac{b}{a} = 5$ و حاصل‌ضرب آن‌ها $P = \frac{c}{a} = 2$ در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$A^2 = \frac{S^2 - 2P}{2} + 2 = \frac{5^2 - 2(2)}{2} + 2 = \frac{25}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

روش دوم: با توجه به این که ریشه‌ها مثبت هستند ($P > 0$ و $S > 0$) می‌توان رادیکال‌ها را به‌صورت جداگانه نوشت:

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$$

مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\log_{10} 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 - x_2$$

$$= 1 - (-\log_{10} 2) = \log_{10} 10 + \log_{10} 2 = \log_{10} 20$$

۶۶۴. **گزینه ۱** $x = \frac{1}{2}$ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{2}\right) + m = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{7}{2} + m = 0 \Rightarrow m = 2$$

یکی از ریشه‌های معادله $x = \frac{1}{2}$ است، پس عبارت $2x^2 + x^2 - 7x + 2$ بر

$$x - \frac{1}{2} \text{ بخش پذیر است.}$$

$2x^2 + x^2 - 7x + 2$	$x - \frac{1}{2}$
$-(2x^2 - x^2) + 2$	$2x^2 + 2x - 6$
$2x^2 - 7x$	
$-(2x^2 - x)$	
$-6x + 2$	
$-(6x + 2)$	
0	

سایر ریشه‌های معادله از $2x^2 + 2x - 6 = 0$ به‌دست می‌آیند.

$$2x^2 + 2x - 6 = 0 \xrightarrow{+2} x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

بزرگ‌ترین ریشه معادله $2x^2 + x^2 - 7x + m = 0$ برابر $\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$ است.

۶۶۵. **گزینه ۱** اگر معادله $(x+2)^2 = k - 2$ ریشه مضاعف داشته باشد، باید $k - 2 = 0$ شود. $k = 2 \Rightarrow (x-1)^2 = 2 + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 4$

$$\Rightarrow x - 1 = \pm 2 \Rightarrow x = 3, x = -1$$

۶۶۶. **گزینه ۳** برای این که معادله ریشه مضاعف و مثبت داشته باشد باید

$$\Delta = 0 \Rightarrow 4k^2 - 4(k+2) = 0 \Rightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow k = -1, k = 2$$

$$x = -\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow -\frac{-2k}{2k+4} = \frac{2k}{2k+4} > 0$$

$$x = \frac{2k}{k+2} \xrightarrow{k=2} x = \frac{4}{4} = 1$$

عبارت به‌ازای $k = 2$ مثبت است.

حاصل kx برابر $2x \cdot \frac{1}{2}$ است.

۶۶۷. **گزینه ۱** ضابطه‌های دو تابع را با هم مساوی قرار می‌دهیم:

$$x^2 = 2x + 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -1$$

نقاط A و B را با جای‌گذاری $x = 2$ و $x = -1$ در یکی از تابع‌ها به‌دست می‌آوریم:

فاصله دو نقطه را می‌یابیم:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$= \sqrt{(2+1)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

۶۶۸. **گزینه ۳** اعداد فرد متوالی را $2k-1$ و $2k+1$ در نظر می‌گیریم.

حاصل‌ضرب آن‌ها ۱۹۵ است، پس:

$$(2k-1)(2k+1) = 195 \Rightarrow 4k^2 - 1 = 195 \Rightarrow k^2 = 49 \Rightarrow k = \pm 7$$

با فرض $k = 7$ اعداد فرد مطلوب ۱۲ و ۱۵ هستند، که مجموع آن‌ها ۲۸ است.

S و P را به دست می آوریم و در معادله جای گذاری می نماییم:

$$\begin{cases} S = \frac{b}{a} = \frac{m+2}{m} \\ P = \frac{c}{a} = \frac{5}{m} \end{cases}$$

$$S^2 - 2P = 6 \Rightarrow \left(\frac{m+2}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) = 6$$

$$\Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} = 6 \xrightarrow{\times m^2} m^2 + 6m - 9 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}} \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{9}{5} \end{cases}$$

باید بینیم از مقادیر $m = -\frac{9}{5}$ و $m = 1$ کدام یک دلتای معادله اصلی را نامنفی می کند (تا بگوییم ریشهها حقیقی اند).

$$\begin{cases} m = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \quad \times \\ m = -\frac{9}{5} \Rightarrow \Delta > 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

با توجه به گزینهها نیز می توان گفت وقتی $m = 1$ رد می شود، بدون امتحان نمودن، $m = -\frac{9}{5}$ را قبول می کنیم.

۶۷۹. گزینه ۲ مجموع و حاصل ضرب ریشهها را محاسبه می کنیم:

$$S = (2 + \sqrt{a+1}) + (2 - \sqrt{a+1}) = 4$$

$$P = (2 + \sqrt{a+1})(2 - \sqrt{a+1}) = 4 - a - 1 = 3 - a$$

معادله $x^2 - Sx + P = 0$ را می نویسیم:

$$x^2 - 4x + 3 - a = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 8 - a = 0$$

۶۸۰. گزینه ۲ کافی است S' (مجموع ریشههای معادله جدید) را بیابیم:

$$S' = \alpha^2\beta + \beta^2\alpha = \alpha\beta(\alpha + \beta) = PS \quad (1)$$

$$S = \frac{2}{3}, P = -\frac{1}{3}$$

با توجه به (۱) داریم:

$$S' = -\frac{2}{9}$$

$$S' = -\frac{k}{8} = -\frac{2}{9} \Rightarrow k = \frac{16}{9}$$

۶۸۱. گزینه ۴ با توجه به معادله $8x^2 + kx - 1 = 0$ در این معادله تفاضل دو ریشه برابر ۲ است.

$$\text{تفاضل دو ریشه} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{m^2 - 48}}{|2|} = 2 \Rightarrow \sqrt{m^2 - 48} = 4$$

$$\Rightarrow m^2 - 48 = 16 \Rightarrow m^2 = 64 \Rightarrow m = \pm 8$$

۶۸۲. گزینه ۳ ریشههای معادله α و $2\alpha + 2$ هستند.

$$S = \alpha + (2\alpha + 2) = \frac{b}{a} = -\frac{-(m+1)}{1} = m+1$$

$$\Rightarrow 3\alpha + 2 = m+1 \Rightarrow \alpha = \frac{m-2}{3}$$

در معادله به جای x مقدار $\frac{m-2}{3}$ را جای گذاری می کنیم:

$$x^2 - (m+1)x + m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m-2}{3}\right)^2 - (m+1)\left(\frac{m-2}{3}\right) + m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(m-2)^2}{9} - \frac{(m+1)(m-2)}{3} + m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m^2 - 4m + 4 - 3(m^2 - m - 2) + 9m - 18}{9} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2m^2 + 8m - 8}{9} = 0 \Rightarrow 2m^2 - 8m + 8 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow (m-2)^2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

۶۷۳. گزینه ۲ عبارت خواسته شده را A در نظر می گیریم و برای از بین بردن رادیکالها، طرفین را به توان ۲ می رسانیم:

$$A = |\alpha\sqrt{\beta} - \beta\sqrt{\alpha}| \Rightarrow A^2 = \alpha^2\beta + \beta^2\alpha - 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow A^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) - 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}$$

به جای $\alpha\beta$ و $\alpha + \beta$ بهتر ترتیب P و S جای گذاری می کنیم:

$$A^2 = P \cdot S - 2P\sqrt{P} \Rightarrow A = \sqrt{P \cdot S - 2P\sqrt{P}}$$

می دانیم $P = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$ و $S = -\frac{b}{a} = 2$ است.

$$A = \sqrt{\frac{2}{3} - 2\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{3}}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{6 - 2\sqrt{3}}$$

۶۷۴. گزینه ۱ مجموع ریشههای این معادله ۵ و حاصل ضرب ریشههای آن ۲- است. عبارت خواسته شده را مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} + \frac{\beta - 1}{\beta + 1} = \frac{(\alpha - 1)(\beta + 1) + (\alpha + 1)(\beta - 1)}{(\alpha + 1)(\beta + 1)}$$

$$= \frac{(\alpha\beta + \alpha - \beta - 1) + (\alpha\beta - \alpha + \beta - 1)}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1}$$

$$= \frac{2\alpha\beta - 2}{\alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1} = \frac{2(-2) - 2}{-2 + 5 + 1} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

۶۷۵. گزینه ۲ فرض کنید این معادله دارای دو ریشه x_1 و x_2 است، پس درباره واسطه حسابی و واسطه هندسی آن ها داریم:

$$\text{واسطه حسابی ریشهها} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{S}{2} = -\frac{b}{2a} = \frac{2m - 1}{2}$$

$$\text{واسطه هندسی ریشهها} = \sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{P} = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{fm^2} = 2|m|$$

اختلاف واسطه حسابی از واسطه هندسی برابر است با:

$$2|m| - \frac{2m - 1}{2} = 1 \Rightarrow 2|m| = \frac{2m + 1}{2}$$

$$\Rightarrow 2|m| = 2m + \frac{1}{2} \begin{cases} m > 0 \Rightarrow 2m = 2m + \frac{1}{2} \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} \text{ ناممکن} \\ m < 0 \Rightarrow -2m = 2m + \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

البته باید دقت شود که بازای $m = -\frac{1}{8}$ باید معادله دو ریشه داشته باشد.

$$x^2 - \left(-\frac{1}{8}\right)x + 2\left(-\frac{1}{8}\right)^2 = x^2 + \frac{x}{8} + \frac{1}{16} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{25}{4} - 4\left(\frac{1}{16}\right) = 6 > 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{8}$$

۶۷۶. گزینه ۳ رابطه خواسته شده یک رابطه نامتقارن است. از جای گذاری ریشهها در معادله استفاده می کنیم:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \xrightarrow{x = x_1} x_1^2 - 2x_1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1^2 = 2x_1 - 1$$

در رابطه، به جای $1 - 2x_1$ مقدار x_1^2 را جای گذاری می کنیم:

$$\sqrt{x_1^2(2x_1 - 1)} = \sqrt{x_1^2 x_1^2} = |x_1 x_1| = \left|\frac{c}{a}\right| = \left|\frac{1}{1}\right| = 1$$

$$P = (\alpha^2 + 5\alpha + 4)(\alpha - 2)$$

۶۷۷. گزینه ۱

$$\alpha^2 = -4\alpha + 2 \quad \text{می دانیم } \alpha^2 + 4\alpha - 2 = 0 \text{ بنابراین:}$$

$$P = ((-4\alpha + 2) + 5\alpha + 4)(\alpha - 2) = (\alpha + 6)(\alpha - 2) = \alpha^2 + 4\alpha - 12$$

مجدداً مقدار α^2 را جای گذاری می کنیم:

$$P = (-2\alpha + 2) + 4\alpha - 12 = -10$$

۶۷۸. گزینه ۱ اگر ریشههای معادله را α و β در نظر بگیریم، داریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 6$$

به جای $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ مقادیر آن‌ها را جای‌گذاری می‌نماییم:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{2}{-2} + 2 = \frac{5}{4}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{1}{-2} + \frac{2}{-2} + 1 = -\frac{1}{4}$$

اگر معادله جدید را به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ در نظر بگیریم، داریم:

$$x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

۶۸۶ گزینه ۴

$$2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{\lambda} = 0 \Rightarrow S = \frac{m+1}{2}, P = \frac{1}{16}$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 2 \xrightarrow{\text{توان } 2} \frac{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}}{S} = 4 \Rightarrow S + 2\sqrt{P} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{m+1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{16}} = 4 \Rightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2} = 4$$

$$\Rightarrow m + 1 = 8 \Rightarrow m = 7$$

۶۸۷ گزینه ۳

$$2x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{1}{2} \\ P = \alpha\beta = -1 \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2PS = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2(-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{2}{2} = \frac{5}{4}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{m}{\lambda}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\frac{m}{\lambda} = \frac{5}{4} \Rightarrow m = \frac{5\lambda}{4}$$

پس:

۶۸۸ گزینه ۱ مطابق آن چه در درس‌نامه گفته شد برای این که معادله دو

مجذوری فوق، ۴ ریشه داشته باشد، باید:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (-f)^2 - 4(m)(m-2) > 0 \Rightarrow -4m^2 + 12m + 16 > 0$$

$$\xrightarrow{+(-4)} m^2 - 3m - 4 < 0 \Rightarrow -1 < m < 4$$

$$S > 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-f}{m} > 0 \Rightarrow m > 0$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m-2}{m} > 0 \Rightarrow m < 0 \text{ یا } m > 2$$

با اشتراک جواب‌های فوق به $3 < m < 4$ می‌رسیم. در نتیجه $a = 3$ و $b = 4$ در نتیجه $b - a = 1$ می‌شود.

۶۸۹ گزینه ۲ با توجه به این که $x^2 = |x|^2$ است می‌توان معادله را به صورت زیر نوشت: ($x \neq 0$)

$$2x^2 - \frac{x^2}{|x|} + k = 0 \Rightarrow 2|x|^2 - \frac{|x|^2}{|x|} + k = 0$$

$$\Rightarrow 2|x|^2 - |x| + k = 0$$

برای این که معادله ۴ ریشه داشته باشد باید $\Delta > 0$ ، $S > 0$ و $P > 0$ باشند.

$$\Delta > 0 \Rightarrow (-1)^2 - 4(2)(k) > 0 \Rightarrow 1 - 8k > 0 \Rightarrow k < \frac{1}{8}$$

$$S > 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-1}{2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} > 0 \quad \text{همواره برقرار است.}$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{k}{2} > 0 \Rightarrow k > 0$$

اشتراک مجموعه جواب‌ها $0 < k < \frac{1}{8}$ است.

۶۸۳ گزینه ۴ ریشه‌های این معادله را α و β در نظر می‌گیریم:

$$2x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2} \\ \alpha\beta = -\frac{b}{a} = \frac{2}{2} \end{cases}$$

ریشه‌های معادله‌ای که از معکوس ریشه‌های معادله اولیه یک واحد کمتر است، برابر است با:

$$\left\{ \frac{1}{\alpha} - 1, \frac{1}{\beta} - 1 \right\}$$

S و P این معادله را به دست می‌آوریم:

$$S = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - 2 = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} - 2 = -5$$

$$P = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + 1 \\ = \frac{1}{\alpha\beta} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + 1 = \frac{1}{-\frac{1}{2}} - (-2) + 1 = 2$$

به کمک رابطه $x^2 - Sx + P = 0$ معادله مورد نظر را می‌یابیم:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0$$

۶۸۴ گزینه ۳ روش اول معادله داده شده را مرتب می‌کنیم:

$$x(\Delta x + 2) = 2 \Rightarrow \Delta x^2 + 2x = 2 \Rightarrow \Delta x^2 + 2x - 2 = 0 \quad (1)$$

چون رابطه $a + c = b$ برقرار است، بنابراین یک ریشه (-1) و ریشه دیگر

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -\left(-\frac{2}{\Delta}\right) = \frac{2}{\Delta} \end{cases} \quad \text{است. } \left(-\frac{c}{a}\right)$$

ریشه‌های معادله $4x^2 - kx + 25 = 0$ ، $\left\{1, \frac{25}{4}\right\}$ هستند و چون در معادله

صدق می‌کنند، k به راحتی به دست می‌آید:

$$x_1 = 1 \Rightarrow 4(1)^2 - k + 25 = 0 \Rightarrow k = 29$$

روش دوم رابطه بین ریشه‌های معادله جدید (y) و قدیم (x) به صورت

$$x^2 = \frac{1}{y} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{y}} \quad \text{بنابراین: } y = \frac{1}{x^2}$$

با جای‌گذاری در معادله قدیم (1) داریم:

$$5\left(\pm \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 + 2\left(\pm \frac{1}{\sqrt{y}}\right) - 2 = 0 \Rightarrow \frac{5}{y} - 2 = \pm \frac{2}{\sqrt{y}}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان 2 می‌رسانیم}} \frac{25}{y^2} + 4 - \frac{20}{y} = 9 \Rightarrow 4 - \frac{29}{y} + \frac{25}{y^2} = 0$$

$$\xrightarrow{\times y^2} 4y^2 - 29y + 25 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 29x + 25 = 0 \Rightarrow k = 29$$

۶۸۵ گزینه ۳ به کمک رابطه بین ریشه‌ها داریم:

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{2}{2} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = -2 \end{cases}$$

اگر ریشه‌های معادله مورد نظر را با x_1 و x_2 نشان دهیم، داریم:

$$x_1 = \frac{1}{\alpha} + 1, \quad x_2 = \frac{1}{\beta} + 1$$

S و P معادله مورد نظر را به دست می‌آوریم:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 1$$