فصل ۲

قسمت سوم
معادلات مثلثاتی

معادلات مثلثاتی، مهم‌ترین مبحث مثلثات محسوب می‌شه. چرا که واسه حل اونا می‌بایست به تمام روابط و اتحادهای مثلثاتی مسلط باشیم. یعنی بسیاری از مطالبی که تا این‌جا تو مثلثات خوندیم ابزارهایی هستن که تو حل معادلات مثلثاتی به کار می‌رن. تقریباً هر سال یه تست کنکور تو رشته‌های ریاضی و تجربی از معادلات مثلثاتی مطرح می‌شه.

معادلهٔ مثلثاتی

معادلاتی که پس از ساده شدن بر حسب نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ مجهول نوشته می‌شوند، معادلات مثلثاتی نام دارند. به طور مثال معادلات $۳\sin^{۲} x+\sin x-۴=۰$ و $۲\tan x+\cos ۲x=۱$، معادلات مثلثاتی هستند.

صورت‌های مقدماتی معادلات مثلثاتی

اغلب معادلات مثلثاتی، پس از ساده کردن به یکی از چهار صورت زیر تبدیل می‌شوند:

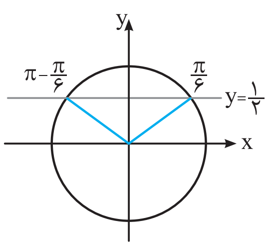
۱) $\sin u=\sin\alpha$ ۲) $\cos u=\cos\alpha$

۳) $\tan u=\tan\alpha$ ۴) $\cot u=\cot\alpha$

به معادلات فوق، صورت‌های مقدماتی معادلات مثلثاتی گفته می‌شود. در واقع در حل بسیاری از معادلات مثلثاتی، سعی می‌کنیم به کمک اتحادها و روابط مثلثاتی و گاهی اوقات جبری، معادلهٔ داده‌شده را به یکی از صورت‌های فوق تبدیل و سپس آن را حل کنیم. منظور از حل معادلات مثلثاتی، یافتن مقدارهایی از زاویهٔ مجهول است که به ازای آن‌ها معادله برقرار باشد.

در ادامه به حل هر یک از صورت‌های مقدماتی و برخی از معادلاتی که به آن‌ها تبدیل می‌شوند خواهیم پرداخت.

حل معادلات به شکل $\sin u=\sin\alpha$

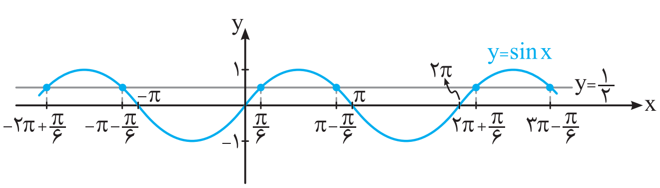


معادلهٔ $\sin x=\frac{۱}{۲}$ یا به طور معادل معادلهٔ $\sin x=\sin\frac{\pi}{۶}$ را در نظر بگیرید.

برای حل این معادله، در دایرهٔ مثلثاتی مقابل، خط $y=\frac{۱}{۲}$ و زوایای $\frac{\pi}{۶}$ و $\pi-\frac{\pi}{۶}$ که سینوس آن‌ها برابر $\frac{۱}{۲}$ است را رسم می‌کنیم.

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی، می‌توان گفت هر یک از زوایای $x_۱=\frac{\pi}{۶}$ و $x_۲=\pi-\frac{\pi}{۶}$ جواب‌هایی از معادلهٔ $\sin x=\frac{۱}{۲}$ هستند. اما همان‌طور که می‌دانیم، زوایای $\frac{\pi}{۶}+۲\pi$، $\frac{\pi}{۶}+۴\pi$ و ... و به طور کلی $۲k\pi+\frac{\pi}{۶}$ $(k\in\mathbb{Z})$، با زاویهٔ $\frac{\pi}{۶}$ و زوایای $\pi-\frac{\pi}{۶}$، $۲\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}$، $۴\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}$ و ... و به طور کلی $۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}$ $(k\in\mathbb{Z})$ با زاویهٔ $\pi-\frac{\pi}{۶}$ هم‌انتها هستند. پس می‌توان گفت به ازای هر $k\in\mathbb{Z}$، هر یک از زوایای $۲k\pi+\frac{\pi}{۶}$ و $۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}$، جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x=\frac{۱}{۲}$ هستند.

تعبیر هندسی این مطلب در شکل مقابل نیز قابل مشاهده است:



با توجه به نمودار، طول نقاط برخورد خط $y=\frac{۱}{۲}$ با نمودار $y=\sin x$، ریشه‌های معادلهٔ $\sin x=\frac{۱}{۲}$ هستند. در واقع داریم:

$$\sin x=\frac{۱}{۲}\ \begin{cases} x=\cdots,-\pi-\frac{\pi}{۶},\pi-\frac{\pi}{۶},۳\pi-\frac{\pi}{۶},\cdots\Rightarrow x=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۶} \\ x=\cdots,-۲\pi+\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۶},۲\pi+\frac{\pi}{۶},\cdots\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

در حالت کلی برای حل معادلهٔ $\sin u = a$ که در آن $-1 \le a \le 1$، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\sin\alpha = a$ شود. در این‌صورت معادله به شکل $\sin u = \sin\alpha$ درمی‌آید. جواب‌های کلی این معادله با توجه به دوران‌های مختلف به‌صورت $u = 2k\pi + \alpha$ و $u = 2k\pi + \pi - \alpha$ می‌باشد که در آن $k \in \mathbb{Z}$. بنابراین به طور خلاصه نکتهٔ زیر را داریم:

نکته $\sin u = \sin\alpha \Rightarrow u = 2k\pi + \alpha \ , \ u = 2k\pi + \pi - \alpha \ , \ k \in \mathbb{Z}$

مثال **جواب‌های کلی هر یک از معادلات زیر را به‌دست آورید:**

آ) $\sqrt{8}\sin x = 2$ ب) $\sin 4x - \sin x = 0$

پاسخ: با توجه به نکتهٔ فوق، جواب‌های کلی هر یک از معادلات را به‌دست می‌آوریم:

آ)

$$\sqrt{8}\sin x = 2 \Rightarrow \sin x = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{4} = 2k\pi + \dfrac{3\pi}{4} \end{cases} , \ (k \in \mathbb{Z})$$

ب)

$$\sin 4x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin 4x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + x \\ 4x = 2k\pi + \pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi \\ 5x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2k\pi}{3} \\ x = \dfrac{(2k+1)\pi}{5} \end{cases}$$

نکته برای یافتن جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی در یک بازه، به جای k اعداد صحیح 0، ±1 و ±2 و ... را قرار داده و جواب‌هایی که در آن بازه قرار دارند را می‌پذیریم.

تست **مجموع جواب‌های معادلهٔ $2\sin(2x - \frac{\pi}{3}) - 1 = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟**

۱) $\frac{22\pi}{5}$ ۲) $\frac{11\pi}{3}$ ۳) $\frac{7\pi}{2}$ ۴) 4π

پاسخ:

$$2\sin(2x - \frac{\pi}{3}) - 1 = 0 \Rightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - \dfrac{\pi}{3} = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ 2x - \dfrac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ 2x = 2k\pi + \dfrac{7\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \dfrac{\pi}{4} \\ x = k\pi + \dfrac{7\pi}{12} \end{cases}$$

اکنون با جای‌گذاری مقادیر صحیح به جای k، جواب‌های معادله را در بازهٔ $[0, 2\pi]$ به‌دست می‌آوریم:

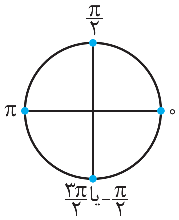
k	0	1
x	$\frac{\pi}{4} , \frac{7\pi}{12}$	$\pi + \frac{\pi}{4} , \pi + \frac{7\pi}{12}$

توجه کنید که به ازای $k < 0$، جواب‌های معادله منفی می‌شوند و لذا در بازهٔ $[0, 2\pi]$ قرار ندارند. همچنین به ازای $k \ge 2$ نیز جواب‌های معادله در خارج این بازه قرار می‌گیرند. بنابراین این معادله در بازهٔ $[0, 2\pi]$ دارای چهار جواب به‌صورت فوق بوده و مجموع آن‌ها برابر است با:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{12} + \pi + \frac{\pi}{4} + \pi + \frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi + 7\pi + 12\pi + 3\pi + 12\pi + 7\pi}{12} = \frac{44\pi}{12} = \frac{11\pi}{3} \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

حالت‌های خاص

ببین عزیزم، اگه از ما بخوان معادلهٔ $3x^2 + 5x - 8 = 0$ رو حل کنیم، اگر چه می‌تونیم این معادله رو به روش Δ یا تجزیه حل کنیم، اما ساده‌تر اینه که بگیم چون مجموع ضرایب معادلهٔ درجه ۲ صفر شده، پس یکی از جواباش ۱ هس و دیگری $-\frac{8}{3} = \frac{c}{a}$. در واقع این‌جا از حالت خاص حل معادلهٔ درجه ۲ استفاده کردیم. تو حل معادله‌های مثلثاتی هم یه همچین حالتایی داریم که اگه این حالت‌ها رو بلد باشیم خیلی سریع می‌تونیم به جواب برسیم.



در حل معادلهٔ $\sin u = a$، اگر a یکی از اعداد صفر، -1 یا 1 باشد، با توجه به دایرهٔ مثلثاتی می‌توان از نکتهٔ زیر برای حل معادله استفاده نمود:

نکته اگر $k \in \mathbb{Z}$ باشد، در این‌صورت:

۱) $\sin u = 0 \Rightarrow u = k\pi$ ۲) $\sin u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ۳) $\sin u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$

همون‌طور که گفتم این فرمولا خیلی مهمن اما می‌خوام یه راه کار بهت بگم که بدون این‌که حفظ کنی، این فرمولا و حالتای خاص معادلات کسینوسی را خوب یاد بگیری.
اولاً مواست باشه که حالتای خاص واسهٔ ۰ و ۱ و ۱- هس. ثانیاً راهکار اینه:
اگه تو یه دور مثلثاتی یعنی تو بازهٔ $[0, 2\pi)$، معادلهٔ مثلثاتی فقط یه جواب داشته باشه، جواب کلیش می‌شه: *اولین زاویه* $+ 2k\pi$
و اگه تو یه دور مثلثاتی معادلهٔ مثلثاتی دو جواب داشته باشه جواب کلیش می‌شه: *اولین زاویه* $+ k\pi$
مثلاً ببین، $\sin u = 1$، تو یه دور فقط یه جواب داره. اونم $\frac{\pi}{2}$ هس. پس جواب کلی می‌شه $u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
اما معادلهٔ $\sin u = 0$ تو یه دور دو جواب داره و اولین جوابش صفره. پس جواب کلی می‌شه $u = k\pi$

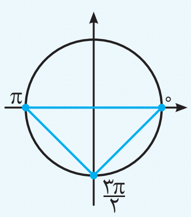
تذکر در حالتی که $\sin u = 1$ یا $\sin u = -1$ باشد، آن‌گاه این معادلات جواب مضاعف دارند. در واقع در این حالت هر دو دسته جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی بر هم منطبق می‌شوند. از نظر هندسی نیز خطوط $y = 1$ و $y = -1$ بر نمودار $y = \sin u$ مماس هستند.

تست **در معادلهٔ $\sin^2 x + \sin x = 0$، از به هم پیوستن نقاط پایانی تمام جواب‌ها بر دایرهٔ مثلثاتی، شکل حاصل می‌شود. مساحت این شکل چند واحد سطح است؟**

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) 1 ۴) $\frac{3}{2}$

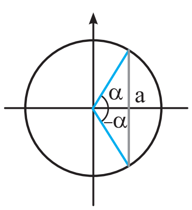
پاسخ:

$$\sin^2 x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \\ \sin x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$



به ازای مقادیر مختلف $k \in \mathbb{Z}$، نقاط پایانی جواب کلی $x = k\pi$ بر دو نقطهٔ $x = 0$ و $x = \pi$ و نقاط پایانی جواب کلی $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ بر $x = \frac{3\pi}{2}$ منطبق است. با توجه به شکل، از به هم پیوستن این نقاط یک مثلث حاصل می‌شود که مساحت آن برابر $S = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$ واحد سطح بوده و بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

حل معادلات به شکل $\cos u = \cos \alpha$



برای حل معادلهٔ $\cos u = a$ که $-1 \le a \le 1$، ابتدا α را طوری می‌یابیم که $\cos \alpha = a$. در این‌صورت معادله به شکل $\cos u = \cos \alpha$ درمی‌آید که با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل و این‌که دورهٔ تناوب تابع $y = \cos x$ برابر 2π است، جواب‌های کلی این معادله از نکتهٔ زیر به‌دست می‌آید:

نکته $\cos u = \cos \alpha \Rightarrow u = 2k\pi \pm \alpha \, , \, k \in \mathbb{Z}$

مثال **جواب‌های کلی معادلات مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.**

آ) $\sqrt{2}\cos 3x - 1 = 0$ ب) $\cos 4x \cos 2x + \sin 4x \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ: آ)

$$\sqrt{2}\cos 3x - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\cos 3x = 1 \Rightarrow \cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos 3x = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{نکتهٔ قبل}} 3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{12}$$

ب) با استفاده از رابطهٔ $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$، داریم:

$$\cos 4x \cos 2x + \sin 4x \sin 2x = \cos(4x - 2x) = \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos\frac{\pi}{6}$$

$$\xrightarrow{\text{نکتهٔ قبل}} 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{12}$$

تست

معادلهٔ $\cos^4 x = \sin^4 x + \frac{1}{2}$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: می‌دانیم $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$. بنابراین داریم:

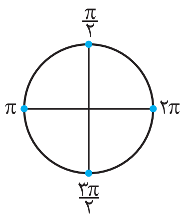
$$\cos^4 x = \sin^4 x + \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (\cos^2 x - \sin^2 x)\underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

k	-1	0	1
x	$-\frac{5\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$

بنابراین معادله در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ دارای چهار جواب بوده و گزینهٔ (۳) صحیح است.

حالت‌های خاص



در معادلهٔ $\cos u = a$، اگر a یکی از اعداد ۱، ۱− و صفر باشد، حالت‌های خاص رخ می‌دهد که با توجه به دایرهٔ مثلثاتی، داریم: $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $\cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ۲) $\cos u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi$ ۳) $\cos u = -1 \Rightarrow u = (2k+1)\pi$

این‌جا هم حواست باشه که حالت‌های خاص واسه اعداد ۰، ۱ و ۱− هس و ضمناً می‌تونی از همون راه کاری که قبلاً واسه سینوس گفتم، این‌جا هم استفاده کنی.

تذکر ریشه‌های معادلات $\cos u = \pm 1$، ریشهٔ مضاعف می‌باشند.

تست

مجموع جواب‌های معادلهٔ $2\cos^2 x + 1 = 3\cos x$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۱) 4π ۲) 5π ۳) $\frac{11\pi}{3}$ ۴) $\frac{14\pi}{3}$

پاسخ:

$$2\cos^2 x + 1 = 3\cos x \Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Rightarrow (\cos x - 1)(2\cos x - 1) = 0$$

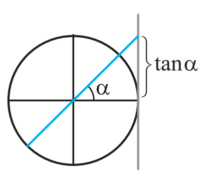
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $[0, 2\pi]$ را یافته و مجموع آن‌ها را حساب می‌کنیم:

k	0	1
x	$0, \frac{\pi}{3}$	$2\pi, 2\pi - \frac{\pi}{3}$

$$\text{مجموع جواب‌ها} = 0 + \frac{\pi}{3} + 2\pi + 2\pi - \frac{\pi}{3} = 4\pi \Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

حل معادلات به شکل $\tan u = \tan\alpha$



برای حل معادلهٔ $\tan u = a$ و $a \in \mathbb{R}$، ابتدا α را طوری می‌یابیم که $\tan\alpha = a$. در این صورت معادله به شکل $\tan u = \tan\alpha$ درمی‌آید که با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل و این‌که دورهٔ تناوب تابع $y = \tan x$ برابر π است، جواب‌های کلی این معادله از نکتهٔ زیر به‌دست می‌آید:

نکته

$$\tan u = \tan\alpha \Rightarrow u = k\pi + \alpha, \; k \in \mathbb{Z}$$

مثال

جواب کلی معادلات زیر را به‌دست آورید.

آ) $\sqrt{3}\tan 3x - 1 = 0$ ب) $\tan(x + \frac{\pi}{4}) - \tan(\frac{\pi}{4} - x) = 2$

پاسخ: آ)

$$\sqrt{3}\tan 3x - 1 = 0 \Rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan 3x = \tan\frac{\pi}{6} \xrightarrow{\text{نکتهٔ قبل}} 3x = k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{18}$$

ب) با استفاده از اتحادهای $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$ و نیز $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$، معادلهٔ داده‌شده را ساده و سپس آن را حل می‌کنیم:

$$\tan(x + \frac{\pi}{4}) - \tan(\frac{\pi}{4} - x) = 2 \Rightarrow \frac{\tan x + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \tan\frac{\pi}{4}} - \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan x} = 2 \Rightarrow \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} - \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{(1 + \tan x)^2 - (1 - \tan x)^2}{1 - \tan^2 x} = 2 \Rightarrow \frac{4\tan x}{1 - \tan^2 x} = 2 \Rightarrow \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = 1$$

$$\Rightarrow \tan 2x = 1 \Rightarrow \tan 2x = \tan\frac{\pi}{4} \xrightarrow{\text{نکتهٔ قبل}} 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

تست معادلهٔ $\tan x+\cot x=۲$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۲})$ چند جواب دارد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

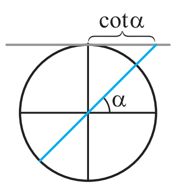
پاسخ: $\tan x+\cot x=۲ \Rightarrow \tan x+\frac{۱}{\tan x}=۲ \xrightarrow{\times \tan x} \tan^۲ x+۱=۲\tan x$

$$\Rightarrow \tan^۲ x-۲\tan x+۱=۰ \Rightarrow (\tan x-۱)^۲=۰ \Rightarrow \tan x=۱ \Rightarrow \tan x=\tan\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}, k\in\mathbb{Z}$$

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۹\pi}{۴}$

بنابراین معادله در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۲})$ دارای سه جواب بوده و گزینهٔ (۳) صحیح است.

حل معادلات به شکل $\cot u=\cot\alpha$



بـرای حـل معادلـهٔ $\cot u=a$ و $a\in\mathbb{R}$، ابتـدا α را طـوری می‌یـابیم کـه $\cot\alpha=a$. در این‌صـورت معادلـه بـه شکل $\cot u=\cot\alpha$ درمی‌آید که با توجه به دایرهٔ مثلثاتی و این‌که دورهٔ تناوب تابع $y=\cot x$ برابر π است، جواب‌هـای کلی این معادله از نکتهٔ زیر به‌دست می‌آید:

نکته

$$\cot u=\cot\alpha \Rightarrow u=k\pi+\alpha, k\in\mathbb{Z}$$

تست جواب کلی معادلهٔ $\cot x-\tan x=۲\sqrt{۳}$ کدام است؟

۱) $k\pi+\frac{\pi}{۶}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۱۲}$

پاسخ: می‌دانیم $\cot x-\tan x=۲\cot ۲x$. بنابراین داریم:

$$\cot x-\tan x=۲\sqrt{۳} \Rightarrow ۲\cot ۲x=۲\sqrt{۳} \Rightarrow \cot ۲x=\sqrt{۳} \Rightarrow \cot ۲x=\cot\frac{\pi}{۶}$$

$\xrightarrow{\text{نکتهٔ قبل}} ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۱۲}, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow$ گزینهٔ (۴) صحیح است.

نکته فرض کنید $k\in\mathbb{Z}$ باشد، در این‌صورت:

$$\begin{cases}\sin^۲ u=\sin^۲\alpha \\ \cos^۲ u=\cos^۲\alpha \\ \tan^۲ u=\tan^۲\alpha \\ \cot^۲ u=\cot^۲\alpha\end{cases} \Rightarrow u=k\pi\pm\alpha$$

تست جواب کلی معادلهٔ $\sin(\pi+x)\cos(\frac{\pi}{۲}+x)-\frac{۱}{۲}\sin\frac{۵\pi}{۶}=۰$ کدام است؟

۱) $k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۲) $k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ ۳) $۲k\pi+\frac{\pi}{۶}$ ۴) $۲k\pi-\frac{\pi}{۶}$

پاسخ: $\sin(\pi+x)\cos(\frac{\pi}{۲}+x)-\frac{۱}{۲}\sin\frac{۵\pi}{۶}=۰ \Rightarrow (-\sin x)(-\sin x)-\frac{۱}{۲}\sin(\pi-\frac{\pi}{۶})=۰$

$$\Rightarrow \sin^۲ x-\frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۶}=۰ \Rightarrow \sin^۲ x-\frac{۱}{۴}=۰ \Rightarrow \sin^۲ x=\frac{۱}{۴}=(\frac{۱}{۲})^۲ \Rightarrow \sin^۲ x=\sin^۲(\frac{\pi}{۶})$$

$\xrightarrow{\text{نکتهٔ قبل}} x=k\pi\pm\frac{\pi}{۶} \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

نکته همواره برای تبدیل کردن سینوس به کسینوس و بالعکس و نیز تانژانت به کتانژانت و بالعکس، می‌توان از زاویهٔ متمم $\frac{\pi}{۲}-\alpha$ استفاده نمود.

مثال

معادلات زیر را حل کنید.

آ) $\sin 2x - \cos(\frac{\pi}{3} - x) = 0$ ب) $\tan(3x - \frac{\pi}{4}) = \cot x$

پاسخ: آ)

$$\sin 2x - \cos(\frac{\pi}{3} - x) = 0 \Rightarrow \sin 2x = \cos(\frac{\pi}{3} - x)$$

قبلاً روش حل معادلهٔ $\sin u = \sin \alpha$ رو یاد گرفتیم. حالا باید کاری کنیم که طرف راست معادله هم سینوسی بشه. واسه همین از زاویهٔ متمم استفاده می‌کنیم.

$$\xrightarrow{\text{نکتهٔ قبل}} \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{3} - x)) \Rightarrow \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{6} + x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} + x \\ 2x = 2k\pi + \pi - (\frac{\pi}{6} + x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 3x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{5\pi}{18} \end{cases}$$

ب) می‌دانیم $\cot x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$، پس داریم:

$$\tan(3x - \frac{\pi}{4}) = \cot x \Rightarrow \tan(3x - \frac{\pi}{4}) = \tan(\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow 3x - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} - x$$

$$\Rightarrow 4x = k\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{3\pi}{16}$$

نکته اگر طرفین معادلهٔ مثلثاتی هم‌جنس باشند ولی یک طرف آن **منفی** باشد، در مورد **سینوس**، **تانژانت** و **کتانژانت**، علامت منفی را به **داخل کمان** می‌بریم ولی در مورد **کسینوس**، علامت منفی را **حذف کرده** و زاویهٔ α را به $\pi - \alpha$ تبدیل می‌کنیم.

مثال

معادلات زیر را حل کنید.

آ) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ ب) $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$

پاسخ: آ)

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است.}} \begin{cases} \sin x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = -\sin\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

بنابر نکتهٔ قبل، در معادلهٔ دوم، علامت منفی را به داخل کمان برده و آن را حل می‌کنیم:

$$\sin x = -\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

ب) می‌دانیم $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$، پس داریم:

$$\cos 2x + \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = 0 \text{ یا } \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = -\cos\frac{\pi}{3}$$

بنابر نکتهٔ قبل، در این قسمت علامت منفی را حذف کرده و زاویهٔ $\frac{\pi}{3}$ را به $\pi - \frac{\pi}{3}$ تبدیل می‌کنیم، داریم:

$$\cos x = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

نکته در معادلات کسری و رادیکالی، جواب‌هایی که در دامنهٔ معادله قرار ندارند را باید حذف نمود.

مثال

جواب‌های معادلات زیر در بازهٔ $[0, 2\pi]$ به‌دست آورید.

آ) $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$ ب) $\frac{\sin x + \sin 3x}{\sin x} = 1$

پاسخ: آ) $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin x = \cos x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

k	0	1
x	$\frac{\pi}{4}$	$\pi + \frac{\pi}{4}$

جواب‌های $\frac{\pi}{4}$ و $\pi + \frac{\pi}{4}$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ واقع هستند، اما جواب $\pi + \frac{\pi}{4}$ که در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد، در دامنهٔ معادله واقع نیست زیرا عبارت زیر رادیکال به ازای این جواب منفی می‌شود. پس $x = \frac{\pi}{4}$ تنها جواب این معادله، در بازهٔ $[0, 2\pi]$ است.

ب) $\frac{\sin x + \sin 3x}{\sin x} = 1 \Rightarrow \cancel{\sin x} + \sin 3x = \cancel{\sin x} \Rightarrow \sin 3x = 0$

$\xrightarrow{\text{حالت خاص}} 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$

k	0	1	2	3	4	5	6
x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π

حال باید توجه کرد که مخرج کسر نباید صفر شود. از بین جواب‌های به‌دست آمده، $x = 0$، $x = \pi$ و $x = 2\pi$ ریشه‌های مخرج کسر هستند. پس این جواب‌ها را باید حذف نمود و لذا معادلهٔ داده‌شده در بازهٔ $[0, 2\pi]$ دارای چهار جواب $\frac{\pi}{3}$، $\frac{2\pi}{3}$، $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ می‌باشد.

نکته آ) اگر $k \in (-1, 1) - \{0\}$ باشد، معادلهٔ $\sin nx = k$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ دارای **2n جواب** و نیز در صورتی‌که $k \in (-1, 1)$ باشد، معادلهٔ $\cos nx = k$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ دارای **2n جواب** است.

ب) اگر $\alpha \neq 0$ باشد، جواب کلی $\frac{2k\pi}{n} + \alpha$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ دارای **n جواب** و جواب کلی $\frac{k\pi}{n} + \alpha$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ دارای **2n جواب** است.

تست

معادلهٔ $(4\sin x - 5)(3\cos 3x - 2) = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ:

$$(4\sin x - 5)(3\cos 3x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{5}{4} \\ \text{یا} \\ \cos 3x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

چون $\frac{5}{4} > 1$، پس $\sin x = \frac{5}{4}$ جواب ندارد. بر اساس نکتهٔ قبل معادلهٔ $\cos 3x = \frac{2}{3}$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ دارای $2n = 2 \times 3 = 6$ جواب بوده و گزینهٔ (۳) صحیح است.

تست

معادلهٔ $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: می‌دانیم $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ و $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. پس:

$2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 \Rightarrow (2\cos^2 x - 1) + 2\sin x \cos x = 0 \Rightarrow \cos 2x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\cos 2x$

$\xrightarrow{\div \cos 2x} \tan 2x = -1 = -\tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan 2x = \tan(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

بنابر نکتهٔ قبل، جواب کلی $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ دارای $2 \times 2 = 4$ جواب بوده و بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

خلاصهٔ قسمت سوم: معادلات مثلثاتی

برای حل معادلات مثلثاتی، طرفین معادله را آن‌قدر ساده می‌کنیم تا به یکی از چهار حالت زیر برسیم. سپس به کمک دستورهای زیر، جواب‌های کلی معادله را تعیین می‌کنیم.

$$۱)\ \sin u = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} u = ۲k\pi + \alpha \\ u = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \quad , \quad ۲)\ \cos u = \cos\alpha \Rightarrow u = ۲k\pi \pm \alpha$$

$$۳)\ \tan u = \tan\alpha \Rightarrow u = k\pi + \alpha \quad , \quad ۴)\ \cot u = \cot\alpha \Rightarrow u = k\pi + \alpha$$

حالات خاص

در صورتی‌که به یکی از حالات زیر برسیم به کمک دستورات زیر، جواب معادلات را تعیین می‌کنیم.

$$۱)\ \sin u = ۰ \Rightarrow u = k\pi \quad , \quad ۲)\ \sin u = ۱ \Rightarrow u = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad , \quad ۳)\ \sin u = -۱ \Rightarrow u = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲}$$

$$۴)\ \cos u = ۰ \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad , \quad ۵)\ \cos u = ۱ \Rightarrow u = ۲k\pi \quad , \quad ۶)\ \cos u = -۱ \Rightarrow u = ۲k\pi + \pi$$

۷) جواب کلی معادلات $\sin^۲ u = \sin^۲\alpha$ ، $\cos^۲ u = \cos^۲\alpha$ ، $\tan^۲ u = \tan^۲\alpha$ و $\cot^۲ u = \cot^۲\alpha$ عبارت است از: $u = k\pi \pm \alpha$

نکته ۱ همواره برای تبدیل کردن سینوس به کسینوس و بالعکس و نیز تانژانت به کتانژانت و بالعکس، از زاویهٔ متمم یعنی $\frac{\pi}{۲} - \alpha$ استفاده می‌کنیم.

نکته ۲ اگر طرفین معادلهٔ مثلثاتی، هم‌جنس باشند ولی یک طرف آن منفی باشد، در مورد **سینوس، تانژانت و کتانژانت، علامت منفی را به داخل کمان** می بریم ولی در مورد **کسینوس، علامت منفی را حذف کرده و زاویهٔ** α را به $\pi - \alpha$ تبدیل می‌کنیم.

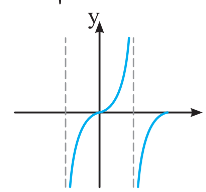
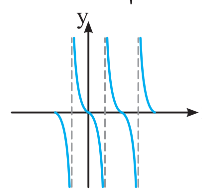
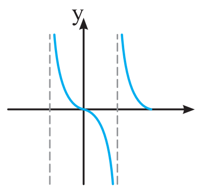
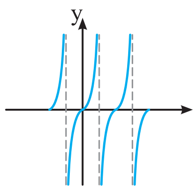
نکته ۳ در معادلات کسری و رادیکالی، جواب‌هایی که در دامنهٔ معادله نیستند را حذف می‌کنیم.

نکته ۴ برای یافتن جواب‌های معادله در یک بازه، در معادلهٔ کلی به جای k، مقادیر مختلف صحیح را قرار داده و مقادیری از جواب که در بازهٔ مربوطه قرار دارند را به‌دست می‌آوریم.

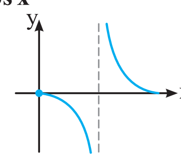
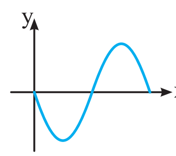
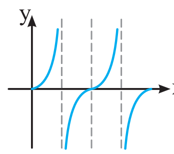
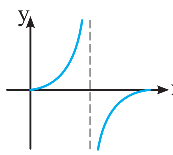
نکته ۵ اگر $k \in (-۱,۱) - \{۰\}$ باشد، معادلهٔ $\sin nx = k$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارای **۲n جواب** و در صورتی‌که $k \in (-۱,۱)$ باشد، معادلهٔ $\cos nx = k$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارای **۲n جواب** است.

نکته ۶ اگر $\alpha \neq ۰$ باشد، جواب کلی $\frac{۲k\pi}{n} + \alpha$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارای **n جواب** و جواب کلی $\frac{k\pi}{n} + \alpha$ در این بازه دارای **۲n جواب** می‌باشد.

☆۱۷۴. نمودار تابع $f(x) = -\frac{1}{2}\tan 2x$ در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$ به کدام صورت است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۱۷۵. نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ به کدام صورت است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

قسمت سوم: معادلات مثلثاتی

یافتن جواب کلی در معادلات مثلثاتی

☆۱۷۶. یک جواب کلی معادلهٔ $\sin 3x = \sin 2x$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $k\pi$ ۲) $\frac{(2k+1)\pi}{3}$ ۳) $\frac{(2k+1)\pi}{5}$ ۴) $\frac{k\pi}{3}$

☆۱۷۷. جواب کلی معادلهٔ $4\cos 2x = \sqrt{8}$ کدام است؟

۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ ۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ ۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{8}$ ۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{8}$

☆۱۷۸. جواب کلی معادلهٔ $\tan x = \tan 5x$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\frac{k\pi}{5}$ ۲) $\frac{k\pi}{4}$ ۳) $\frac{k\pi}{3}$ ۴) $k\pi$

☆۱۷۹. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin 3x + \sin x = 0$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $\frac{k\pi}{2}$ ۲) $k\pi$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

☆۱۸۰. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$، با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۴)

۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

☆۱۸۱. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$، به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی- ۹۳)

۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ ۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ ۳) $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

☆۱۸۲. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1+\cos x} = 0$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۷)

۱) $\frac{k\pi}{5}$ ۲) $\frac{2k\pi}{5}$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{5}$ ۴) $\frac{(2k+1)\pi}{5}$

★۱۸۳. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \sqrt{3}$، به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۱)

۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ ۴) $k\pi - \frac{\pi}{6}$

★۱۸۴. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\tan 3x = \frac{1-\tan x}{1+\tan x}$ به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۴)

۱) $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$ ۲) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$ ۳) $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}$ ۴) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

۱۸۵. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$ به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی- ۹۱)

۱) $\frac{k\pi}{3}$ ۲) $\frac{2k\pi}{3}$ ۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

☆**۱۸۶.** یکی از جواب‌های معادلهٔ $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{2\pi}{3}$ ۲) $\frac{5\pi}{6}$ ۳) $\frac{7\pi}{6}$ ۴) $\frac{4\pi}{3}$

★**۱۸۷.** جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$، کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۵)

۱) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ ۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$

۱۸۸. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin^2 x = 3\cos x$ به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی- ۸۶)

۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۱۸۹. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos x(\cos x - \sin x) = 1$ به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

۱۹۰. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin^2 x - \sin 2x = 1$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

☆**۱۹۱.** جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی- ۸۶)

۱) $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ ۲) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi + \frac{5\pi}{6}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

۱۹۲. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos 2x = \cot x(4\sin x + \tan x)$، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۲)

۱) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ ۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

☆**۱۹۳.** جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos^2 x + 2\sin x\cos x = 1$، به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی- ۹۴)

۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

۱۹۴. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin(\pi - x).\cos(\frac{3\pi}{2} + x) + 3\cot x.\sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی- ۸۷)

۱) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ ۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

★**۱۹۵.** جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$، به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی- ۹۲)

۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۱۹۶. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۵)

۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

★**۱۹۷.** جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $(\sin x - \tan x)\tan(\frac{3\pi}{2} - x) = \cos\frac{4\pi}{3}$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۰)

۱) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

☆**۱۹۸.** جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\tan x \tan 3x = 1$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی- ۹۷)

۱) $\frac{k\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$ ۴) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

☆**۱۹۹.** جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\tan(x + \frac{\pi}{4}) + \tan(x - \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{3}$، به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی- ۸۹)

۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

☆**۲۰۰.** یکی از جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x + \cos x = 1$ به کدام صورت است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $k\pi$ ۲) $\frac{k\pi}{2}$ ۳) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

☆۲۰۱. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sqrt{2}\sin x\cos x=\sin x+\cos x$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۲)

۱) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$

☆۲۰۲. در معادلهٔ مثلثاتی $-\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$، یکی از صورت‌های کلی جواب کدام است؟

۱) $2k\pi+\frac{5\pi}{6}$ ۲) $2k\pi+\frac{2\pi}{3}$ ۳) $2k\pi+\frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi+\frac{\pi}{6}$

۲۰۳. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x+2\cos^2 x=0$ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۶)

۱) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

۲۰۴. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2\frac{5\pi}{6}=\sin(\frac{\pi}{2}+x)\cos(-x)$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

☆۲۰۵. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $(1+\tan^2 x)\cos(\pi+2x)=2$ به کدام صورت است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

۲۰۶. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos(x+\frac{\pi}{3})\cos(x-\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}$، به کدام صورت است؟ $(k\in\mathbb{Z})$ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۹)

۱) $k\pi-\frac{\pi}{3}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

★۲۰۷. جواب‌های کلی معادلهٔ $5\sin x+3\cos(\frac{3\pi}{2}-x)-1=0$ به‌صورت $x=2k\pi+\frac{i\pi}{6}$ است. مجموعهٔ مقادیر i کدام‌اند؟

۱) $\{1,5\}$ ۲) $\{1,7\}$ ۳) $\{5\}$ ۴) $\{1,5,7\}$

حالت‌های خاص در معادلات مثلثاتی

☆۲۰۸. جواب کلی معادلهٔ $\sin^3 x-\sin x=0$ به کدام صورت است؟

۱) $k\pi$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{2}$ ۳) $2k\pi-\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{k\pi}{2}$

☆۲۰۹. نمودار تابع $y=3\sin(\frac{\pi}{4}-2x)$، روی بازهٔ $[-\pi,\frac{3\pi}{2}]$، در چند نقطه محور x ها را قطع می‌کند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۱)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۱۰. اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=a\sin b\pi x$ برابر $\frac{1}{2}$ باشد، نمودار تابع در بازهٔ $[0,1]$ در چند نقطه محور x ها را قطع می‌کند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

☆۲۱۱. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\tan x.\cos^2 x=1$ به کدام صورت است؟ $(k\in\mathbb{Z})$ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۶)

۱) $k\pi-\frac{\pi}{4}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۳) $2k\pi-\frac{\pi}{4}$ ۴) $2k\pi+\frac{\pi}{4}$

★۲۱۲. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-x)=1+\sin(\frac{5\pi}{2}+x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۸۵)

۱) $k\pi+\frac{\pi}{2}$ ۲) $2k\pi-\frac{\pi}{4}$ ۳) $2k\pi-\frac{\pi}{2}$ ۴) $2k\pi+\frac{\pi}{2}$

★۲۱۳. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 3x\sin(3\pi-x)-\sin 3x\cos(\pi+x)=\cos\frac{3\pi}{2}$، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۷)

۱) $\frac{k\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{4}$

۲۱۴. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin(\pi+x)\cos(\frac{\pi}{2}+x)-2\sin(\pi-x)+1=0$ به کدام صورت است؟ $(k\in\mathbb{Z})$ (سراسری تجربی- ۹۰)

۱) $2k\pi-\frac{\pi}{2}$ ۲) $2k\pi+\frac{\pi}{6}$ ۳) $2k\pi+\frac{\pi}{2}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{2}$

۲۱۵. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin\frac{5\pi}{6}+\sin(\frac{\pi}{2}+x)\sin(\pi+x)=0$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۷)

۱) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۲) $k\pi-\frac{\pi}{4}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ ۴) $2k\pi+\frac{\pi}{4}$

۲۱۶. یکی از جواب‌های معادلهٔ $\sin ۳x\cos x = ۱ - \cos ۳x\sin x$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۸}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۸}$

۲۱۷. جواب کلی معادلهٔ $\sin ۵x(\cos ۳x - \sin ۵x) + \cos ۵x(\sin ۳x - \cos ۵x) = ۰$ کدام است؟

۱) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۱۶}$ ۳) $\frac{k\pi}{۸} + \frac{\pi}{۱۶}$ ۴) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$

۲۱۸. جواب کلی معادلهٔ $\frac{\sin ۳x}{\sin x} = ۲\cos^۲ x$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۳)

۱) $\frac{k\pi}{۲}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$

۲۱۹. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin x\sin ۳x = \cos ۲x$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۶)

۱) $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{k\pi}{۳}$

۲۲۰. تمام جواب‌های معادلهٔ $\sin^۴ x + \cos^۴ x = ۱$ کدام است؟

۱) $k\pi$ ۲) $\frac{k\pi}{۲}$ ۳) $\frac{(۲k+۱)\pi}{۲}$ ۴) $۲k\pi$

۲۲۱. جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۲x = \sin x$ به‌صورت $x = ۲k\pi + \frac{i\pi}{۶}$ بیان شده است. مجموعهٔ مقادیر i کدام است؟

۱) $\{۷,۹\}$ ۲) $\{۱,۳,۵\}$ ۳) $\{۱,۴,۷\}$ ۴) $\{۱,۵,۹\}$

۲۲۲. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin x + \sin ۲x + \sin ۳x = ۰$ با شرط $x \neq \frac{k\pi}{۲}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۶)

۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ ۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$

۲۲۳. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۲x\sin ۴x + \sin^۲ x = ۱$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۷)

۱) $k\pi + \frac{\pi}{۶}$ ۲) $(۲k+۱)\frac{\pi}{۶}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{k\pi}{۶}$

۲۲۴. جواب کلی معادلهٔ $\sin ۳x - \sin x + ۴\sin^۲ x = ۲$، با شرط $x \neq ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۷)

۱) $\frac{k\pi}{۴}$ ۲) $(۲k+۱)\frac{\pi}{۴}$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۴) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$

۲۲۵. جواب کلی معادلهٔ $۳\sqrt{۲}(\sin x + \cos x) + \sin ۲x + ۵ = ۰$ کدام است؟

۱) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۲) $۲k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ۳) $k\pi - \frac{۵\pi}{۴}$ ۴) $۲k\pi - \frac{۳\pi}{۴}$

جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی در یک بازه

۲۲۶. مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۵x + \sin ۴x = ۱ + \cos\pi$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۲)

۱) ۸π ۲) ۹π ۳) ۱۰π ۴) ۱۱π

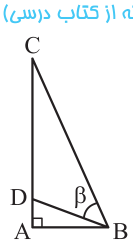
۲۲۷. چند مثلث وجود دارد که طول دو ضلع آن‌ها ۳ و ۴ سانتی‌متر و مساحت آن‌ها ۳ سانتی‌متر مربع باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۲۲۸. یک فوتبالیست، توپ را با سرعت $۶۰ km/h$ به سمت دروازهٔ حریف که در ۳۶ متری او قرار گرفته، می‌فرستد. اگر رابطهٔ بین سرعت توپ v (بر حسب کیلومتر بر ساعت)، مسافت طی‌شدهٔ افقی d (بر حسب متر) و زاویهٔ حرکت توپ θ، به‌صورت $d = \frac{v^۲}{۵۰}\sin ۲\theta$ باشد، زاویهٔ حرکت توپ کدام می‌تواند باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱۰° ۲) ۱۵° ۳) $۲۲/۵^\circ$ ۴) ۳۰°

۲۲۹. در شکل مقابل، اگر $AD = ۰/۵$ ، $CD = ۲/۵$ و $AB = ۱$ باشد، زاویهٔ β چند درجه است؟ (برگرفته از کتاب درسی)



۱) ۷۵
۲) ۶۰
۳) ۴۵
۴) ۳۰

☆ ۲۳۰. معادلهٔ $\sin(\pi\cos x) = -1$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۳۱. معادلهٔ $\sin 2x + \sqrt{2}\cos x = 0$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

☆ ۲۳۲. معادلهٔ $\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} = 1$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳۳. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$، در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۶)

۱) $\frac{14\pi}{3}$ ۲) 4π ۳) $\frac{9\pi}{2}$ ۴) 5π

☆ ۲۳۴. معادلهٔ $\tan 2x - \cot(x - \frac{\pi}{4}) = 0$ در بازهٔ $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

☆ ۲۳۵. مجموع جواب‌های معادلهٔ $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$ در بازهٔ $[\pi, 2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{8\pi}{3}$ ۲) $\frac{10\pi}{3}$ ۳) 3π ۴) $\frac{11\pi}{3}$

☆ ۲۳۶. معادلهٔ $\sin x \cos x = \cos^2 x - \frac{1}{2}$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) صفر

☆ ۲۳۷. معادلهٔ $\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x = \frac{1}{4}$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۲۳۸. معادلهٔ $1 + \sin x = \cos^4 x - \sin^4 x$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

☆ ۲۳۹. مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 4x = \sin^4 x - \cos^4 x$، در بازهٔ $[0, \pi]$، برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۵)

۱) $\frac{7\pi}{4}$ ۲) $\frac{9\pi}{4}$ ۳) $\frac{5\pi}{2}$ ۴) $\frac{11\pi}{3}$

۲۴۰. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1$، در بازهٔ $[0, 2\pi]$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۵)

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{5\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{7\pi}{4}$

☆ ۲۴۱. در معادلهٔ مثلثاتی $2\cos^2 x + \cos x = 1$، نقاط پایانی تمام جواب‌ها بر دایرهٔ مثلثاتی، رأس‌های کدام شکل هندسی است؟

۱) مثلث متساوی‌الاضلاع ۲) مثلث قائم‌الزاویه

۳) ذوزنقه ۴) مستطیل

☆ ۲۴۲. نقاط پایانی کمان جواب‌های معادلهٔ $1 + \cos x = \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x}$ بر روی دایرهٔ مثلثاتی، رأس‌های کدام چندضلعی است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۱)

۱) مربع ۲) مستطیل ۳) مثلث قائم‌الزاویه ۴) مثلث متساوی‌الساقین

★ ۲۴۳. مجموع جواب‌های معادلهٔ $2\sin^2(x - \frac{\pi}{8}) + 3\cos(x - \frac{5\pi}{8}) = 5$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{3\pi}{8}$ ۳) $\frac{5\pi}{4}$ ۴) $\frac{5\pi}{8}$

★ ۲۴۴. در معادلهٔ مثلثاتی $8\sin^2 x + k\sin 2x = 1$، مجموع جواب‌های متمایز در فاصلهٔ $[0, \pi]$ برابر $\frac{3\pi}{4}$ است. k کدام است؟

۱) -2 ۲) -4 ۳) ۲ ۴) ۴

۱۷۴ ۱ **۲** ۳ ۴

تابع $f(x)=-\frac{1}{2}\tan 2x$ به ازای $x=-\frac{\pi}{2}$ (نقطهٔ ابتدایی بازه) صفر می‌شود. پس یکی از گزینه‌های (۲) یا (۴) صحیح هستند. همچنین تابع $y=\tan ax\ (a>0)$ در هر بازه که تعریف شده باشد، صعودی است و چون در اینجا ضریب $\tan 2x$ منفی است، پس نمودار $y=\frac{1}{2}\tan 2x$ نسبت به محور xها قرینه شده و لذا در هر بازه که تعریف شده است، نزولی می‌باشد و لذا گزینهٔ (۲) صحیح است.

۱۷۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

با استفاده از روابط $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ و $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$، داریم:

$$f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$$

بنابراین باید ببینیم نمودار $f(x)=\tan\frac{x}{2}$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ به کدام صورت است. واضح است که تابع f فقط به ازای $x=\pi$ از این بازه تعریف نمی‌شود، پس یکی از گزینه‌های (۱) یا (۴) صحیح هستند. از طرفی مقدار $f(x)=\tan\frac{x}{2}$ به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ برابر ۱ می‌شود. یعنی به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ مقدار f مثبت بوده و باید نمودار آن بالای محور xها باشد. پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

توجه کنید که با استفاده از تبدیل نمودارها نیز می‌توان این نمودار را رسم کرد.

۱۷۶ ۱ ۲ **۳** ۴

نکته: $\sin u=\sin\alpha \Rightarrow u=2k\pi+\alpha\ ,\ u=2k\pi+\pi-\alpha\ ,\ (k\in\mathbb{Z})$

$$\sin 3x=\sin 2x \Rightarrow \begin{cases}3x=2k\pi+2x\\ 3x=2k\pi+\pi-2x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2k\pi\\ x=\frac{(2k+1)\pi}{5}\end{cases}$$

۱۷۷ ۱ ۲ ۳ **۴**

نکته: $\cos u=\cos\alpha \Rightarrow u=2k\pi\pm\alpha\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

$$4\cos 2x=\sqrt{8} \Rightarrow \cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{8}$$

۱۷۸ ۱ **۲** ۳ ۴

نکته: $\begin{cases}\tan u=\tan\alpha\\ \cot u=\cot\alpha\end{cases} \Rightarrow u=k\pi+\alpha\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

$$\tan 5x=\tan x \Rightarrow 5x=k\pi+x \Rightarrow 4x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$$

۱۷۹ **۱** ۲ ۳ ۴

نکته: اگر طرفین معادلهٔ مثلثاتی، همجنس باشند ولی یک طرف آن منفی باشد، در مورد سینوس، تانژانت و کتانژانت، علامت منفی را به داخل کمان می‌بریم ولی در مورد کسینوس، علامت منفی را حذف کرده و زاویهٔ α را به $\pi-\alpha$ تبدیل می‌کنیم.

$$\sin 3x+\sin x=0 \Rightarrow \sin\underbrace{3x}_{u}=-\sin x=\sin(\underbrace{-x}_{\alpha})$$

$$\Rightarrow \begin{cases}3x=2k\pi-x \Rightarrow 4x=2k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\\ 3x=2k\pi+(\pi-(-x)) \Rightarrow 2x=2k\pi+\pi \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اجتماع}} x=\frac{k\pi}{2}$$

۱۸۰ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\cos x\neq 0 \Rightarrow x\neq k\pi+\frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$\cos 3x+\cos x=0 \Rightarrow \cos 3x=-\cos x=\cos(\pi-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}3x=2k\pi+(\pi-x) \Rightarrow 4x=2k\pi+\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\\ 3x=2k\pi-(\pi-x) \Rightarrow 2x=2k\pi-\pi \Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$

۱۸۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\cos(\frac{3\pi}{2}+x)=\sin x\ ,\ \frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2}+x)}=1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 3x}{\sin x}=1 \Rightarrow \sin 3x=\sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases}3x=2k\pi+x \Rightarrow x=k\pi\\ 3x=2k\pi+\pi-x \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

توجه کنیم که $x=k\pi$ غیرقابل قبول است، زیرا مخرج کسر را صفر می‌کند.

۱۸۲ ۱ **۲** ۳ ۴

کسری صفر می‌شود که صورت آن صفر و مخرج آن غیرصفر باشد:

$$\frac{\sin 3x+\sin 2x}{1+\cos x}=0 \Rightarrow \sin 3x+\sin 2x=0 \quad , \quad 1+\cos x\neq 0$$

$$\sin 3x+\sin 2x=0 \Rightarrow \sin 3x=-\sin 2x$$

$$\Rightarrow \sin 3x=\sin(-2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}3x=2k\pi-2x\\ 3x=2k\pi+\pi-(-2x)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5x=2k\pi\\ x=2k\pi+\pi\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=\frac{2k\pi}{5}\\ x=2k\pi+\pi\end{cases}$$

جواب کلی $x=2k\pi+\pi$، ریشه‌های مخرج کسر می‌باشند، پس $x=\frac{2k\pi}{5}$ را می‌پذیریم.

۱۸۳ ۱ **۲** ۳ ۴

با توجه به اتحاد مثلثاتی $\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$، داریم:

$$\tan 2x=\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$$

۱۸۴ ۱ **۲** ۳ ۴

عبارت $\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$ با $\tan(\frac{\pi}{4}-x)$ برابر است، پس داریم:

$$\tan 3x=\tan(\frac{\pi}{4}-x) \Rightarrow 3x=k\pi+(\frac{\pi}{4}-x) \Rightarrow 4x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{16}$$

۱۸۵ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\sin(\frac{۳\pi}{۲}+x)=-\cos x$$

$$\sin^۲ x-\cos^۲ x=-(\cos^۲ x-\sin^۲ x)$$

$$=-\cos ۲x\Rightarrow -\cos ۲x=-\cos x\Rightarrow \cos ۲x=\cos x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi+x\Rightarrow x=۲k\pi & (۱)\\ ۲x=۲k\pi-x\Rightarrow ۳x=۲k\pi\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳} & (۲)\end{cases}$$

$$(۱)\cup(۲)\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}$$

۱۸۶ ۱ ۲ **۳** ۴

با انتخاب $\sin x=A$، معادله به‌صورت $۲A^۲-۳A-۲=۰$ درمی‌آید:

$$۲A^۲-۳A-۲=۰\ ,\ \Delta=۲۵\Rightarrow A=\frac{۳\pm۵}{۴}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=۲=\sin x\ \text{(غیرممکن)}\\ A=-\frac{۱}{۲}=\sin x\Rightarrow x=\frac{۷\pi}{۶}\end{cases}$$

۱۸۷ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\sin^۲ x=۱-\cos^۲ x\ ,\ ۲\sin^۲ x+۳\cos x=۰$$

$$\Rightarrow ۲(۱-\cos^۲ x)+۳\cos x=۰\Rightarrow -۲\cos^۲ x+۳\cos x+۲=۰$$

$$\xrightarrow{\times(-۱)} ۲\cos^۲ x-۳\cos x-۲=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=۹-۴(۲)(-۲)=۲۵\Rightarrow \cos x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۳\pm۵}{۴}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos x=۲\ \text{(غیرممکن)}\\ \cos x=\frac{-۱}{۲}=\cos\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}$$

۱۸۸ ۱ ۲ ۳ **۴**

با اتحاد $\sin^۲ x=۱-\cos^۲ x$، معادله را بر حسب کسینوس می‌نویسیم:

$$۲(۱-\cos^۲ x)=۳\cos x\Rightarrow ۲\cos^۲ x+۳\cos x-۲=۰$$

$$\xrightarrow{A=\cos x} ۲A^۲+۳A-۲=۰,\Delta=۲۵\Rightarrow A=\frac{-۳\pm۵}{۴}$$

$$\Rightarrow A=\frac{۱}{۲},-۲\xrightarrow{-۱\le\cos x\le ۱} A=\cos x=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

۱۸۹ ۱ **۲** ۳ ۴

$$۲\cos x(\cos x-\sin x)=۱$$

$$\Rightarrow ۲\cos^۲ x-۲\sin x\cos x=۱\Rightarrow ۲\cos^۲ x-۱=۲\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow \cos ۲x=\sin ۲x\xrightarrow{\div\cos ۲x}\tan ۲x=۱=\tan\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}$$

۱۹۰ **۱** ۲ ۳ ۴

با توجه به رابطهٔ مثلثاتی $\cos ۲x=۱-۲\sin^۲ x$، داریم:

$$۲\sin^۲ x-\sin ۲x=۱\Rightarrow -\sin ۲x=۱-۲\sin^۲ x$$

$$\Rightarrow -\sin ۲x=\cos ۲x\xrightarrow{\div\cos ۲x}-\tan ۲x=۱$$

$$\Rightarrow \tan ۲x=-۱=\tan(-\frac{\pi}{۴})\Rightarrow ۲x=k\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}$$

۱۹۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$۱-\cos ۲x=۲\sin^۲ x\ ,\ \sin ۲x=۲\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow\frac{۱-\cos ۲x}{\sin ۲x}=\frac{۲\sin^۲ x}{۲\sin x\cos x}\xlongequal{\sin x\neq ۰}\tan x=\sqrt{۳}=\tan\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۳}$$

۱۹۲ ۱ ۲ **۳** ۴

عبارت $\cot x(۴\sin x+\tan x)$ را ساده می‌کنیم:

$$\cot x(۴\sin x+\tan x)=۴\sin x\cot x+\underbrace{\cot x.\tan x}_{۱}$$

$$=۴\cancel{\sin x}\times\frac{\cos x}{\cancel{\sin x}}+۱=۴\cos x+۱$$

$$\Rightarrow ۲\cos ۲x=۴\cos x+۱$$

$$\Rightarrow ۲(۲\cos^۲ x-۱)=۴\cos x+۱\Rightarrow ۴\cos^۲ x-۴\cos x-۳=۰$$

$$\xrightarrow{\cos x=A}۴A^۲-۴A-۳=۰,\Delta=۶۴$$

$$A=\frac{۴\pm۸}{۸}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{۳}{۲}>۱\ \text{(غیرممکن)}\\ A=-\frac{۱}{۲}=\cos x\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}$$

۱۹۳ **۱** ۲ ۳ ۴

$$۲\cos^۲ x+۲\sin x\cos x=۱\Rightarrow ۲\sin x\cos x=۱-۲\cos^۲ x$$

$$\Rightarrow \sin ۲x=-\cos ۲x\xrightarrow{\div\cos ۲x}\tan ۲x=-۱=\tan(-\frac{\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow ۲x=k\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}$$

۱۹۴ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\sin(\pi-x)=\sin x,\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)=\sin x,\sin(\pi+x)=-\sin x$$

$$\Rightarrow ۲\sin x\times\sin x+۳\cot x\times(-\sin x)=۰$$

$$\Rightarrow ۲\sin^۲ x-۳\times\frac{\cos x}{\cancel{\sin x}}\times\cancel{\sin x}=۰\Rightarrow ۲(۱-\cos^۲ x)-۳\cos x=۰$$

$$\Rightarrow -۲\cos^۲ x-۳\cos x+۲=۰,\Delta=۲۵\Rightarrow \cos x=-۲,\frac{۱}{۲}$$

معادلهٔ $\cos x=-۲$ جواب حقیقی ندارد، لذا:

$$\cos x=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

۱۹۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\sin^۲\frac{۵\pi}{۴}=(\sin(\pi+\frac{\pi}{۴}))^۲=(-\sin\frac{\pi}{۴})^۲=(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲=\frac{۱}{۲}$$

$$\sin^۴ x-\cos^۴ x=(\sin^۲ x-\cos^۲ x)\underbrace{(\sin^۲ x+\cos^۲ x)}_{۱}=-\cos ۲x$$

$$\Rightarrow -\cos ۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \cos ۲x=-\frac{۱}{۲}=\cos(\frac{۲\pi}{۳})$$

$$\Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

۱۹۶ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\Rightarrow\cos(x\pm\frac{\pi}{۴})$$

$$=\cos x\cos\frac{\pi}{۴}\mp\sin x\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x\mp\sin x)$$

$$\cos(x+\frac{\pi}{۴})\cos(x-\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x-\sin x)\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x+\sin x)=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{\cancel{۲}}\underbrace{(\cos^۲ x-\sin^۲ x)}_{\cos ۲x}=\frac{۱}{\cancel{۴}_{۲}}\Rightarrow\cos ۲x=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\xrightarrow{\div ۲}x=k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$$

۱۹۷ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\tan(\frac{۳\pi}{۲}-x)=\cot x , \cos\frac{۴\pi}{۳}=\cos(\pi+\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$$

$$(\sin x-\tan x)\tan(\frac{۳\pi}{۲}-x)=\cos\frac{۴\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow(\sin x-\tan x)\cot x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow \sin x\cot x-\underbrace{\tan x\cot x}_{۱}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin x\times\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \cos x=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

۱۹۸ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\tan x\tan ۳x=۱\Rightarrow \tan ۳x=\frac{۱}{\tan x}=\cot x=\tan(\underbrace{\frac{\pi}{۲}-x}_{\alpha})$$

$$\Rightarrow ۳x=k\pi+(\frac{\pi}{۲}-x)\Rightarrow ۴x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۴}+\frac{\pi}{۸} , k\in\mathbb{Z}$$

۱۹۹ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\tan(x+\frac{\pi}{۴})+\tan(x-\frac{\pi}{۴})=\frac{\tan x+\tan\frac{\pi}{۴}}{۱-\tan x\tan\frac{\pi}{۴}}+\frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{۴}}{۱+\tan x\tan\frac{\pi}{۴}}$$

$$=\frac{\tan x+۱}{۱-\tan x}+\frac{\tan x-۱}{۱+\tan x}=\frac{(\tan x+۱)^{۲}+(\tan x-۱)(۱-\tan x)}{(۱-\tan x)(۱+\tan x)}$$

$$=\frac{۴\tan x}{۱-\tan^{۲}x}=۲\sqrt{۳}$$

با توجه به اتحاد مثلثاتی $\tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^{۲}x}$، داریم:

$$\tan ۲x=\sqrt{۳}=\tan\frac{\pi}{۳}\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}$$

۲۰۰ ۱ ۲ **۳** ۴

نکته: $\sin\alpha\pm\cos\alpha=\sqrt{۲}\sin(\alpha\pm\frac{\pi}{۴})$

بنابر نکتهٔ فوق داریم:

$$\sin x+\cos x=۱\Rightarrow \sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})=۱$$

$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۴})=\sin\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\\ x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi\\ x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

ممکنه این‌جا وسوسه بشی و طرفین رو به توان ۲ برسونی و بعدش هم به جواب $\frac{k\pi}{۲}$ برسی. باید بگم که این جواب درست نیست. چون به ازای $k=۲$، جواب $x=\pi$ به‌دست میاد که تو معادله صدق نمی‌کنه. البته بی‌شمار جواب تو این جواب کلی هستن که تو معادله صدق نمی‌کنن.

۲۰۱ ۱ ۲ **۳** ۴

با استفاده از اتحادهای $\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})$ و $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$، معادله را ساده و سپس آن را حل می‌کنیم.

$$۲\sqrt{۲}\sin x\cos x=\sin x+\cos x$$

$$\Rightarrow \cancel{\sqrt{۲}}\times۲\sin x\cos x=\cancel{\sqrt{۲}}\sin(x+\frac{\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow \sin ۲x=\sin(x+\frac{\pi}{۴})\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi+x+\frac{\pi}{۴}\\ ۲x=۲k\pi+\pi-(x+\frac{\pi}{۴})\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\\ x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}\end{cases}$$

توجه کنید که جواب کلی $x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}$، شامل جواب کلی $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}$ نیز می‌باشد. بنابراین از اجتماع این دو جواب کلی، $x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}$ به‌دست می‌آید.

۲۰۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$-\sin x+\sqrt{۳}\cos x=۱\xrightarrow{\div۲}-\frac{۱}{۲}\sin x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow -\sin\frac{\pi}{۶}\sin x+\cos\frac{\pi}{۶}\cos x=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos(x+\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}\\ x+\frac{\pi}{۶}=۲k\pi-\frac{\pi}{۳}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

۲۰۳ ۱ ۲ **۳** ۴

با استفاده از اتحاد مثلثاتی $۲\cos^{۲}x=۱+\cos ۲x$، داریم:

$$\cos ۲x+۲\cos^{۲}x=۰\Rightarrow \cos ۲x+(۱+\cos ۲x)=۰$$

$$\Rightarrow ۲\cos ۲x+۱=۰\Rightarrow ۲\cos ۲x=-۱$$

$$\Rightarrow \cos ۲x=-\frac{۱}{۲}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۳})=\cos\frac{۲\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\xrightarrow{\div۲}x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

۲۰۴ ۱ ۲ **۳** ۴

نکته: جواب کلی معادلات مثلثاتی $\sin^{۲}u=\sin^{۲}\alpha$، $\cos^{۲}u=\cos^{۲}\alpha$، $\tan^{۲}u=\tan^{۲}\alpha$ و $\cot^{۲}u=\cot^{۲}\alpha$ عبارت است از: $u=k\pi\pm\alpha$

$$\sin^{۲}\frac{۵\pi}{۶}=\sin^{۲}(\pi-\frac{\pi}{۶})=\sin^{۲}\frac{\pi}{۶}=(\frac{۱}{۲})^{۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+x)=\cos x \text{ ، } \cos(-x)=\cos x$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۴}=\cos x\times\cos x\Rightarrow \cos^{۲}x=\frac{۱}{۴}=\cos^{۲}\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

۲۰۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

با استفاده از روابط $\cos(\pi+2x)=-\cos 2x$ و $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ معادله را بر حسب کسینوس می‌نویسیم:

$$\frac{1}{\cos^2 x}\times(-\cos 2x)=2\Rightarrow 2\cos^2 x=-\cos 2x$$

$$\xrightarrow{\cos 2x=2\cos^2 x-1}2\cos^2 x=-2\cos^2 x+1\Rightarrow 4\cos^2 x=1$$

$$\Rightarrow\cos^2 x=\frac{1}{4}=\cos^2\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

۲۰۶ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی بالا داریم:

$$\cos(x+\frac{\pi}{3})\cos(x-\frac{\pi}{3})$$

$$=(\cos x\overset{\frac{1}{2}}{\cancel{\cos\frac{\pi}{3}}}-\sin x\overset{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cancel{\sin\frac{\pi}{3}}})(\cos x\overset{\frac{1}{2}}{\cancel{\cos\frac{\pi}{3}}}+\sin x\overset{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cancel{\sin\frac{\pi}{3}}})$$

$$=\frac{1}{4}\cos^2 x-\frac{3}{4}\sin^2 x=-\frac{1}{2}\xrightarrow{\times 4}\cos^2 x-3\sin^2 x=-2$$

$$\xrightarrow{\sin^2 x=1-\cos^2 x}\cos^2 x-3(1-\cos^2 x)=-2$$

$$\Rightarrow\cos^2 x=\frac{1}{4}=\cos^2\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

۲۰۷ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\cos(\frac{3\pi}{2}-x)=-\sin x$$

$$5\sin x+3\cos(\frac{3\pi}{2}-x)=1\Rightarrow 5\sin x-3\sin x=1$$

$$\Rightarrow 2\sin x=1\Rightarrow\sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ x=2k\pi+(\pi-\frac{\pi}{6})=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{i\pi}{6}, i\in\{1,5\}$$

۲۰۸ ۱ ۲ ۳ **۴**

نکته: حالت‌های خاص:

$\sin u=0\Rightarrow u=k\pi$ ، $\sin u=1\Rightarrow u=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

$\sin u=-1\Rightarrow u=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ یا $u=2k\pi-\frac{\pi}{2}$

$\cos u=0\Rightarrow u=k\pi+\frac{\pi}{2}$ ، $\cos u=1\Rightarrow u=2k\pi$

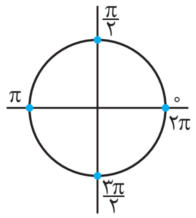
$\cos u=-1\Rightarrow u=(2k+1)\pi$

$$\sin^3 x-\sin x=0\Rightarrow\sin x(\sin^2 x-1)=0$$

$$\Rightarrow\sin x(\sin x-1)(\sin x+1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=0\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x=k\pi\\ \sin x=1\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\\ \sin x=-1\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

اگر انتهای کمان‌های به‌دست آمده را روی دایرهٔ مثلثاتی نمایش دهیم، معلوم می‌شود که این جواب‌ها روی هم رفته، هر ۴ زاویهٔ مرزی را تولید می‌کنند. بنابراین اجتماع این جواب‌ها به‌صورت $x=\frac{k\pi}{2}$ خواهد بود.



۲۰۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$3\sin(\frac{\pi}{4}-2x)=0\Rightarrow -3\sin(2x-\frac{\pi}{4})=0$$

$$2x-\frac{\pi}{4}=k\pi\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}, k\in\mathbb{Z}$$

$$x\in[-\pi,\frac{3\pi}{2}]\Rightarrow -\pi\le x\le\frac{3\pi}{2}\Rightarrow -\pi\le\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\le\frac{3\pi}{2}$$

$$\xrightarrow{\times\frac{8}{\pi}}-8\le 4k+1\le 12\Rightarrow -9\le 4k\le 11$$

$$\Rightarrow -\frac{9}{4}\le k\le\frac{11}{4}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{-2,-1,0,1,2\}$$

۲۱۰ ۱ ۲ **۳** ۴

$$T=\frac{2\pi}{|b|}\xrightarrow{T=\frac{1}{2}}\frac{2\pi}{|b\pi|}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{2}{|b|}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |b|=4\Rightarrow b=\pm 4$$

$$f(x)=0\Rightarrow a\sin b\pi x=0\Rightarrow a\sin(\pm 4\pi x)=0$$

$$\Rightarrow\pm a\sin 4\pi x=0\Rightarrow 4\pi x=k\pi\Rightarrow 4x=k\Rightarrow x=\frac{k}{4}$$

$$x\in[0,1]\Rightarrow 0\le x\le 1\Rightarrow 0\le\frac{k}{4}\le 1\Rightarrow 0\le k\le 4$$

$$\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{0,1,2,3,4\}$$

۲۱۱ ۱ **۲** ۳ ۴

سمت چپ معادله را ساده می‌کنیم:

$$2\tan x.\cos^2 x=2\times\frac{\sin x}{\cos x}.\cos^2 x=2\sin x\cos x=\sin 2x$$

$$\Rightarrow\sin 2x=1\Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}\qquad(*)$$

$$\cos x\ne 0\Rightarrow x\ne k\pi+\frac{\pi}{2}\xrightarrow{(*)}x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

۲۱۲ ۱ ۲ **۳** ۴

$\sin(\frac{5\pi}{2}+x)=\cos x$ ، $\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-x)=\cos x-\sin x$

$$\Rightarrow\cancel{\cos x}-\sin x=1+\cancel{\cos x}\Rightarrow\sin x=-1$$

$$\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$$

۲۱۳ **۱** ۲ ۳ ۴

$\sin(3\pi-x)=\sin x,\cos(\pi+x)=-\cos x$ ، $\cos\frac{3\pi}{2}=0$

$$\Rightarrow\cos 3x\sin x+\sin 3x\cos x=0\Rightarrow\sin(3x+x)=0$$

$$\Rightarrow\sin 4x=0\xrightarrow{\text{حالت خاص}}4x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}$$

۲۱۴ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\sin(\pi+x)=-\sin x,\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x,\sin(\pi-x)=\sin x$$

$$\Rightarrow(-\sin x)(-\sin x)-2\sin x+1=0\Rightarrow\sin^2 x-2\sin x+1=0$$

$$\Rightarrow(\sin x-1)^2=0\Rightarrow\sin x-1=0\Rightarrow\sin x=1$$

$$\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

۲۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\sin(\frac{5\pi}{6})=\sin(\pi-\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos x\ ,\ \sin(\pi+x)=-\sin x$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}-\sin x\cos x=0\xrightarrow{\times 2}1-\underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x}=0\Rightarrow\sin 2x=1$$

$$\xrightarrow{\text{حالت خاص}}2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

۲۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴

با یادآوری این‌که $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$، می‌توان نوشت:

$$\sin 3x\cos x=1-\cos 3x\sin x$$

$$\Rightarrow\sin 3x\cos x+\cos 3x\sin x=1$$

$$\Rightarrow\sin(3x+x)=1\Rightarrow\sin 4x=1\xrightarrow{\text{حالت خاص}}4x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}=\frac{4k\pi+\pi}{8}=\frac{(4k+1)\pi}{8}$$

به ازای $k=1$، به‌دست می‌آید $x=\frac{5\pi}{8}$ که در گزینه‌ها وجود دارد.

۲۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\sin 5x(\cos 3x-\sin 5x)+\cos 5x(\sin 3x-\cos 5x)=0$$

$$\Rightarrow\sin 5x\cos 3x-\sin^2 5x+\cos 5x\sin 3x-\cos^2 5x=0$$

$$\Rightarrow\sin 5x\cos 3x+\cos 5x\sin 3x=\sin^2 5x+\cos^2 5x=1$$

$$\Rightarrow\sin(5x+3x)=1\Rightarrow\sin 8x=1\xrightarrow{\text{حالت خاص}}8x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{16}$$

۲۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{\sin 3x}{\sin x}=2\cos^2 x\xrightarrow{\times\sin x\neq 0}\sin 3x=2\sin x\cos^2 x$$

$$\Rightarrow\sin(2x+x)=(2\sin x\cos x)\cos x$$

$$\Rightarrow\cancel{\sin 2x\cos x}+\cos 2x\sin x=\cancel{\sin 2x\cos x}$$

$$\Rightarrow\cos 2x\sin x=0\xrightarrow{\sin x\neq 0}\cos 2x=0$$

$$\xrightarrow{\text{حالت خاص}}2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$

توجه کنید مقدار $\sin x$ به ازای جواب‌های به‌دست آمده صفر نمی‌شود.

۲۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\sin x\sin 3x=\cos 2x\Rightarrow\sin x\sin 3x=\cos(3x-x)$$

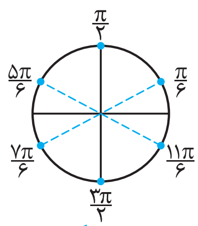
$$\Rightarrow\cancel{\sin x\sin 3x}=\cos 3x\cos x+\cancel{\sin 3x\sin x}$$

$$\Rightarrow\cos 3x\cos x=0\Rightarrow\cos 3x=0\ \text{یا}\ \cos x=0$$

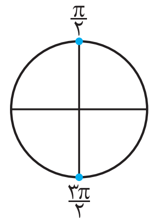
$$\cos 3x=0\xrightarrow{\text{حالت خاص}}3x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$$

$$\cos x=0\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

با نمایش هر دو جواب به‌دست آمده روی دایرهٔ مثلثاتی، مشخص می‌شود که جواب کلی $x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$، شامل جواب کلی $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ نیز می‌باشد.



$x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$



$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$

۲۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴

با استفاده از اتحاد فرعی $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$، داریم:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=1\Rightarrow(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1$$

$$\Rightarrow\cancel{1}-2(\sin x\cos x)^2=\cancel{1}\Rightarrow-2(\frac{1}{2}\sin 2x)^2=0$$

$$\Rightarrow\sin 2x=0\xrightarrow{\text{حالت خاص}}2x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}$$

۲۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم $\cos 2x=1-2\sin^2 x$. پس:

$$\cos 2x=\sin x\Rightarrow 1-2\sin^2 x=\sin x\Rightarrow 2\sin^2 x+\sin x-1=0$$

$$\xrightarrow{b=a+c}\sin x=-1\ \text{یا}\ \sin x=-\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$$

$$\sin x=-1\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{9\pi}{6}$$

$$\sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases}$$

با مقایسهٔ جواب‌های $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$، $x=2k\pi+\frac{9\pi}{6}$ و $x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$ با جواب $x=2k\pi+\frac{i\pi}{6}$، معلوم می‌شود که: $i\in\{1,5,9\}$

۲۲۲ ۱ ۲ ۳ ۴

نکته: $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$$

$$\Rightarrow\sin x+2\sin x\cos x+3\sin x-4\sin^3 x=0$$

$$\Rightarrow 4\sin x+2\sin x\cos x-4\sin^3 x=0$$

$$\Rightarrow 2\sin x(2+\cos x-2\sin^2 x)=0$$

$$\Rightarrow 2\sin x(2(1-\sin^2 x)+\cos x)=0$$

$$\Rightarrow 2\sin x(2\cos^2 x+\cos x)=0$$

$$2\sin x\cos x(2\cos x+1)=0\Rightarrow\sin 2x(2\cos x+1)=0$$

$$\Rightarrow\sin 2x=0\ \text{یا}\ \cos x=-\frac{1}{2}$$

$$\sin 2x=0\xrightarrow{\text{حالت خاص}}2x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}$$ (طبق فرض (غ‌ق‌ق))

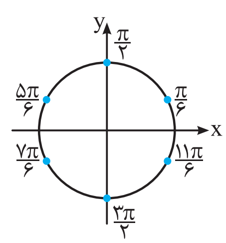
$$\cos x=-\frac{1}{2}=-\cos\frac{\pi}{3}=\cos(\pi-\frac{\pi}{3})\Rightarrow\cos x=\cos(\frac{2\pi}{3})$$

$$\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

۲۲۳ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\sin 2x \sin 4x + \sin^2 x = 1$$
$$\Rightarrow \sin 2x(2\sin 2x\cos 2x) = 1 - \sin^2 x$$
$$\Rightarrow 2\sin^2 2x\cos 2x = \cos^2 x$$
$$\Rightarrow 2(2\sin x\cos x)^2\cos 2x = \cos^2 x$$
$$\Rightarrow 8\sin^2 x\cos^2 x\cos 2x - \cos^2 x = 0$$
$$\Rightarrow \cos^2 x(8\sin^2 x\cos 2x - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \cos^2 x = 0 \text{ یا } 8\sin^2 x\cos 2x - 1 = 0$$
$$\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$
$$8\sin^2 x\cos 2x - 1 = 0 \Rightarrow 8\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\cos 2x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow 4\cos 2x - 4\cos^2 2x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow -(2\cos 2x - 1)^2 = 0 \Rightarrow 2\cos 2x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

چون جواب‌های کلی داده‌شده، به ظاهر، شبیه جواب‌های کلی به‌دست‌آمده یعنی $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ و $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ نیست، پس باید بین این جواب‌ها اجتماع بگیریم. برای این منظور جواب‌های معادله را در یک دورهٔ تناوب مثلاً در بازهٔ $[0, 2\pi]$ به‌دست آورده و با جواب‌های خاص گزینه‌ها در بازهٔ $[0, 2\pi]$ مقایسه می‌کنیم. اگر به جای k در جواب‌های کلی $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ و $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$، اعداد صحیح قرار دهیم، انتهای کمان مقابل به این زوایا به‌صورت نمایش داده‌شده در دایرهٔ مقابل می‌باشند:



از بین گزینه‌ها، فقط انتهای کمان مقابل به جواب کلی $x = (2k+1)\frac{\pi}{6}$ به ازای اعداد صحیح k بر زوایای به‌دست آمده منطبق هستند.

تست سفتی بود نه؟ حق با توئه. البته با اطلاعات کتاب شما سفته ولی اگه فرمولای تبدیل ضرب به جمع رو بلد بودی، این تست تو دو سه خط به راحتی حل می‌شد. این فرمولا تو کتاب بچه‌هایی که سال ۹۷ کنکور دادن، اومده بود.

۲۲۴ ۱ **۲** ۳ ۴

با استفاده از اتحاد $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$، داریم:

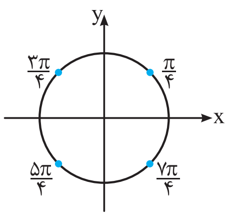
$$\sin 3x - \sin x + 4\sin^2 x = 2$$
$$\Rightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x - \sin x + 4\sin^2 x = 2$$
$$\Rightarrow (2\sin x - 4\sin^3 x) + (4\sin^2 x - 2) = 0$$
$$\Rightarrow 2\sin x(1 - 2\sin^2 x) - 2(1 - 2\sin^2 x) = 0$$
$$\Rightarrow (1 - 2\sin^2 x)(2\sin x - 2) = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \text{ یا } \sin x = 1$$

از $\sin x = 1$، با توجه به حالت خاص، نتیجه می‌شود که $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$، که با توجه به فرض قابل قبول نیست.

می‌دانیم اگر $\sin^2 u = \sin^2 \alpha$، آن‌گاه $u = k\pi \pm \alpha$، پس:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow \sin^2 x = \sin^2\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

مانند تست قبل، به ظاهر، این جواب کلی در گزینه‌ها دیده نمی‌شود. پس باید بین این دو جواب کلی اجتماع بگیریم. انتهای کمان مقابل به زوایای $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ به ازای مقادیر مختلف صحیح k به‌صورت مقابل است:



با توجه به گزینه‌ها، فقط انتهای جواب کلی $(2k+1)\frac{\pi}{4}$ بر جواب‌های روی دایره منطبق هستند.

۲۲۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

قرار می‌دهیم $\sin x + \cos x = y$. بنابراین:

$$(\sin x + \cos x)^2 = y^2 \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = y^2$$
$$\Rightarrow 1 + \sin 2x = y^2 \Rightarrow \sin 2x = y^2 - 1$$

بنابراین:

$$3\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 5 = 0 \Rightarrow 3\sqrt{2}y + (y^2 - 1) + 5 = 0$$
$$\Rightarrow y^2 + 3\sqrt{2}y + 4 = 0 \,,\ \Delta = 18 - 16 = 2$$
$$\Rightarrow y = \frac{-3\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = -\sqrt{2} \text{ یا } y = -2\sqrt{2}$$

پس $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$ یا $\sin x + \cos x = -2\sqrt{2}$. واضح است که حاصل $\sin x + \cos x$ نمی‌تواند برابر $-2\sqrt{2}$ باشد (چرا؟). بنابراین:

$$\sin x + \cos x = -\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$
$$\xrightarrow{\text{حالت خاص}} x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{3\pi}{4}$$

۲۲۶ ۱ ۲ ۳ **۴**

نکته: برای یافتن جواب‌های اختصاصی معادله در یک بازه، در معادلهٔ کلی به‌دست آمده، به جای k، مقادیر مختلف صحیح را قرار داده و مقادیری از جواب که در بازهٔ مربوطه قرار دارند را به‌دست می‌آوریم.

$$\sin 5x + \sin 4x = 1 + \overset{-1}{\cancel{\cos\pi}} = 0 \Rightarrow \sin 5x = -\sin 4x$$
$$\Rightarrow \sin 5x = \sin(-4x) \Rightarrow \begin{cases} 5x = 2k\pi - 4x \\ 5x = 2k\pi + (\pi - (-4x)) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2k\pi}{9} \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$
$$\xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} \begin{cases} x = 0, \dfrac{2\pi}{9}, \dfrac{4\pi}{9}, \dfrac{6\pi}{9}, \dfrac{8\pi}{9}, \dots, \dfrac{18\pi}{9} \\ x = \pi \end{cases}$$
$$\text{مجموع جواب‌های معادله} = \left(0 + \frac{2\pi}{9} + \dots + \frac{18\pi}{9}\right) + \pi = 11\pi$$

۲۲۷ ۱ ۲ **۳** ۴

نکته: اگر a و b طول دو ضلع و θ زاویهٔ بین این دو ضلع در یک مثلث باشند، آن‌گاه:

$$S=\frac{۱}{۲}ab\sin\theta\ ,\ ۰<\theta<۱۸۰$$

فرض کنیم زاویهٔ بین این دو ضلع θ باشد. پس:

$$S=\frac{۱}{۲}ab\sin\theta \Rightarrow ۳=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۴\sin\theta \Rightarrow \sin\theta=\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{۰<\theta<۱۸۰} \theta=\frac{\pi}{۶}\ ,\theta=\frac{۵\pi}{۶}$$

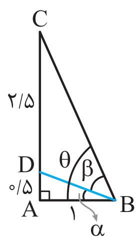
۲۲۸ ۱ **۲** ۳ ۴

$$d=\frac{v^۲}{۵۰}\sin ۲\theta \Rightarrow ۳۶=\frac{۶۰^۲}{۵۰}\sin ۲\theta \Rightarrow \sin ۲\theta=\frac{۳۶\times ۵۰}{۶۰\times ۶۰}=\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{۰\le\theta\le۱۸۰} \begin{cases} ۲\theta=۳۰^\circ \Rightarrow \theta=۱۵^\circ \\ ۲\theta=۱۵۰^\circ \Rightarrow \theta=۷۵^\circ \end{cases}$$

۲۲۹ ۱ ۲ **۳** ۴

فرض کنیم $A\hat{B}D=\alpha$ و $A\hat{B}C=\theta$. بنابراین داریم:



$$\beta=\theta-\alpha$$

از طرفی، با توجه به شکل، می‌توان نوشت:

$$\tan\alpha=\frac{AD}{AB}=۰/۵\ ,\ \tan\theta=\frac{AC}{AB}=۳$$

پس:

$$\beta=\theta-\alpha \Rightarrow \tan\beta=\tan(\theta-\alpha)$$

$$\Rightarrow \tan\beta=\frac{\tan\theta-\tan\alpha}{۱+\tan\theta\tan\alpha}=\frac{۳-۰/۵}{۱+۳\times ۰/۵}=\frac{۲/۵}{۲/۵}=۱$$

$$\Rightarrow \tan\beta=۱ \Rightarrow \beta=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

چون β حاده است، پس تنها $\beta=\frac{\pi}{۴}$ را که به ازای $k=۰$ به‌دست می‌آید، می‌پذیریم.

۲۳۰ ۱ ۲ **۳** ۴

نکته: معادلهٔ $\cos nx=k$ با شرط $k\in(-۱,۱)$، در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، $۲n$ جواب دارد.

$$\sin(\pi\cos x)=-۱ \xrightarrow{\text{حالت خاص}} \pi\cos x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos x=۲k-\frac{۱}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

با توجه به این‌که $-۱\le\cos x\le ۱$، پس معادلهٔ $\cos x=۲k-\frac{۱}{۲}$ تنها به ازای عدد صحیح $k=۰$ برقرار است. بنابراین داریم:

$$\cos x=-\frac{۱}{۲}$$

پس معادلهٔ $\cos x=-\frac{۱}{۲}$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارای $۲\times۱=۲$ جواب است.

۲۳۱ ۱ **۲** ۳ ۴

با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$، داریم:

$$۲\sin x\cos x+\sqrt{۲}\cos x=۰ \Rightarrow \cos x(۲\sin x+\sqrt{۲})=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x=۰ \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z} \xrightarrow{x\in[-\pi,\pi]} x=-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲} \\ ۲\sin x+\sqrt{۲}=۰ \Rightarrow \sin x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin(-\frac{\pi}{۴}) \\ \xrightarrow{x\in[-\pi,\pi]} x=-\frac{\pi}{۴}\ ,\ \frac{-۳\pi}{۴} \end{cases}$$

بنابراین معادله در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ دارای ۴ جواب است.

۲۳۲ ۱ ۲ **۳** ۴

با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos ۲x=\cos^۲x-\sin^۲x$، داریم:

$$\frac{\cos ۲x}{\sin x+\cos x}=\frac{\cos^۲x-\sin^۲x}{\sin x+\cos x}$$

$$=\frac{(\cos x-\sin x)\cancel{(\cos x+\sin x)}}{\cancel{\sin x+\cos x}}=\cos x-\sin x=۱$$

هم‌چنین با توجه به اتحاد مثلثاتی $\sin x-\cos x=\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})$، داریم:

$$\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})=-۱ \Rightarrow \sin(x-\frac{\pi}{۴})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin(-\frac{\pi}{۴})$$

$$\begin{cases} x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi-\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x=۲k\pi \xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]} x=۰,۲\pi \\ x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+(\pi+\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲} \xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]} x=\frac{۳\pi}{۲} \end{cases}$$

پس معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، سه جواب دارد.

۲۳۳ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\cos(\frac{\pi}{۲}-x)=\sin x$$

معادله: $\sin ۲x+\sin x=۰ \Rightarrow \sin \underbrace{۲x}_{u}=-\sin x=\sin(\underbrace{-x}_{\alpha})$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x=۲k\pi-x \\ ۲x=۲k\pi+\pi-(-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳x=۲k\pi \\ x=۲k\pi+\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۲k\pi}{۳} \\ x=۲k\pi+\pi \end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، ۰، $\frac{۲\pi}{۳}$، π، $\frac{۴\pi}{۳}$ و ۲π است. داریم:

$$\text{مجموع جواب‌ها}=۰+\frac{۲\pi}{۳}+\pi+\frac{۴\pi}{۳}+۲\pi=۵\pi$$

۲۳۴ ۱ **[۲]** ۳ ۴

نکته: برای تبدیل کردن سینوس به کسینوس و بالعکس و کتانژانت به تانژانت و بالعکس، از زاویهٔ متمم $\frac{\pi}{۲}-\alpha$ استفاده می‌کنیم.

$$\tan ۲x - \cot(x-\frac{\pi}{۴}) = ۰ \Rightarrow \tan ۲x = \cot(x-\frac{\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow \tan ۲x = \tan(\frac{\pi}{۲} - (x-\frac{\pi}{۴})) \Rightarrow \tan ۲x = \tan(\frac{۳\pi}{۴} - x)$$

$$\Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{۳\pi}{۴} - x \Rightarrow ۳x = k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴}$$

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{۷\pi}{۱۲}$	$\frac{۱۱\pi}{۱۲}$

بنابراین این معادله در بازهٔ $[۰,\pi]$ سه جواب دارد.

۲۳۵ **[۱]** ۲ ۳ ۴

$$۲\sin^۲ x - \cos x - ۱ = ۰ \Rightarrow ۲(۱-\cos^۲ x) - \cos x - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow -۲\cos^۲ x - \cos x + ۱ = ۰$$

$\xrightarrow{b=a+c} \cos x = -۱$ یا $\cos x = -\frac{c}{a} = \frac{۱}{۲}$

$\cos x = -۱ \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = (۲k+۱)\pi$

$$\cos x = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$$

حال جواب‌های واقع در $[\pi,۲\pi]$ را می‌یابیم:

k	۰	۱
x	π	$۲\pi - \frac{\pi}{۳} = \frac{۵\pi}{۳}$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله در بازهٔ $[\pi,۲\pi]$ برابر است با:

$$\pi + \frac{۵\pi}{۳} = \frac{۸\pi}{۳}$$

۲۳۶ **[۱]** ۲ ۳ ۴

نکته: اگر $\alpha \neq ۰$ باشد، جواب کلی به شکل $\frac{k\pi}{n}+\alpha$، در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، $۲n$ جواب و جواب کلی به شکل $\frac{۲k\pi}{n}+\alpha$ در این بازه، n جواب دارد.

می‌دانیم $\sin ۲x = ۲\sin x\cos x$ و $\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱$. پس داریم:

$$\sin x\cos x = \cos^۲ x - \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\times ۲} ۲\sin x \cos x = ۲\cos^۲ x - ۱$$

$$\Rightarrow \sin ۲x = \cos ۲x \xrightarrow{\div \cos ۲x} \tan ۲x = ۱ \Rightarrow \tan ۲x = \tan\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$$

بنابر نکتهٔ فوق، جواب کلی $x = \frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارای $۴ = ۲\times ۲$ جواب است.

۲۳۷ ۱ **[۲]** ۳ ۴

با استفاده از اتحادهای $\cos^۲ x - \sin^۲ x = \cos ۲x$ و $\sin ۲x = ۲\sin x\cos x$، معادله را ساده نموده و آن را حل می‌کنیم:

$$\sin^۳ x\cos x - \cos^۳ x \sin x = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow -\sin x\cos x(\cos^۲ x - \sin^۲ x) = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲}\sin ۲x\cos ۲x = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{\times ۴} -۲\sin ۲x \cos ۲x = ۱$$

$$\Rightarrow -\sin ۲x = ۱ \Rightarrow \sin ۲x = -۱$$

$$\xrightarrow{\text{حالت خاص}} ۲x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow x = k\pi + \frac{۳\pi}{۴}$$

می‌دانیم جواب کلی $\frac{k\pi}{n}+\alpha$ $(\alpha \neq ۰)$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، $۲n$ جواب دارد.

پس در این‌جا جواب کلی $x = k\pi + \frac{۳\pi}{۴}$، دارای $۲ \times ۱ = ۲$ جواب در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ می‌باشد.

۲۳۸ **[۱]** ۲ ۳ ۴

نکته: معادلهٔ $\sin nx = k$ با فرض $k\in(-۱,۱)-\{۰\}$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارای $۲n$ جواب است.

$$۱+\sin x = \cos^۴ x - \sin^۴ x$$

$$\Rightarrow ۱+\sin x = (\cos^۲ x - \sin^۲ x)\underbrace{(\cos^۲ x + \sin^۲ x)}_{۱}$$

$$\Rightarrow ۱+\sin x = ۱ - \sin^۲ x - \sin^۲ x \Rightarrow ۲\sin^۲ x + \sin x = ۰$$

$\Rightarrow \sin x(۲\sin x + ۱) = ۰ \Rightarrow \sin x = ۰$ یا $\sin x = -\frac{۱}{۲}$

$\sin x = ۰ \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi$

$\xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]} x = ۰$ یا $x=\pi$ یا $x = ۲\pi$

$$\sin x = -\frac{۱}{۲}$$

معادلهٔ $\sin x = -\frac{۱}{۲}$ نیز در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، $۲ = ۲\times۱$ جواب دارد. پس این معادله در کل ۵ جواب در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارد.

۲۳۹ ۱ ۲ **[۳]** ۴

$$\sin^۴ x - \cos^۴ x = \underbrace{(\sin^۲ x - \cos^۲ x)}_{-\cos ۲x}\underbrace{(\sin^۲ x+\cos^۲ x)}_{۱} = -\cos ۲x$$

$$\sin ۴x = -\cos ۲x = \sin(\frac{۳\pi}{۲}+۲x) \Rightarrow \begin{cases} ۴x = ۲k\pi + (\frac{۳\pi}{۲}+۲x) \\ ۴x = ۲k\pi + \pi - (\frac{۳\pi}{۲}+۲x)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \\ x = \frac{k\pi}{۳} - \frac{\pi}{۱۲} = \frac{۴k\pi - \pi}{۱۲}\end{cases}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در $[۰,\pi]$: $\begin{cases} x = \frac{۳\pi}{۴} \\ x = \frac{\pi}{۴}, \frac{۷\pi}{۱۲}, \frac{۱۱\pi}{۱۲}\end{cases}$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر $\frac{۳\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴}+\frac{۷\pi}{۱۲}+\frac{۱۱\pi}{۱۲} = \frac{۵\pi}{۲}$ است.

۲۴۰ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\cos(x-\frac{3\pi}{8})=\cos(\frac{3\pi}{8}-x)$$

$x+\frac{\pi}{8}$ و $\frac{3\pi}{8}-x$ متمم یکدیگرند، بنابراین:

$$\cos(\frac{3\pi}{8}-x)=\sin(x+\frac{\pi}{8})$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{8})+\cos(\frac{3\pi}{8}-x)=1\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{8})+\sin(x+\frac{\pi}{8})=1$$

$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{8})=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{8}=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ x+\frac{\pi}{8}=2k\pi+(\pi-\frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{24} \xrightarrow{x\in[0,2\pi]} x=\frac{\pi}{24} \\ x=2k\pi+\frac{17\pi}{24} \xrightarrow{x\in[0,2\pi]} x=\frac{17\pi}{24} \end{cases}$$

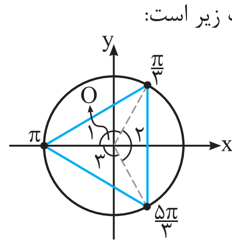
بنابراین مجموع جواب‌ها برابر $\frac{\pi}{24}+\frac{17\pi}{24}=\frac{18\pi}{24}=\frac{3\pi}{4}$ می‌باشد.

۲۴۱ **۱** ۲ ۳ ۴

$$2\cos^2 x+\cos x-1=0\xrightarrow{A=\cos x}2A^2+A-1=0$$

$$\Rightarrow A=-1, A=\frac{1}{2}\Rightarrow \begin{cases} \cos x=-1\Rightarrow x=\pi \\ \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}, 2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

جواب‌های معادله بر روی دایرهٔ مثلثاتی به‌صورت زیر است:



مثلث متساوی‌الاضلاع است. $\Rightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_2=\hat{O}_3=120^\circ$

۲۴۲ ۱ ۲ **۳** ۴

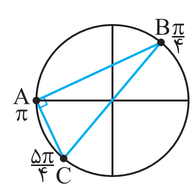
$$\sin x\cos x=(1-\cos x)(1+\cos x)=\underbrace{1-\cos^2 x}_{\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow \sin x\cos x-\sin^2 x=0\Rightarrow \sin x(\cos x-\sin x)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x=0\Rightarrow x=0,\pi,2\pi \\ \cos x-\sin x=0\Rightarrow \cos x=\sin x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{1-\cos x\neq 0} x=\pi \\ \xrightarrow{\div \cos x} \tan x=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

نقاط را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم:



مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است، زیرا زاویهٔ محاطی و روبه‌روی قطر BC از دایره است: $\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{2}=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$

۲۴۳ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$2\sin^2(x-\frac{\pi}{8})+3\cos(x-\frac{5\pi}{8})=5$$

$$\Rightarrow 2\sin^2(x-\frac{\pi}{8})+3\cos((x-\frac{\pi}{8})-\frac{\pi}{2})-5=0$$

می‌دانیم $\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$. بنابراین:

$$2\sin^2(x-\frac{\pi}{8})+3\sin(x-\frac{\pi}{8})-5=0$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}}\sin(x-\frac{\pi}{8})=1 \text{ یا } \sin(x-\frac{\pi}{8})=\frac{c}{a}=-\frac{5}{2}$$

واضح است که $\sin(x-\frac{\pi}{8})=-\frac{5}{2}$ غیرممکن است. پس:

$$\sin(x-\frac{\pi}{8})=1\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x-\frac{\pi}{8}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{5\pi}{8}$$

k	۰
x	$\frac{5\pi}{8}$

$x=\frac{5\pi}{8}$ تنها جواب معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ است.

۲۴۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

از رابطهٔ $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$8\sin^2 x+k\sin 2x=1$$

$$\xrightarrow{\div\cos^2 x}8\tan^2 x+\frac{2k\sin x\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow 8\tan^2 x+2k\tan x=1+\tan^2 x\Rightarrow 7\tan^2 x+2k\tan x-1=0$$

فرض کنیم x_1 و x_2 جواب‌های متمایز این معادله در بازهٔ $[0,\pi]$ باشد. در این‌صورت $\tan x_1$ و $\tan x_2$ جواب‌های متمایز معادلهٔ اخیر خواهد بود.

پس $\tan x_1+\tan x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{2k}{7}$ و $\tan x_1\tan x_2=\frac{c}{a}=-\frac{1}{7}$.

داریم:

$$x_1+x_2=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow \tan(x_1+x_2)=\tan\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x_1+\tan x_2}{1-\tan x_1\tan x_2}=-1\Rightarrow \frac{-\frac{2k}{7}}{1-(-\frac{1}{7})}=-1\Rightarrow -\frac{2k}{8}=-1$$

$$\Rightarrow 2k=8\Rightarrow k=4$$