آزمون ۱۰

# ریاضی ۲ | فاصله‌ی نقطه از خط

فصل ۱ — ایستگاه ۳ — ۲۰ دقیقه

۱. دو ضلع روبه‌روی یک مربع به معادلات $ax+2y=6$ و $3x+y+b=0$ بوده و مساحت مربع $b+3$ است. فاصله‌ی $A(a,b)$ تا نیمساز ربع اول و سوم کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

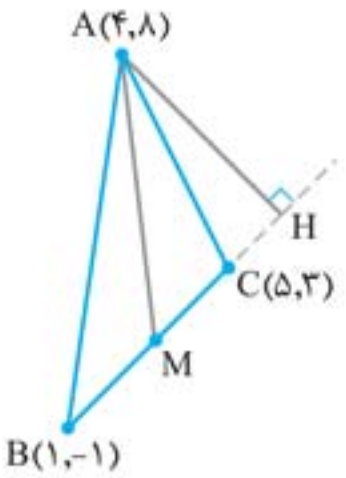
۲. مساحت مثلث $ABC$ با رئوس $A(m,2)$، $B(m-3,4m)$ و $C(-1,m+2)$، برابر $\frac{1}{2}$ است. $m$ کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) $\frac{-3}{4}$ ۳) $\frac{\sqrt{17}-1}{8}$ ۴) $\frac{1+\sqrt{17}}{8}$

۳. دو نقطه بر روی خط $x+y=1$ وجود دارد که فاصله‌ی این نقاط از خط $D:3x+4y-1=0$ برابر ۲ است. مجموع طول این دو نقطه کدام است؟

۱) ۶ ۲) $-6$ ۳) ۷ ۴) $-7$

۴. در شکل مقابل اگر $M$ و $H$ به‌ترتیب پای میانه‌ی $AM$ و ارتفاع $AH$ باشد، طول $MH$ کدام است؟




۱) $\sqrt{۴۲}$

۲) $\sqrt{۶۸}$

۳) $\sqrt{۵۸}$

۴) $\sqrt{۳۲}$

۵. ضلع یک مثلث به مساحت ۶ بر خط به معادله‌ی $x+2y=3$ واقع و یک رأس آن نقطه‌ی $(0,-1)$ است. اگر ضلع دیگر این مثلث بر محور $x$ ها منطبق باشد، طول میانه‌ی وارد بر این ضلع کدام است؟

۱) $4\sqrt{2}$ ۲) ۶ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) ۵

۶. نقطه‌ی $A(-2,-4)$ روی خط به معادله‌ی $\ell: 3x+by+c=0$ قرار دارد. اگر فاصله‌ی قرینه‌ی $A$ نسبت به محور $x$ ها تا خط $\ell$، ۳/۲ باشد، $b-c$ کدام است؟

۱) $-4$ ۲) $-8$ ۳) $-10$ ۴) $-12$

۷. خط $x-2y+m=0$ در نقطه‌ی $T$ به دایره‌ای به مرکز $P(-1,1)$ مماس است. اگر فاصله‌ی $T$ تا $P$ برابر $\sqrt{5}$ باشد، فاصله‌ی مبدأ تا این خط کدام عدد زیر می‌تواند باشد؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۳) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ۴) $2\sqrt{5}$

۸. در مثلث متساوی‌الساقین $ABC$ $(AB=AC)$، قاعده‌ی $BC$ بر روی خط $y=2x-3$ قرار دارد. اگر $A(4,-1)$ و طول نقطه‌ی $B$ برابر ۵ باشد، آن‌گاه مختصات نقطه‌ی $C$ کدام است؟

۱) $(-\frac{9}{5},\frac{-33}{5})$ ۲) $(\frac{9}{5},-\frac{33}{5})$ ۳) $(-\frac{9}{5},\frac{33}{5})$ ۴) $(\frac{9}{5},\frac{33}{5})$

۹. فاصله‌ی نقطه‌ی $(-3,5)$ از خط $4x+ky=6k$ برابر ۳ است. حاصل‌جمع مقادیر ممکن برای $k$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰. دو ضلع مقابل یک مربع، بر دو خط $x+2y=2a+1$ و $ax-6y=9$ منطبق هستند. فاصله‌ی محل تلاقی قطرهای این مربع از هر رأس آن چقدر است؟

۱) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ۲) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ۳) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ۴) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

پاسخ‌نامهٔ کلیدی

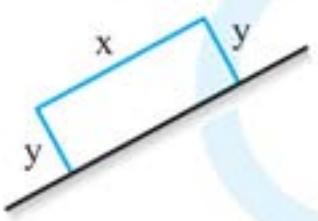
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ |

آزمون ۱۷

# ریاضی ۱ و ۲ | سهمی، تابع درجه دو

فصل ۵ — ۲۰ دقیقه

ایستگاه ۲




۱. قرار است در کنار یک رودخانه، زمینی مستطیل شکل را نرده‌کشی کنیم (مطابق شکل). اگر فقط هزینه‌ی نصب ۷۲ متر نرده را داشته باشیم، بیشترین مساحت ممکن برای این زمین چقدر خواهد بود؟

۱) ۳۲۴ ۲) ۶۴۸ ۳) ۵۲۴ ۴) ۱۰۴۸

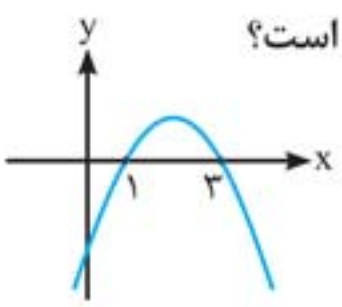
۲. نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ محور $y$ها را در نقطه‌ای به عرض $k$ و محور $x$ها را در نقاطی به طول $k-1$ و $k$ قطع کرده و بیشترین مقدار سهمی $\frac{9}{4}$ است. $k$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۳. رأس سهمی $y = (3m+4)x^2 - 3(m-1)x + 9$ در ناحیه‌ی دوم قرار دارد. بیشترین طول بازه‌ی قابل قبول برای $m$ کدام است؟

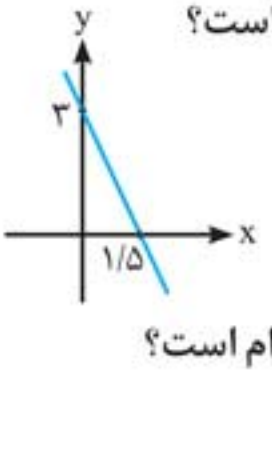
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴. شکل مقابل، نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ است. اگر بیشترین مقدار تابع $9 - 2a$ باشد، $f(\frac{b}{9})$ کدام است؟




۱) ۲۷− ۲) ۹
۳) ۹− ۴) ۲۷

۵. نقطه‌ی ماکزیمم تابع $y = -2x^2 + mx - m + 1$ روی خط مقابل است. مجموع مقادیر ممکن برای $m$ کدام است؟




۱) ۳ ۲) ۸
۳) ۲ ۴) ۴

۶. سهمی $y = x^2 - 2mx - m + 2$ حداکثر یک صفر دارد که آن هم مثبت است. کمترین مقدار صحیح $m$ کدام است؟

۱) ۲− ۲) ۱− ۳) صفر ۴) ۳−

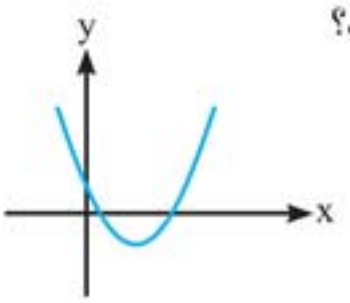
۷. کمترین فاصله‌ی مبدأ مختصات از نقاط روی منحنی $y = \sqrt{x^2 - 4x + 7}$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{13}$ ۳) ۵ ۴) ۱۳

۸. اگر تابع $y = (1-m)x^2 + (m^2-6)x + 1$ در نقطه‌ای به طول ۱− ماکزیمم داشته باشد، کمترین مقدار $y = mx^2 + 2mx$ کدام است؟

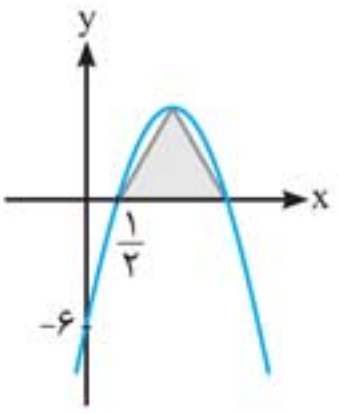
۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) ۳− ۳) ۲− ۴) $-\frac{3}{4}$

۹. نمودار تابع $y = (m+4)x^2 - 4x + m + 1$ به‌صورت مقابل است. چند مقدار صحیح برای $m$ وجود دارد؟




۱) ۰ ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۳

۱۰. نمودار سهمی $y = ax^2 - (6a-1)x + b$ به‌صورت مقابل است. مساحت ناحیه‌ی رنگی چقدر است؟




۱) $\frac{1331}{16}$ ۲) $\frac{1331}{32}$
۳) $\frac{1573}{32}$ ۴) $\frac{1573}{16}$

پاسخ‌نامهٔ کلیدی

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ |
| ۲ | ۳ | ۴ | ۳ | ۲ | ۲ | ۲ | ۱ | ۳ | ۳ |

مهروماه

آزمون ۲۱

# جمع‌بندی معادله و نامعادله

شبیه‌ساز کنکور

۲۰ دقیقه

| منابع | ریاضی ۱ | ریاضی ۲ | ریاضی ۳ |
|---|---|---|---|
| | فصل ۴ | فصل ۱ | - |

۱. معادله‌ی $3x-\frac{m+1}{2x+1}=2$ دو جواب حقیقی دارد که بین آن‌ها رابطه‌ی $6\alpha=2\beta+5$ برقرار است. در این‌صورت، معادله‌ی $\frac{mx}{x-1}+\frac{x-1}{x}=m$ چند جواب دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲. حاصل‌ضرب جواب‌های معادله‌ی $\frac{2}{x^2-4x+3}-\frac{4}{x^2-2x-3}=a$ برابر $-2$ است. جواب معادله‌ی $|ax-1|=|2x+a|$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۳. اعداد $x=-1$ و $x=b$ جواب‌های معادله‌ی $\frac{a}{2x-1}-\frac{1}{x}=4$ هستند. در این‌صورت، ریشه‌ی دوم $2b$ کدام است؟

۱) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\pm\frac{1}{2}$ ۳) $\pm1$ ۴) $\pm\frac{1}{4}$

۴. اگر سه شیر A، B و C هم‌زمان باز باشند، ۳ ساعته استخری را پر می‌کنند. اگر دو شیر A و B را باز کنیم، ۴ ساعته استخر پر می‌شود. شیر C به تنهایی در چند ساعت استخر را پر می‌کند؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۵. تمام جواب مشترک نامعادله‌های $\frac{4x-2}{3}>2x-3$ و $\frac{3x+6}{2}-\frac{3-x}{3}>\frac{1}{2}$ به فرم $(\alpha,\beta)$ است. $2\beta+11\alpha$ کدام است؟

۱) $-4$ ۲) $-1$ ۳) $-2$ ۴) $-3$

۶. اگر جدول تعیین علامت عبارت $P=((n-2)x+m+1)(x+2b)^2$ به‌صورت زیر باشد، مقدار عددی $mn+b$ کدام است؟ $(n\in\mathbb{N})$

| x | $-\infty$ | $-2$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| P | + | 0 | + | 0 − |

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

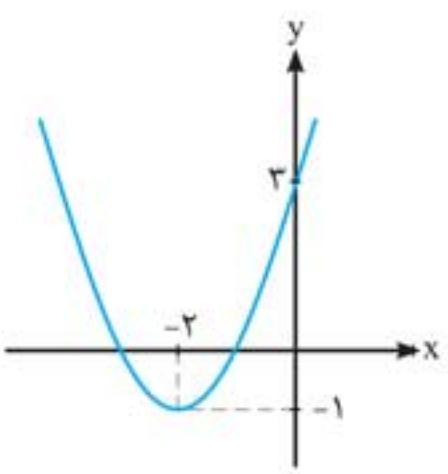
۷. چند عدد طبیعی m در نامساوی $\frac{2x^2-x+m}{x^2+x+1}<1$ صدق نمی‌کند؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۸. یک موشک کاغذی فاصله‌ی ۵ متری را در جهت موافق باد رفته و در خلاف جهت برگشته است. سرعت باد ۵ متر بر دقیقه و مدت‌زمان رفت‌وبرگشت ۳۲ ثانیه است. سرعت موشک در هوای بدون باد چقدر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۵

۹. سهمی مقابل، نمودار $y=f(x)$ است. اگر اشتراک جواب‌های نامعادله‌های $\frac{f(x)}{x}\le0$ و $2x+7>0$ را به فرم $(a,b]\cup[c,d)$ بنویسیم، مقدار $2a-b-c-d$ کدام است؟




۱) $-2$
۲) $-3$
۳) $-4$
۴) $-5$

۱۰. معادله‌ی $3x-2+\sqrt{4x-3}=0$ از نظر تعداد جواب‌ها چگونه است؟

۱) یک جواب دارد.
۲) دو جواب هم‌علامت دارد.
۳) دو جواب با علامت مخالف دارد.
۴) جواب ندارد.

آزمون ۳۴

# جمع‌بندی تابع (۳)

شبیه‌ساز کنکور

۲۰ دقیقه

| منابع | ریاضی ۱ | ریاضی ۲ | ریاضی ۳ |
|---|---|---|---|
| | فصل ۵ | فصل ۳ | فصل ۱ |

۱. اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-۴}$ و $g(x)=\sqrt{x^۲+۴}$ باشد، حاصل $f(۱۴۰۰+\frac{۱}{۱۴۰۰})+g(۱۴۰۰-\frac{۱}{۱۴۰۰})$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۷۰۰}$ ۲) ۲۸۰۰ ۳) $\frac{۱}{۷۰۰}$ ۴) ۱۴۰۰

۲. نمودار وارون تابع $f(x)=-(x+۲)^۳-۲$ نمودار $g(x)=۱-(۳-x)^۲$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

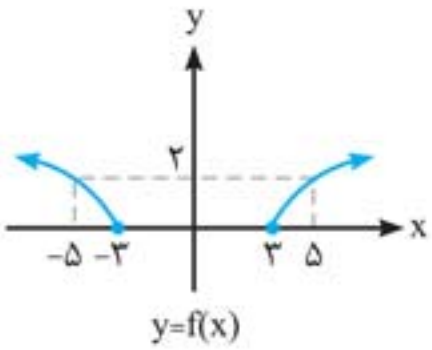
۳. اگر برد تابع $g(x)=۲f(x-۱)-۱$ به‌صورت $(۱,۲)$ باشد، برد تابع $h(x)=۱-۳f(۲-x)$ کدام است؟

۱) $(-\frac{۷}{۲},-۲)$ ۲) $(-۳,-۲)$ ۳) $(-\frac{۷}{۲},-\frac{۳}{۲})$ ۴) $(-۳,-\frac{۳}{۲})$

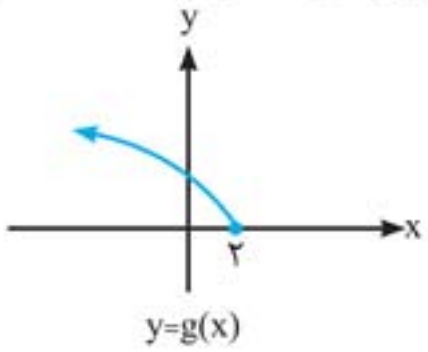
۴. $f$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است و $g(x)=\sqrt{f(x^۲+۲x)-f(-۲x+۱۲)}$ و $h(x)=\sqrt{f(|۳x+۶|)-f(|x-۱|)}$. در این‌صورت دامنه‌ی $(g+h)(x)$ کدام است؟

۱) $[-۳,-\frac{۵}{۴}]$ ۲) $[-\frac{۷}{۲},-۱]$ ۳) $[-\frac{۷}{۲},-۲]$ ۴) $[-\frac{۷}{۲},-\frac{۵}{۴}]$

۵. اگر نمودار دو تابع $f$ و $g$ به‌صورت زیر باشد، آن‌گاه دامنه‌ی تابع $gof$، شامل چند عدد صحیح است؟



y=f(x)



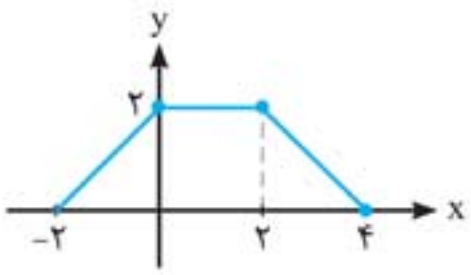
y=g(x)

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۸

۶. اگر $f$ تابعی اکیداً نزولی با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ باشد، دامنه‌ی تعریف $y=\sqrt{f(|x-۲|)-f(|۲x-۱|)}$ کدام است؟

۱) $[۱,+\infty)$ ۲) $[-۱,۱]$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\mathbb{R}-(-۱,۱)$

۷. شکل مقابل نمایش $y=f(x)$ است. هرگاه $g(x)=\frac{-۱}{۲}x+۳$ باشد، در این‌صورت نمودار تابع $h(x)=۱-۳(fog^{-۱})(x)$ از کدام ربع (ها) نمی‌گذرد؟




۱) دوم
۲) اول
۳) دوم و سوم
۴) اول و چهارم

۸. هرگاه $f(x)=\frac{۲x+۱}{x-۱}$ و $gof=fo(\frac{۱}{f})$، در این‌صورت ریشه‌ی $g(x)=۱$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-۱$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۹. توابع $f(x)=۵-\sqrt{۲x-۶}$ و $g(x)=(fof^{-۱})(x)+(f^{-۱}of)(x)$ مفروض‌اند. نمودار تابع $g(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ به شکل یک پاره‌خط است. بیشترین مقدار طول این پاره‌خط کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۱۰. اگر $f$ تابعی پیوسته و اکیداً نزولی روی $\mathbb{R}$، $g$ تابعی پیوسته و اکیداً صعودی روی $\mathbb{R}$ و $f(۱)=g(-۱)=۰$ باشد، دامنه‌ی تعریف تابع $y=\sqrt{\frac{(x+۲)g(x)}{(x-۲)f(x)}}$ کدام است؟

۱) $[-۲,۲]-(-۱,۱)$ ۲) $[-۲,۲)-(-۱,۱]$ ۳) $(-۲,۲)-(-۱,۱)$ ۴) $[-۲,۲)-[-۱,۱)$

پاسخ‌نامهٔ کلیدی

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۳ | ۳ | ۴ | ۵ | ۲ | ۷ | ۳ | ۹ | ۲ |
| ۲ | ۴ | ۴ | ۳ | ۶ | ۴ | ۸ | ۱ | ۱۰ | ۳ |

مهروماه

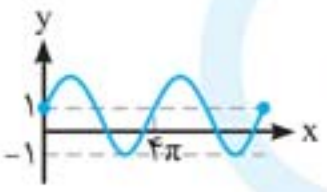
آزمون ۴۳

# ریاضی ۲ و ۳ | توابع مثلثاتی

فصل ۱۰ — ۲۰ دقیقه

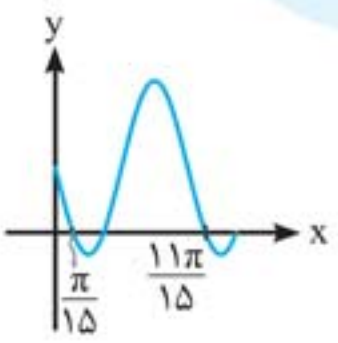
ایستگاه ۷

۱. شکل مقابل مربوط به $f(x)=c+a\sin bx$ است. $ab+c$ کدام است؟




۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

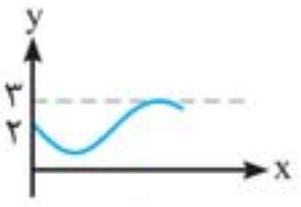
۲. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a-۳\cos(\frac{۳\pi}{۲}-bx)$ است. $f(\frac{۱۹\pi}{۴})$ کدام است؟




۱) $\frac{۳-۳\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۳+۳\sqrt{۲}}{۲}$

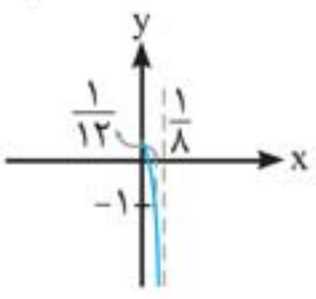
۳) $\frac{۲-۳\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۲-۲\sqrt{۳}}{۲}$

۳. شکل مقابل بخشی از نمودار تابع $f(x)=(۲a-۲b)+(۳a-b)\sin x$ است. مینیمم $f$ کدام است؟




۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۴. شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y=۱+a\tan\pi(۱+bx)$ است. حاصل $ab$ کدام است؟




۱) $\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $-۴\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{-۸\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

۵. تابع $f(x)=\tan(\frac{\pi}{۲}x)$ در بازه‌ی $(a,b)$ صعودی است، حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶. خط $y=۴$ نمودار تابع $y=۱+\sqrt{۳}\tan ۳x$ را در بازه‌ی $(۰,a)$ در ۳ نقطه قطع می‌کند، حداکثر مقدار $a$ کدام است؟

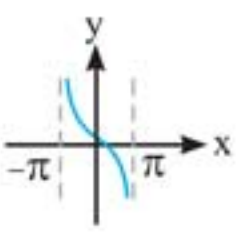
۱) $\frac{۴\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۱۰\pi}{۹}$ ۳) $\frac{۷\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۱۹\pi}{۱۸}$

۷. شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a\cos(bx+\frac{۱}{۲})\pi+c$ است. حاصل $abc$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) $-۱۲$

۳) ۲۴ ۴) $-۲۴$

۸. نمودار تابع $f(x)=\tan(\pi-ax)+b$ به‌صورت مقابل است. مقدار $f(\frac{۷\pi}{۳})$ کدام است؟

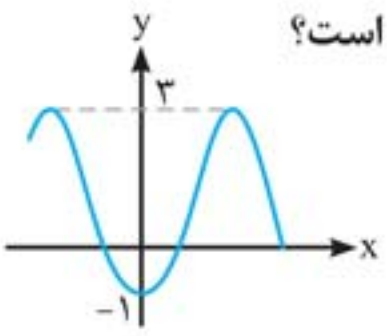



۱) $\frac{-\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $-\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۹. در کدام تابع زیر، ماکزیمم تابع از مینیمم آن ۵ واحد بیشتر و دوره‌ی تناوب آن $\frac{۱}{۳}$ است؟

۱) $y=\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۲}\cos(۶\pi x)$ ۲) $y=\frac{۱}{۲}-\frac{۵}{۲}\sin(۶\pi x)$ ۳) $y=\frac{۱}{۲}+\frac{۵}{۲}\cos(۶x)$ ۴) $y=\frac{۳}{۲}-\frac{۳}{۲}\cos(۶\pi x)$

۱۰. شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a+b\sin(\frac{\pi}{۲}+x)$ را نمایش می‌دهد. مقدار $f(\frac{۱۷\pi}{۳})$ کدام است؟




۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

آزمون ۵۸

# ریاضی ۳ | مشتق تابع مرکب

فصل ۱۲ — ایستگاه ۶ — ۲۰ دقیقه

۱. اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x$ باشد، خط مماس بر نمودار تابع $gof(x)$ در چند نقطه موازی محور طول‌هاست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲. اگر مشتق تابع $f(\sqrt[3]{|x|+6})$ در $x=-2$ برابر $\frac{1}{3}$ باشد، آن‌گاه مشتق تابع $f(\frac{2x}{3x-1})$ در $x=\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۱۶ ۳) $-32$ ۴) $-16$

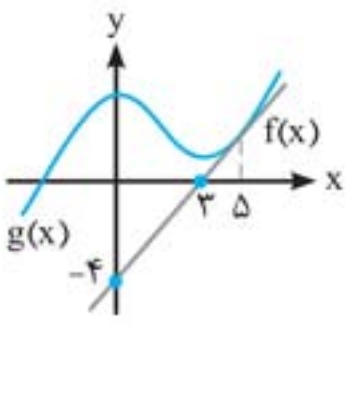
۳. هرگاه $\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=3$ و برای هر $x$ متعلق به دامنه‌ی توابع $f$ و $g$، داشته باشیم $f(3-2x)+g(x^2+x)=2x-1$، آن‌گاه حاصل $g'(0)$ کدام است؟

۱) $-8$ ۲) $-4$ ۳) صفر ۴) $-6$

۴. هرگاه $g'(2)=3g(2)=f'(2)=4f(2)$ و $(f\cdot g)'(2)=\frac{5}{2}$ باشد، آن‌گاه مشتق تابع $y=g^3(3x^2-1)$ در $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{169}{18}$ ۲) $\frac{169}{6}$ ۳) $\frac{169}{12}$ ۴) $\frac{169}{8}$

۵. شکل مقابل نمودار توابع $f$ و $g$ را نمایش می‌دهد. حاصل $(fog)'(5)$ کدام است؟




۱) $-\frac{16}{9}$ ۲) $-\frac{32}{9}$ ۳) $\frac{16}{9}$ ۴) $\frac{32}{9}$

۶. هرگاه $\lim_{x\to 3}\frac{f^2(x)-1}{x^2-9}=4$ و $g(x^2+x)=f(\sqrt{2x+5})$ باشد، حاصل $10g'(6)$ کدام است؟

۱) $\pm 4$ ۲) $\pm 8$ ۳) $\pm 12$ ۴) $\pm 16$

۷. اگر $f(x)=\frac{x^3-2}{1+x^3}$ و $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$، آن‌گاه حاصل $f'(g(x))\times g'(x)$ به ازای $x=2$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{-1}{4}$

۸. اگر تابع $f$ بر روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim_{h\to 0}\frac{f(h+2)-5}{h}=8$ باشد، آن‌گاه مشتق تابع $y=x^2f(\sqrt{1-3x})$ در $x=-1$ کدام است؟

۱) $-8$ ۲) $-12$ ۳) $\frac{-43}{4}$ ۴) $-16$

۹. هرگاه $f(x)=3x-|3x|$ و $g(x)=3x+3\sqrt{x^2}$ باشند، مشتق تابع $fog(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $-1$ ۴) وجود ندارد.

۱۰. اگر $f(2)=3f'(2)=9$ و $4g(1)=g'(1)=12$ باشند، شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=(f(2x)+3)g(x^2)$ در $x=1$ کدام است؟

۱) ۳۰۶ ۲) ۱۵۳ ۳) ۱۶۲ ۴) ۳۶۰

پاسخ‌نامهٔ کلیدی

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۳ | ۴ | ۴ | ۵ | ۵ | ۲ |
| ۶ | ۳ | ۷ | ۴ | ۸ | ۱ | ۹ | ۱ | ۱۰ | ۱ |

آزمون ۸۸

# ریاضی ۲ و ۳ | قوانین احتمال

فصل ۱۷
ایستگاه ۳
۲۰ دقیقه

۱. $A$ و $B$ دو پیشـــامد از فضای نمونه‌ای $S$ هستند و $P(A-B)=\frac{۲}{۵}$ و $P(B-A)=\frac{۱}{۳}$ است. بیشترین مقدار $P(A)+P(B)$ چقدر از ماکزیمم $\frac{P(A)}{P(B)}$ بیشتر است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۱۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۲. از مجموعه‌ی $\{۱۰۱,۱۰۲,۱۰۳,...,۶۰۰\}$ یک عدد به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این عدد مضرب ۵ اســـت ولی بر ۶ بخش‌پذیر نیست، یا مضرب ۵ نیست ولی بر ۶ بخش‌پذیر است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۳۲ ۳) ۰/۳۶ ۴) ۰/۴

۳. هرگاه $P(A-B)=\frac{۲}{۱۷}$ ، $P(B-A)=\frac{۱۰}{۱۷}$ ، $P(B)=nP(A)$ و $P(A\mid B)=\frac{۱}{n+۳}$ باشد، حاصل $P((A\cup B)')$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۱۷}$ ۲) $\frac{۳}{۱۷}$ ۳) $\frac{۴}{۱۷}$ ۴) $\frac{۵}{۱۷}$

۴. هرگاه $۵/۶=۸P(B')=۷P(A')$ باشد، کمترین مقدار $P(A'\cup B')$ کدام است؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۲

۵. اگر $P(A\cap B)=\frac{P(B')}{۳}=\frac{P(A')}{۴}=\frac{P(A\cup B)}{۶}$ باشد، احتمال این‌که فقط یکی از دو پیشامد $A$ یا $B$ اتفاق بیفتد، از احتمال وقوع فقط $A$ ، چقدر بیشتر است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۷}$

۶. از $A=\{x\in\mathbb{N}\mid\sqrt[۴]{x^۳}<۲۷\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد انتخابی «فرد باشد ولی مضرب ۳ نباشد» چقدر است؟

۱) $\frac{۲۷}{۸۰}$ ۲) $\frac{۲۶}{۸۰}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲۷}$ ۴) $\frac{۲۶}{۸۱}$

۷. هرگاه $\frac{P(A')}{۴}=P(B-A)=\frac{P(A-B)}{۳}=\frac{P(A\cap B)}{۲}$ باشد، حاصل $P(B')$ چه کسری از $P(A\cup B')$ است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۸}{۹}$

۸. هرگاه $P(A\cap B)=\frac{۱}{۵}$ ، $P(A\cup B)=\frac{۲}{۵}$ و $P(A)=\frac{m+۱}{۲m+۱}$ باشد، حدود $m$ به‌صورت $[a,b]$ نوشته می‌شود. $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) ۲

۹. $A$ و $B$ دو پیشـــامد ناسازگار هســـتند به‌طوری که $P(A)=\frac{۱}{n+۳}$ ، $P(B')=\frac{n}{n+۱}$ و $P(A\cup B)=\frac{۵}{۲n+۶}$ است. احتمال اتفاق نیفتادن $A$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۱۰. ضرایب معادله‌ی $ax^۲-bx+c=۰$ را از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴\}$ انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد مجموع ریشه‌ها دو برابر ضرب ریشه‌ها باشد یا یکی از ریشه‌ها ۱ باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۷}{۱۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ‌نامهٔ کلیدی

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ |

آزمون ۹۷

# آزمون جامع (۲)

کنکور بدهید!

۵۰ دقیقه

۱. بین دو عدد ۲ و ۴۸۶، چهار عدد به شکلی درج کرده‌ایم که شش عدد حاصل، تشکیل یک دنباله‌ی هندسی صعودی دهند. در دنباله‌ی شش‌جمله‌ای حاصل، واسطه‌ی حسابی جمله‌ی دوم و سوم کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

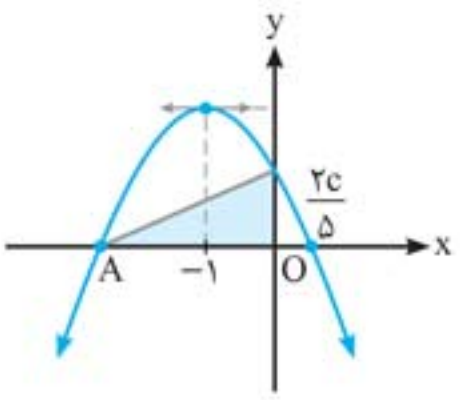
۲. حاصل عبارت $\sqrt[۳]{\sqrt{۷}-۳}\times\sqrt[۶]{۱۶+۶\sqrt{۷}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-\sqrt[۳]{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt[۳]{۲}$

۳. نمودار تابع $f(x)=(۱-m)x^۲+(۲m-۱)x-(m+۲)$ و محور x ها فقط در یک نقطه مشترک هستند. مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۸}$ ۲) $\frac{۱۳}{۸}$ ۳) $\frac{۱۷}{۸}$ ۴) ۱

۴. شکل مقابل نمودار تابع $y=-x^۲+bx+c$ است. مساحت ناحیه‌ی رنگی کدام است؟




۱) $\frac{۹}{۱۶}$ ۲) $\frac{۲۵}{۱۶}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

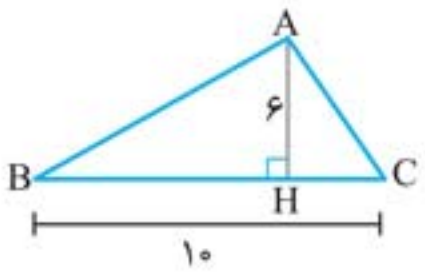
۵. تابع وارون $f(x)=۲x+\sqrt{x-۱}$ را ۲ واحد در جهت منفی محور x ها و ۲ واحد در جهت مثبت محور y ها انتقال می‌دهیم و تابع حاصل را $g(x)$ می‌نامیم. $g(۱۰)$ کدام است؟

۱) ۳− ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۴−

۶. اگر $f(۲x+۱)=g(x-۳)$ و $g^{-۱}(x)=x^۳$ باشد، $f^{-۱}$ با چه تبدیلی روی $y=x^۳$ به‌دست می‌آید؟

۱) انبساط عمودی با ضریب ۲ و بعد انتقال ۷ واحد به بالا
۲) انقباض عمودی با ضریب $\frac{۱}{۲}$ و بعد انتقال ۷ واحد به بالا
۳) انبساط عمودی با ضریب ۲ و بعد انتقال ۳/۵ واحد به بالا
۴) انقباض عمودی با ضریب $\frac{۱}{۲}$ و بعد انتقال ۳/۵ واحد به بالا

۷. در شکل مقابل اگر $۳\tan\hat{B}=۲\tan\hat{C}$ باشد، آن‌گاه طول ضلع AB کدام است؟




۱) $۶\sqrt{۲}$ ۲) $۵\sqrt{۲}$ ۳) $۷\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۸. حروف a , b , c , d , e را کنار هم جایگشت می‌دهیم. احتمال این‌که حرف a قبل از d بیاید، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

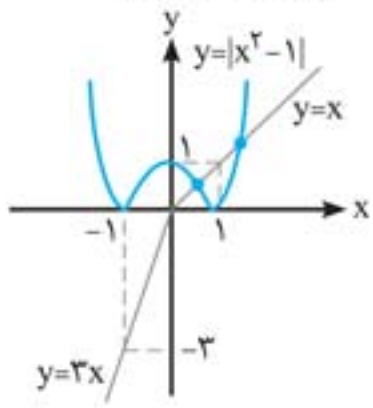
۹. در پرتاب دو تاس، چقدر احتمال دارد مجموع دو تاس ۷ یا هر دو فرد باشند؟

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۷}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۰. نقطه‌ی (۸ , ۶) رأس یک مستطیل است که دو ضلع آن بر دو خط به معادله‌های $y=۳x$ و $۶y+۲x=۴۰$ واقع هستند. مختصات نقطه‌ی تلاقی قطرهای این مستطیل کدام است؟

۱) (۵ , ۳) ۲) (۲ , ۷) ۳) (۴ , ۷) ۴) (۳ , ۵)

و اما رسم نمودار هر دو تابع در یک دستگاه مختصات:




معادله ۲ ریشه دارد. ⇒

**۹. گزینه ۴**

ریشه‌های قدرمطلق‌ها

| x | −۲ | −۱ | ۰ | ۲ | ۳ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | ۲۵/۳ | ۵ | ۷/۳ (min) | ۵ | ۲۵/۳ |

می‌توانید نمودارش را هم بعداً بکشید...!

**راهبرد:** ماکزیمم تابع $y=c-|ax+b|$ و مینیمم $y=c+|ax+b|$ به ازای ریشه‌ی قدرمطلق به دست می‌آید.

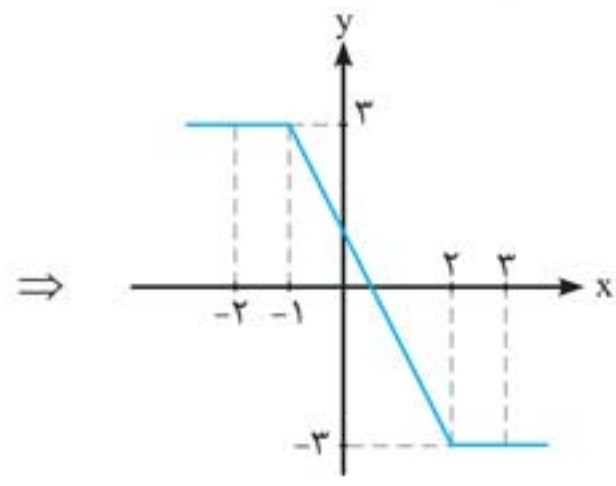
$$g(x)=a-۱-|x-۱| \xrightarrow[\text{ریشه‌ی قدر مطلق}]{x=۱} \max(g)=a-۱$$

$$\Rightarrow a-۱=\frac{۷}{۳} \Rightarrow a=\frac{۱۰}{۳}$$

**۱۰. گزینه ۳** نمودار دو تابع $y_۱=|x-۲|-|x+۱|$ و $y_۲=ax+ab$ باید در بی‌شمار نقطه یکدیگر را قطع کنند، یعنی در یک محدوده‌ای باید برهم منطبق شوند، پس:

$y_۱=|x-۲|-|x+۱| \Rightarrow$

| x | −۲ | −۱ | ۲ | ۳ |
|---|---|---|---|---|
| $y_۱$ | ۳ | ۳ | −۳ | −۳ |




ضابطه‌ی تابع $y_۱$ برای $-۱<x<۲$، به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$y_۱=-(x-۲)-(x+۱)=-۲x+۱$$

بنابراین برای این‌که تابع $y_۲$ بر تابع $y_۱$ منطبق شود، باید ضابطه‌ی آن به‌صورت $-۲x+۱$ باشد، یعنی:

$$\begin{cases} a=-۲ \\ ab=۱ \end{cases} \Rightarrow b=-\frac{۱}{۲}$$

**تذکر:** چون a مخالف صفر است، پس $y_۲$ نمی‌تواند بر قسمت ثابت تابع $y_۱$ منطبق شود.

## آزمون شماره ۲۳

**۱. گزینه ۳**

**راهبرد:** اگر a عددی صحیح باشد، آن‌وقت:

| | معمولی | لجبازِ یکی بیشتر! |
|---|---|---|
| ۱ | $[u]<a \Rightarrow u<a$ | $[u]\le a \Rightarrow u<a+۱$ |
| ۲ | $[u]\ge a \Rightarrow u\ge a$ | $[u]>a \Rightarrow u\ge a+۱$ |

**۱** $۴-[x]\ge ۰ \Rightarrow [x]\le ۴ \Rightarrow x<۵ \Rightarrow D_f=(-\infty,۵)$

**۲** $[x]-۱>۰ \Rightarrow [x]>۱ \Rightarrow x\ge ۲ \Rightarrow D_g=[۲,+\infty)$

$$D_{gof}=\{x\in D_f, f(x)\in D_g\}=\{x<۵, \sqrt{۴-[x]}\ge ۲\}$$

$$=\{x<۵, \underbrace{۴-[x]\ge ۴}_{[x]\le ۰}\}=\{x<۵, x<۱\}=\{x\mid x<۱\}$$

**۲. گزینه ۲**

$$\underbrace{f(۰)=۲}_{\text{از شکل}} \xrightarrow{\text{درضابطه}} ۲=\underbrace{[a(۰)]}_{۰}+b \Rightarrow b=۲$$

در $f(x)=[ax]+۲$ طول هر پله $\frac{۱}{a}$ و طبق شکل ۲ واحد است، پس:

$$\frac{۱}{a}=۲ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{جای‌گذاری}} |[x]+|x-۱||=۲$$

حالت اول:

$$\underbrace{[x]}_{\in\mathbb{Z}}+|x-۱|=\underbrace{۲}_{\in\mathbb{Z}} \Rightarrow |x-۱|=\text{عدد صحیح} \Rightarrow x\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x+|x-۱|=۲ \Rightarrow |x-۱|=۲-x$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادله}} x=\frac{۳}{۲} \checkmark$$

حالت دوم:

$$\underbrace{[x]}_{\in\mathbb{Z}}+|x-۱|=\underbrace{-۲}_{\in\mathbb{Z}} \Rightarrow x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x+|x-۱|=-۲$$

$$\Rightarrow |x-۱|=-۲-x \xrightarrow{\text{حل معادله}} \text{امکان ندارد}$$

**۳. گزینه ۴**

خروج عدد صحیح

$$[|۲x-۱|-۲]=-۱ \Rightarrow [|۲x-۱|]-۲=-۱$$

$$\Rightarrow [|۲x-۱|]=۱ \Rightarrow ۱\le |۲x-۱|<۲$$

**۱** $|۲x-۱|<۲ \Rightarrow -۲<۲x-۱<۲ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}<x<\frac{۳}{۲}$

**۲** $|۲x-۱|\ge ۱ \Rightarrow ۲x-۱\le -۱$ یا $۲x-۱\ge ۱$

$$\Rightarrow x\le ۰ \text{ یا } x\ge ۱$$

و اشتراک **۱** و **۲** می‌شود: $-\frac{۱}{۲}<x\le ۰$ یا $۱\le x<\frac{۳}{۲}$.

**۷. گزینه ۳**

$۱۸۰^\circ - ۱۲۰^\circ = ۶۰^\circ$ = زاویه‌ی خط با جهت مثبت محور x ها

$\xrightarrow{\text{شیب}} \tan ۶۰^\circ = m \Rightarrow m = \sqrt{۳}$

$\xrightarrow[\text{عرض از مبدا}]{(۰, k+\sqrt{۳})} y - (k+\sqrt{۳}) = \sqrt{۳}(x-۰)$

$\xrightarrow[\text{صدق بده}]{(-۱, ۲k-۱)} (۲k-۱) - (k+\sqrt{۳}) = \sqrt{۳}(-۱)$

$\Rightarrow k - ۱ - \sqrt{۳} = -\sqrt{۳} \Rightarrow k = ۱$

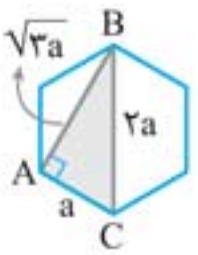
$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} y - (۱+\sqrt{۳}) = \sqrt{۳}x$

$\xrightarrow{\text{وارون خط}} x - (۱+\sqrt{۳}) = \sqrt{۳}y \Rightarrow y = \frac{۱}{\sqrt{۳}}x - \frac{۱+\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}$

$f^{-۱}(x) = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x - ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}(x-۱) - ۱$

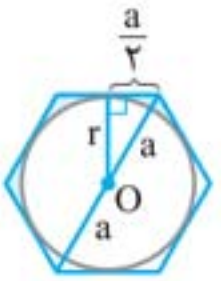
**۸. گزینه ۲**

**راهبرد:** قطر کوچک شش ضلعی منتظم به اضلاع روبه‌رو عمود است. اندازه‌ی قطر کوچک $\sqrt{۳}a$ و قطر بزرگ $۲a$ است.




$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{۳}a \times a}{۲} \overset{\text{فرض}}{=\!=} ۶\sqrt{۳}$

$\Rightarrow a^۲ = ۱۲$



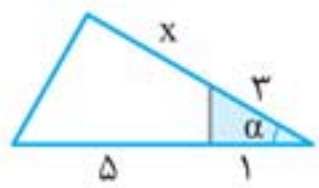

$\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} r^۲ = a^۲ - \frac{a^۲}{۴}$

$= \frac{۳a^۲}{۴} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{۳}a}{۲} \Rightarrow$

$S_{\text{رنگی}} = \frac{S_{\text{شش ضلعی}} - S_{\text{دایره}}}{۲} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲ - \pi\left(\frac{۳a^۲}{۴}\right)\right)$

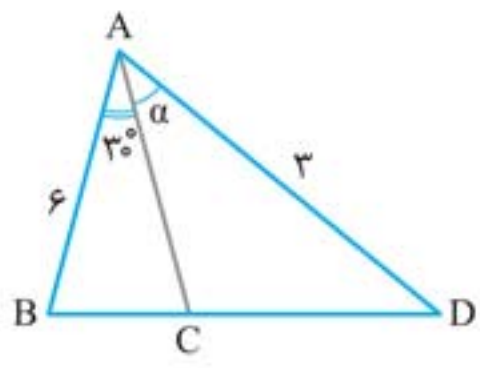
$\xrightarrow{a=۲\sqrt{۳}} \frac{۱}{۲}(۱۸\sqrt{۳} - ۹\pi) = ۹\sqrt{۳} - \frac{۹\pi}{۲}$

**۹. گزینه ۱**




$S_{\text{رنگی}} = \frac{۱}{۸}S_{\text{کل}} \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۱ \times \sin\alpha$

$= \frac{۱}{۸} \times \frac{۱}{۲}(x+۳)(۶)\sin\alpha \Rightarrow x+۳ = ۴ \Rightarrow x = ۱$



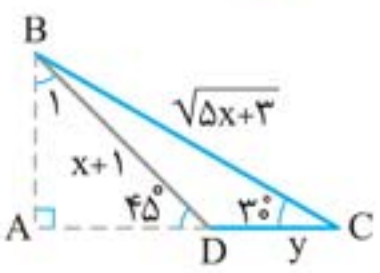

$S_{\triangle ABC} = ۳S_{\triangle ACD}$

$\Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۶ \times AC \times \sin ۳۰^\circ$

$= ۳ \times \frac{۱}{۲} \times ۳ \times AC \sin\alpha$

$\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$

**۱۰. گزینه ۱**




$\overset{\triangle}{ABC}: AB = \frac{۱}{۲}BC = \frac{\sqrt{۵x+۳}}{۲}$

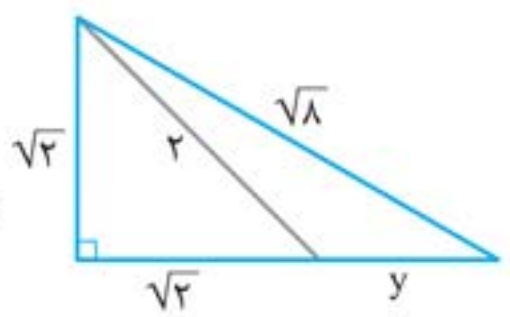
$\overset{\triangle}{ABC}: AB = \frac{\sqrt{۲}}{۲}BD \Rightarrow \frac{\sqrt{۵x+۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x+۱)$

$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۵x+۳ = ۲(x^۲+۲x+۱) \Rightarrow ۲x^۲ - x - ۱ = ۰$

$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x = ۱, -\frac{۱}{۲}$

$\widehat{B_۱} = ۴۵^\circ \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین $\Rightarrow AD = AB$

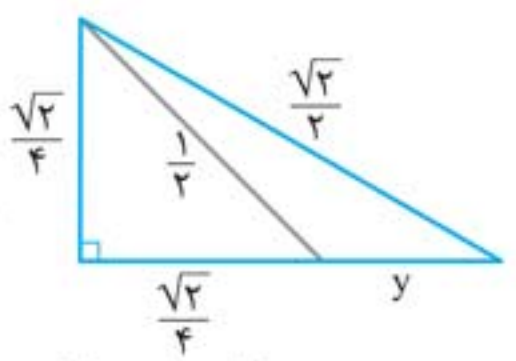
$x = ۱ \Rightarrow$




$\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} (\sqrt{۲})^۲ + (\sqrt{۲}+y)^۲ = (\sqrt{۸})^۲$

$\Rightarrow \sqrt{۲} + y = \sqrt{۶} \Rightarrow y = \sqrt{۶} - \sqrt{۲}$

$x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow$




$\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} (\frac{\sqrt{۲}}{۴})^۲ + (\frac{\sqrt{۲}}{۴}+y)^۲ = \frac{۱}{۲}$

$\frac{\sqrt{۲}}{۴} + y = \frac{\sqrt{۳}}{۸} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۲}}{۴} - \frac{\sqrt{۳}}{۸}$

مقدار به‌دست آمده برای y در گزینه‌ها نیست.

## آزمون شماره ۴۱

**۱. گزینه ۲**

بی‌اثر

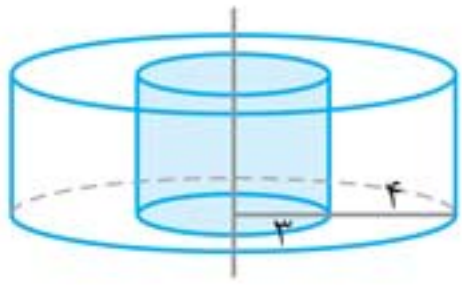
$\frac{۱}{۱۸}\cot\alpha = \frac{\cos(-۲۱۰^\circ) + \cot(۲۴۰^\circ)}{\tan(۷۲۰^\circ) - \tan(-۶۰۰^\circ)}$

$= \frac{\cos(۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ) + \cot(۱۸۰^\circ + ۶۰^\circ)}{\underbrace{\tan(۲ \times ۳۶۰^\circ)}_{۰} + \tan(\underbrace{۵۴۰^\circ}_{۳ \times ۱۸۰^\circ} + ۶۰^\circ)}$

$\Rightarrow \frac{۱}{۱۸}\cot\alpha = \frac{-\cos ۳۰^\circ + \cot ۶۰^\circ}{۰ + \tan ۶۰^\circ}$

$\frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۹}$

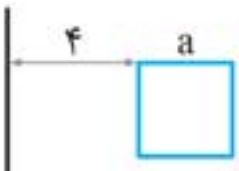
۲۹. (گزینه ۱) دوران یافته‌ی ABCD، استوانه‌ای می‌شود که یک استوانه‌ی کامل از وسط آن درآمده است!




شعاع قاعده‌ی استوانه‌ی بزرگ ۷ و ارتفاعش هم ۴ است.
استوانه‌ی کوچک هم شعاع قاعده‌اش ۳ و ارتفاعش ۴ است!

$$\text{حجم} = \pi(۷)^۲(۴) - \pi(۳)^۲(۴) = ۱۶۰\pi$$

حالا حجم حاصل از دوران مربع سفید!!




حجم حاصل از دوران مربع سفید وسطی، تفاضل حجم دو استوانه است:

$$\pi(a+۴)^۲(a) - \pi(۴)^۲(a) = \pi a(a^۲ + ۸a)$$

در نهایت:

$$\text{حجم شکل حاصل} = ۱۶۰\pi - (\pi a^۲(a+۸)) \overset{\text{فرض}}{=\!=} ۱۲۰\pi$$

$$\Rightarrow \pi a^۲(a+۸) = ۴۰\pi \Rightarrow a^۲(a+۸) = ۴۰ = ۴\times ۱۰$$

(مربع کامل)

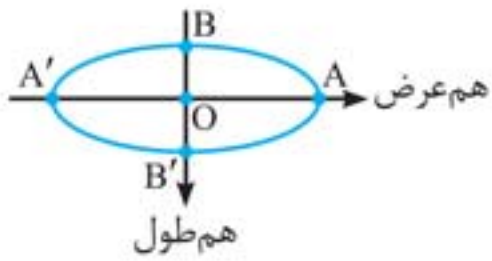
$$\Rightarrow a = ۲$$

می‌توانید گزینه‌ها را هم امتحان کنید...

۳۰. (گزینه ۴) $A(۵,۲)$ و $A'(-۱,۲)$ مختصات دو سر قطر بزرگ این بیضی هستند و بیضی افقی است. وسط دو سر قطر بزرگ، برابر مرکز بیضی است:

$$O\left(\frac{-۱+۵}{۲}, \frac{۲+۲}{۲}\right) = (۲,۲)$$

نقطه‌ای که بیضی از آن می‌گذرد، هم طول با O است؛ این مورد تنها زمانی ممکن می‌شود که نقطه‌ی موردنظر، یکی از رأس‌های غیر کانونی (دوسر قطر کوچک) بیضی باشد. (چراکه فقط دو نقطه‌ی هم طول مرکز بیضی و روی بیضی داریم؛ یعنی B و $B'$)




$$AB = \sqrt{a^۲ + b^۲} \Rightarrow \sqrt{(۵-۲)^۲ + (۲-۴)^۲}$$

$$= \sqrt{a^۲ + b^۲} \Rightarrow \sqrt{۹+۴} = \sqrt{۱۳} = \sqrt{a^۲ + b^۲}$$

$$\Rightarrow a^۲ + b^۲ = ۱۳$$

از طرفی $AA' = ۲a$، پس:

$$AA' = \sqrt{(۵+۱)^۲ + (۲-۲)^۲} = ۶ = ۲a \Rightarrow a = ۳$$

$$a^۲ + b^۲ = ۱۳ \xrightarrow{a=۳} ۹ + b^۲ = ۱۳$$

$$\Rightarrow b^۲ = ۴ \Rightarrow b = ۲$$

بنابراین:

$$\sqrt{\frac{b^۲}{a^۲}} = \sqrt{\frac{۴}{۹}} = \frac{۲}{۳}$$

## آزمون شماره ۹۷

۱. (گزینه ۳)

$$q = \sqrt[m+۱]{\frac{b}{a}} \Rightarrow q = \sqrt[۵]{\frac{۴۸۶}{۲}} = \sqrt[۵]{۲۴۳} = \sqrt[۵]{۳^۵} = ۳$$

دنباله: ۲, ۶, ۱۸, ۵۴, ۱۶۲, ۴۸۶

$$\text{واسطه‌ی حسابی بین جملات دوم و سوم} = \frac{۶+۱۸}{۲} = ۱۲$$

۲. (گزینه ۲)

$$۱۶ + ۶\sqrt{۷} = (\sqrt{۷}+۳)^۲$$

$$\Rightarrow \sqrt[۶]{۱۶+۶\sqrt{۷}} = \sqrt[۶]{(\sqrt{۷}+۳)^۲} = \sqrt[۳]{\sqrt{۷}+۳}$$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{\sqrt{۷}-۳} \times \sqrt[۳]{\sqrt{۷}+۳} = \sqrt[۳]{(\sqrt{۷}-۳)(\sqrt{۷}+۳)}$$

$$\underline{\text{بنا بر اتحاد مزدوج}} \quad \sqrt[۳]{۷-۹} = \sqrt[۳]{-۲} = -\sqrt[۳]{۲}$$

۳. (گزینه ۳) برای آن‌که نمودار این تابع و محور x ها فقط در یک نقطه مشترک باشند، باید معادله‌ی $(۱-m)x^۲ + (۲m-۱)x - (m+۲) = ۰$ فقط دارای یک ریشه باشد.

حالت اول: $\Delta = ۰$ و معادله‌ی درجه‌ی دوم، یک ریشه‌ی مضاعف داشته باشد (نمودار تابع f بر محور x ها مماس شود):

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (۲m-۱)^۲ + ۴(۱-m)(m+۲) = ۰$$

$$\Rightarrow (۴m^۲ - ۴m + ۱) + (-۴m^۲ - ۴m + ۸) = ۰$$

$$\Rightarrow -۸m + ۹ = ۰ \Rightarrow m = \frac{۹}{۸}$$

حالت دوم:

اگر در معادله‌ی $(۱-m)x^۲ + (۲m-۱)x - (m+۲) = ۰$، ضریب $x^۲$ صفر شود، یعنی:

$$۱ - m = ۰ \Rightarrow m = ۱$$

در این صورت، معادله‌ی بالا به معادله‌ی درجه‌ی اول $x - ۳ = ۰$ تبدیل می‌شود و باز هم دارای یک ریشه است.

پس مجموع مقادیر ممکن برای m برابر است با:

$$\frac{۹}{۸} + ۱ = \frac{۱۷}{۸}$$

۴. (گزینه ۲)

$$x = -۱ \Rightarrow -\frac{b}{۲a} = -۱ \xrightarrow{\text{عددگذاری}} \text{(طول رأس سهمی)}$$

$$\frac{-b}{۲(-۱)} = -۱ \Rightarrow b = -۲ \xrightarrow{\text{سهمی}} y = -x^۲ - ۲x + c$$

$$\text{روی سهمی } \left(\frac{۲c}{۵}, ۰\right) \xrightarrow{\text{صدق بده}} ۰ = -\frac{۴c^۲}{۲۵} - \frac{۴c}{۵} + c$$

$$\xrightarrow{\times ۲۵} -۴c^۲ - ۲۰c + ۲۵c = ۰$$

$$\Rightarrow -۴c^۲ + ۵c = ۰ \Rightarrow c(-۴c+۵) = ۰$$

**الف) توابع یک‌به‌یک معروف:** $y=ax^{۳}+b$ ، $y=ax+b$ ، $y=\sqrt{ax+b}$ ، $y=\log_c(ax+b)$ باشرط $a\neq ۰$ ، $c>۰$ و $c\neq ۱$
و تابع نمایی $y=a^{mx+h}$ باشرط $m\neq ۰$.

**ب) توابع غیریک‌به‌یک معروف:** $y=ax^{۲}+bx+c$ $(a\neq ۰)$، تابع ثابت $y=c$ ، $y=|ax+b|$ ، تابع جزءصحیح $y=[ax+b]$ و توابع مثلثاتی $y=\sin x$ ، $y=\cos x$ و $y=\tan x$.

◀ برای تابع‌های غیریک‌به‌یک می‌توانید با ارائه‌ی محدوده‌ای برای $x$، کاری کنید که تابع در آن بازه یک‌به‌یک گردد؛ بهترین شیوه برای به‌دست آوردنِ این بازه معمولاً رسم تابع است...

## ۴ وارون تابع و ویژگی‌هایش

**الف) مفاهیم مقدماتی تابع وارون:** اگر جای مولفه‌ها را در زوج مرتب‌های تابع $f$ عوض کنیم به وارون تابع می‌رسیم و چنانچه این وارون،خودش تابع باشد به آن تابع وارون می‌گوییم و نمادش هم $f^{-۱}$ است، پس **شرط وارون‌پذیری تابع $f$، یک‌به‌یک بودن آن است.**

◀ برای رسم نمودار $f^{-۱}$ از روی نمودار $f$، کافی است نمودارِ تابع را نسبت به $y=x$ قرینه کنید.

◀ اگر جای دامنه و برد را در $f$ عوض کنید، دامنه و برد $f^{-۱}$ به‌دست می‌آید. **مدل ریاضی** $D_{f^{-۱}}=R_f$ و $R_{f^{-۱}}=D_f$

**ب) پیداکردن ضابطه‌ی تابع وارون:**

در ضابطه‌ی تابع ابتدا جای $x$ و $y$ را عوض کنید و بعد سعی کنید $y$ را بر حسب $x$ پیدا کنید.

**ببین:**

$$y=\frac{x+۱}{x}\xrightarrow{\text{جابه‌جا}}x=\frac{y+۱}{y}\Rightarrow y+۱=xy\Rightarrow y(۱-x)=-۱\Rightarrow \underbrace{y=\frac{۱}{x-۱}}_{\text{ضابطه‌ی تابع وارون}}$$

◀ اگر برد تابع $f$ محدود باشد، بعد از پیدا کردن ضابطه‌ی تابع وارون، در کنارش محدوده‌ی برد $f$ را هم بنویسید...

**نگاه‌کن:**

$$y=۱-\sqrt{x}\xrightarrow{\text{جابه‌جا}}x=۱-\sqrt{y}\xrightarrow{\text{توان۲}}y=(x-۱)^{۲}\Rightarrow f^{-۱}(x)=(x-۱)^{۲}\ ,\ \underbrace{x\leq ۱}_{\text{برد f}}$$

**روش تستی:** اگر ضابطه‌ی تابعِ وارونِ $f$ را خواسته باشند، در تابع $f$ِ خودتان (که دارید) مقداری دلخواه به $x$ داده و $y$ را پیدا کنید؛ مثلاً $f(a)=b$ حالا گزینه‌ای درست است که اگر به $x$ آن بدهیم $b$ حاصلِ تابع بشود $a$؛ درست برعکس!

**پ) وارون تابع درجه دو:**

تابع $y=ax^{۲}+bx+c$ وارون‌پذیر نیست. (چون یک‌به‌یک نیست) پس با ارائه محدوده‌ای مناسب وارون‌پذیر می‌شود که عبارت است از:

**یک بازه‌ای قبل از $-\frac{b}{۲a}$ یا بازه‌ای بعد از آن:** بعد با روش مربع کامل کردن وارونش را پیدا کنید:

**نگاه‌کن:**

$$y=x^{۲}-۴x+۱,\ x\geq ۲\xrightarrow{\text{مربع کامل}}y=(x-۲)^{۲}-۴+۱=(x-۲)^{۲}-۳\xrightarrow{\text{جابه‌جا}}x=(y-۲)^{۲}-۳$$

$$\Rightarrow (y-۲)^{۲}=x+۳\xrightarrow{\text{جذر}}|y-۲|=\sqrt{x+۳}\xrightarrow[y>۲\text{در وارون می‌شود}]{x\geq ۲}y-۲=\sqrt{x+۳}\Rightarrow y=\sqrt{x+۳}+۲$$

## ۵ عملیات جبری و ترکیب روی دو تابع

**الف) دامنه و ضابطه:**

| | | |
|---|---|---|
| $D=D_f\cap D_g$ | $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ | $f+g$ |
| | $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ | $f-g$ |
| | $(fg)(x)=f(x)g(x)$ | $f\cdot g$ |
| $D=D_f\cap D_g\ ,\ g(x)\neq ۰$ | $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ | $\frac{f}{g}$ |

### ۴۵ دوره تناوب‌های خاص

دوره تنـــاوب تابع‌های $f(x)=a\tan(bx+c)+d$ ، $g(x)=a\sin^{۲}(bx+c)+d$ ، $h(x)=a\cos^{۲}(bx+c)+d$ و

هم‌چنین $y=|a\sin(bx+c)|$ و $y=|a\cos(bx+c)|$ همگی $T=\frac{\pi}{|b|}$ است.

### ۴۶ فرمول‌های معادله‌های مثلثاتی

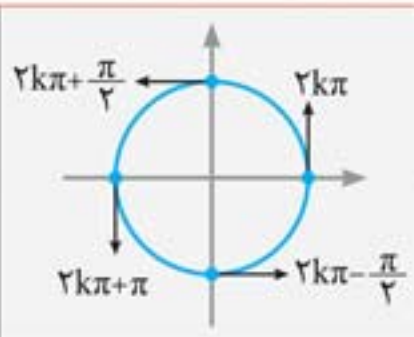
اول معادله را با روابط مثلثاتی (اصلی، $\frac{k\pi}{۲}+\alpha$، $۲\alpha$ و طلایی) ساده کنید.

| | |
|---|---|
| دو نسبت هم‌نام مساوی دارید. | $\sin u=\sin v\Rightarrow u=۲k\pi+v\ ,\ u=۲k\pi+\pi-v$ |
| | $\cos u=\cos v\Rightarrow u=۲k\pi\pm v$ |
| دو نسبت غیرهم‌نام مساوی دارید. | حالت اول $\Rightarrow \sin u=\cos v\Rightarrow \sin u=\sin(\frac{\pi}{۲}-v)$؛ کمان یکی را متمم کنید. |
| خود معادله، درجه‌ی دوم است. | $a\sin^{۲}u+b\sin u+c=۰$؛ فرض کنید $\sin u=t$ و معادله‌ی درجه‌ی دوم را حل کنید. |
| | $a\cos^{۲}u+b\cos u+c=۰$؛ فرض کنید $\cos u=t$ و معادله‌ی درجه‌ی دوم را حل کنید. |
| | اگر $\sin^{۲}u$ و $\cos u$ در معادله حضور دارند، به جای $\sin^{۲}u$ بگذارید $۱-\cos^{۲}u$ و هم‌چنین اگر $\cos^{۲}u$ و $\sin u$ با هم دیده شوند، به جای $\cos^{۲}u$ بگذارید $۱-\sin^{۲}u$ ... |
| ظرافت $۲\alpha$ | اگر $\cos ۲u$ و $\sin u$ در معادله حضور دارند؛ به جای $\cos ۲u$ بگذار $۱-۲\sin^{۲}u$ |
| | اگر $\cos ۲u$ و $\cos u$ در معادله حضور دارند؛ به جای $\cos ۲u$ بگذار $۲\cos^{۲}u-۱$ |

### ۴۷ جواب‌های خاص معادله‌ی مثلثاتی

| | ۰ | ۱ | $-۱$ |
|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $x=k\pi$ | $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ | $x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$ |
| $\cos x$ | $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ | $x=۲k\pi$ | $x=۲k\pi+\pi$ |

### ۴۸ کمان‌های معروف

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| |  | | | |
| $x=\frac{k\pi}{۴}$ | | $x=\frac{k\pi}{۲}$ | $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ | $x=k\pi$ |



## حد

### ۴۹ فرمول‌های مقدماتی

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| باقی‌مانده‌ی $f(x)$ بر $ax+b$ | $f(x)$ بر $ax+b$ بخش‌پذیر است. | تابع $f$ در $x\to a$ دارای حد است. | $x\to a^{+}$ | $x\to a^{-}$ |
| $r=f(-\frac{b}{a})$ | $f(-\frac{b}{a})=۰$ | عدد $=\lim\limits_{x\to a^{+}}f(x)=\lim\limits_{x\to a^{-}}f(x)$ | $x>a$ | $x<a$ |

## ۵۰ روش‌های محاسبه‌ی حد

| | |
|---|---|
| اگر $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$ و $\lim_{x\to a} g(x)=m$ | $\lim_{x\to a}(f\pm g)(x)=\ell\pm m$ |
| | $\lim_{x\to a}(fg)(x)=\ell m$ و در نتیجه $\lim_{x\to a} f^k(x)=\ell^k$ , $(k\in\mathbb{N})$ |
| | $\lim_{x\to a}(\frac{f}{g})(x)=\frac{\ell}{m}$ $(m\neq 0)$ |
| $f(x)=\begin{cases} g(x) & x>a \\ h(x) & x<a \end{cases}$ | حد راست تابع $f$ را از شاخه‌ی بالا (که جلوش $x>a$ است) و حد چپ را از شاخه‌ی پایینی (که جلوش $x<a$ است) پیدا کنید. |
| $f(x)=\lim_{x\to a}\lvert u\rvert$ | اگر $x=a$ باعث صفرشدن $u$ می‌شود، حد راست و چپ را جداگانه حساب کنید. |
| $f(x)=\lim_{x\to a}[u]$ | اگر $x=a$ باعث عدد صحیح‌شدن $u$ می‌شود، حد راست و چپ را جداگانه حساب کنید. |
| رفع ابهام $\frac{0}{0}$ | در جبری‌ها، هوپیتال بزن(!) و یا صورت و مخرج را بر $x-a$ تقسیم کنید و به جای هر کدام مقسوم‌علیه تقسیم را بگذارید. |
| | در رادیکالی‌ها، هوپیتال بزن (!) و یا صورت و مخرج را در لنگه‌ی لازم گویاکردن ضرب کنید. |
| | در مثلثاتی‌ها: سعی کنید با روابط مثلثاتی عبارتی را برای ساده‌شدن از صورت و مخرج ایجاد کنید. |
| | در مثلثاتی‌ها: اگر کمان به صفر میل می‌کند، قرار دهید $\sin^n u=u^n$ و $1-\cos^m u\sim m\frac{u^2}{2}$ |
| حد نامتناهی | وقتی $\lim_{x\to a}\frac{\text{عدد غیر صفر}}{\text{صفرحدی}}$ ایجاد شده، جواب می‌شود $\infty$، بعدش مخرج را در اطراف $x\to a$ تعیین علامت کنید. |
| حد در بی‌نهایت | به جای هر چندجمله‌ای، تنها جمله‌ای که بزرگترین توان را دارد نگه دارید و مابقی را حذف کنید. (**پرتوان**) $ax^n+bx^{n-1}+\cdots\sim ax^n$ و $(n\in\mathbb{N})\ \lim_{x\to\infty}\frac{k}{x^n}=0$ |
| $\lim_{x\to a} f(u)$ | اول $\lim_{x\to a} u$ را حساب کنید اگر $\ell$ شد، تعیین کنید $\ell^+$ است یا $\ell^-$ و بعد $f(\ell^\pm)$ را... |

## ۵۱ حد کسر خاص

| | |
|---|---|
| عدد $=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\text{صفرحدی}}$ | نتیجه بگیرید $f(a)=0$ بوده و بعد کسر را رفع ابهام کنید. |
| عدد غیر صفر $=\lim_{x\to a}\frac{\text{صفر}}{f(x)}$ | نتیجه بگیرید $f(a)=0$ بوده و بعد کسر را رفع ابهام کنید. |
| عدد غیر صفر $=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}{a'x^m+b'x^{m-1}+\cdots}$ | نتیجه بگیرید $m=n$ بوده است. جواب صفر کسر یعنی $m>n$ ...! |
| $\lim_{x\to m}\frac{\square}{ax^2+bx+c}=+\infty$ یا $-\infty$ | نتیجه بگیرید $-\frac{b}{a}=2m$ , $\frac{c}{a}=m^2$ ( $x=m$ ریشه‌ی مضاعف مخرج بوده) |

## ۸۳ قوانین احتمال پیشرفته

| | | | |
|---|---|---|---|
| احتمال شرطی | $P(A\mid B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$ = احتمال اتفاق افتادنِ A مشروط به اتفاق افتادنِ B و یا $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ | | |
| پیشامدهای مستقل | $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ | $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$ | $P(A-B)=P(A)-P(A)P(B)$ |
| پیشامدهای غیرمستقل | $P(A\cap B)=P(A)P(B\mid A)$ ؛ احتمال اولی (مجزا) ضربدر احتمال دومی (با شرط این‌که اولی اتفاق افتاده باشد) | | |
| احتمال کل | در نمودارِ حالت ۱: $P_1$ —حالت مطلوب اتفاق دوم→ $P_3$؛ حالت ۲: $P_2$ —حالت مطلوب اتفاق دوم→ $P_4$ | اتفاق اول، جواب می‌شود $P_1P_3+P_2P_4$ | |
| ساختن ظرف جدید | ظرف اول: m تا بردار؛ ظرف دوم: n تا بردار؛ ظرف جدید: m+n تا دارد | نحوه‌ی کشیدن فلش‌های احتمال کل: ظرف جدید ← مال اولی $\frac{m}{m+n}$ حالت مطلوب؛ مال دومی $\frac{n}{m+n}$ حالت مطلوب | |

## ۸۴ تکنیک‌های احتمال

| | | |
|---|---|---|
| تست‌های دختر پسری | در خانواده‌ای با n فرزند؛ احتمال داشتن k تا پسر = احتمال داشتن k تا دختر | $P(A)=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$ |
| | در پرتاب n بارِ سکه؛ احتمال آمدن k بار رو = احتمال آمدن k بار پشت | |
| پیشامدهای ناسازگار | $P(A\cap B)=0$ و در نتیجه: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ | |
| مجموع دو تاس | اگر بخواهید مجموع دو تاس بشود m به‌طوری که $m\le 7$ است؛ تعداد حالت‌ها می‌شود: $m-1$ . | |
| | اگر بخواهید مجموع دو تاس بشود n به‌طوری که $n\ge 7$ است؛ تعداد حالت‌ها می‌شود $n-13$. | |

# آمار

## ۸۵ انواع متغیرها

| کمی گسسته | کمی پیوسته | کیفی اسمی | کیفی ترتیبی |
|---|---|---|---|
| متغیر را می‌توانید بشمارید | متغیر قابل اندازه‌گیری است | فقط نوع یا وضعیت متغیر قابل بیان است | در نوع متغیر یک ترتیب طبیعی می‌بینید. |

## ۸۶ شاخص‌های آماری

| $R=\max-\min$ | $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ | $\sigma^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$ | $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$ | $CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}$ |
|---|---|---|---|---|
| دامنه تغییرات | میانگین | واریانس | انحراف معیار | ضریب تغییرات |