درس دوم: معادلات درجه دوم

روابط بین ضرایب در ریشه‌های معادله درجه دوم

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، آنگاه مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله عبارت است از:

$$\alpha+\beta=S=-\frac{b}{a} \qquad \alpha\cdot\beta=P=\frac{c}{a}$$

مثلاً در معادلهٔ $۲x^۲+۵x-۳=۰$ داریم:

$$S=-\frac{۵}{۲} \qquad P=-\frac{۳}{۲}$$

مثال اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۵x-۱=۰$ باشند، مقدار عددی عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}$ ب) $\alpha^۲+\beta^۲$ ج) $\alpha^۳+\beta^۳$ د) $|\alpha-\beta|$

پاسخ ابتدا S و P را به‌دست می‌آوریم:

$$S=-\frac{۵}{۱}=-۵ \quad ; \quad P=-\frac{۱}{۱}=-۱$$

سپس باید هر عبارت را برحسب S و P، به‌صورت زیر بنویسیم:

الف) $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}=\frac{-۵}{-۱}=۵$

ب) $\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\cdot\beta=S^۲-۲P=(-۵)^۲-۲(-۱)=۲۵+۲=۲۷$

ج) $\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^۳-۳PS=(-۵)^۳-۳(-۱)(-۵)=-۱۲۵-۱۵=-۱۴۰$

د) $A=|\alpha-\beta|\xrightarrow[\text{می‌رسانیم ۲}]{\text{طرفین را به توان}}A^۲=\alpha^۲+\beta^۲-۲\alpha\beta=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta-۲\alpha\beta=(\alpha+\beta)^۲-۴\alpha\beta\Rightarrow$

$A^۲=S^۲-۴P=(-۵)^۲-۴(-۱)=۲۵+۴=۲۹\Rightarrow A=|\alpha-\beta|=\sqrt{۲۹}$

مثال در معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲+kx+۹=۰$ یک ریشه دو برابر ریشهٔ دیگر است. مجموع دو ریشهٔ مثبت کدام است؟

پاسخ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ فوق باشند، طبق فرض داریم:

$\alpha=۲\beta\longrightarrow\alpha^۲=۲\alpha\beta\xrightarrow{\alpha\beta=P=\frac{۹}{۲}}\alpha^۲=۲\left(\frac{۹}{۲}\right)=۹\Rightarrow\alpha=\pm۳\Rightarrow\alpha=+۳$ قابل قبول $\Rightarrow\beta=\frac{\alpha}{۲}=\frac{۳}{۲}$

$\Rightarrow$ مجموع دو ریشهٔ مثبت $=۳+\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۲}$

مثال اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۲x-۲=۰$ باشند، حاصل عبارت $(\alpha^۳+۲\alpha^۲-\beta)(\beta^۳+۲\beta^۲-\alpha)$ را به‌دست آورید.

پاسخ چون α و β ریشه‌های معادله‌اند پس در معادله صدق می‌کنند. یعنی:

$\alpha^۲+۲\alpha-۲=۰\Rightarrow\alpha^۲+۲\alpha=۲\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم } \alpha]{\text{طرفین معادله را در}}\alpha^۳+۲\alpha^۲=۲\alpha$

و

$\beta^۲+۲\beta-۲=۰\Rightarrow\beta^۲+۲\beta=۲\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم } \beta]{\text{طرفین معادله را در}}\beta^۳+۲\beta^۲=۲\beta$

$\Rightarrow(\alpha^۳+۲\alpha^۲-\beta)(\beta^۳+۲\beta^۲-\alpha)=(۲\alpha-\beta)(۲\beta-\alpha)=۴\alpha\beta-۲\alpha^۲-۲\beta^۲+\alpha\beta=۵\alpha\beta-۲(\alpha^۲+\beta^۲)=۵P-۲(S^۲-۲P)$

$$\xrightarrow[P=\frac{c}{a}=-۲]{S=-\frac{b}{a}=-۲}۵(-۲)-۲(۴+۴)=-۱۰-۱۶=-۲۶$$

۵۱. در معادلهٔ $x^2+px+q=0$، که در آن p و q عددهای مثبت‌اند، اگر تفاضل ریشه‌ها ۱ باشد، آنگاه p برابر است با:

۱) $\sqrt{4q+1}$ ۲) $q-1$ ۳) $\sqrt{4q-1}$ ۴) $q+1$

۵۲. مهم اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-mx+8=0$ باشند و اعداد ۶، $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ تشکیل یک دنبالهٔ حسابی بدهند، آنگاه مقدار m کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۳. مهم α و β ریشه‌های $2x^2+px+8=0$ هستند. $\sqrt{\alpha}$ و $\sqrt{\beta}$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2-4x+q=0$ هستند. حاصل $p+q$ کدام است؟

۱) -18 ۲) -20 ۳) -22 ۴) -24

۵۴. مهم ریشه‌های معادلهٔ $x^2+mx-4=0$ اعدادی صحیح هستند. مقدار m کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) -3 ۳) ۰ ۴) -2

۵۵. به ازای کدام مقدار m، نسبت ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-10x+m=0$ برابر ۴ است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) -4 ۴) -8

۵۶. در معادلهٔ $x^2-8x+m=0$ یک ریشه از نصف ریشهٔ دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟ *(سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۹۱)*

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۵۷. α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ هستند و رابطهٔ $\alpha+\beta=\alpha^2\beta^2$ برقرار است. کدام گزینه درست است؟

۱) $b^2+ac=0$ ۲) $c+ab=0$ ۳) $c^2-ab=0$ ۴) $c^2+ab=0$

۵۸. α و β ریشه‌های معادلهٔ $(m+2)x^2+2nx+9m+3n=0$ هستند. به ازای کدام مقدار n، اعداد α، ۳ و β تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۵۹. اگر $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-(m+4)x+m=0$ باشند، آنگاه حاصل $\tan\alpha+\cot\alpha$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۰. α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2-4x+7=0$ هستند. حاصل $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{2}{7}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۶۱. مهم معادلهٔ $2x^2-(m+1)x+m=0$ با ریشه‌های α و β مفروض است. اگر $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=5$، آنگاه مقدار m کدام است؟

۱) -5 ۲) ۴ ۳) -6 ۴) ۷

۶۲. مهم به ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $2x^2-mx+m-1=0$ برابر ۴ است؟ *(سنجش ریاضی ـ ۹۳)*

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۶ ۴) -6

۶۳. اگر α و β جواب‌های معادلهٔ x^2-7x+1 باشند، حاصل $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{7}$ ۲) ۷ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۳

۶۴. معادلهٔ $x^2+4x-1=0$ با ریشه‌های α و β مفروض است. حاصل $\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ کدام است؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۴۲۰

۶۵. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x-5=0$ باشند، حاصل $\alpha^2+3\beta$ کدام است؟

۱) -4 ۲) ۴ ۳) -14 ۴) ۱۴

۶۶. اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۴x-۷=۰$ باشند، آنگاه مقدار $x_۱^۲+۵x_۱+x_۲$ کدام است؟

۱) ۱ ‏ ۲) ۲ ‏ ۳) ۳ ‏ ۴) ۴

۶۷. اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲+۲x-۷=۰$ باشند، حاصل $\sqrt{x_۱^۲(۷-۲x_۲)}$ کدام است؟

۱) ۳ ‏ ۲) ۵ ‏ ۳) ۷ ‏ ۴) ۹

۶۸. دشوار اگر β و α ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۲x-۴=۰$ باشد، حاصل $\alpha^۳-۲\beta^۲+۴\beta$ کدام است؟ (سنجش ریاضی ـ ۹۴)

۱) ۰ ‏ ۲) ۸- ‏ ۳) ۱۶ ‏ ۴) ۳۲-

۶۹. دشوار اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۳x-۹=۰$ باشند، حاصل $\frac{\alpha^۲}{(\beta+۳)^۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ‏ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ‏ ۳) ۱ ‏ ۴) ۴

۷۰. ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+bx+c=۰$ از دو برابر ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۲x-۶=۰$ یک واحد بیشتر است. $b+c$ کدام است؟

۱) ۹- ‏ ۲) ۱۶- ‏ ۳) ۲۵- ‏ ۴) ۳۶-

۷۱. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x(۵x+۳)=۲$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادلهٔ $۴x^۲-kx+۲۵=۰$ به‌صورت $\left\{\frac{۱}{\alpha^۲},\frac{۱}{\beta^۲}\right\}$ است؟ (سراسری ریاضی ـ ۹۰)

۱) ۲۷ ‏ ۲) ۲۸ ‏ ۳) ۲۹ ‏ ۴) ۳۱

نوشتن معادله درجه ۲ با داشتن S و P

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دومی باشند، در این صورت با تشکیل $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\cdot\beta$ می‌توانیم این معادلهٔ درجه دوم را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$x^۲-Sx+P=۰$$

مثال معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $(۲-\sqrt{۵})^۳$ و $(۲+\sqrt{۵})^۳$ باشد.

پاسخ

$$S=(۲-\sqrt{۵})^۳+(۲+\sqrt{۵})^۳=۸-۱۲\sqrt{۵}+۳۰-۵\sqrt{۵}+۸+۱۲\sqrt{۵}+۳۰+۵\sqrt{۵}=۷۶$$

$$P=(۲-\sqrt{۵})^۳\cdot(۲+\sqrt{۵})^۳=\left((۲-\sqrt{۵})(۲+\sqrt{۵})\right)^۳=(۴-۵)^۳=-۱$$

پس معادلهٔ درجه دوم خواسته شده عبارت است از:

$$x^۲-۷۶x-۱=۰$$

مثال معادلهٔ درجهٔ دومی با ضرایب گویا بنویسید که یکی از ریشه‌های آن $\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}$ باشد.

پاسخ راه حل اول:

$$x=\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}=\sqrt{(۱+\sqrt{۳})^۲}=\left|۱+\sqrt{۳}\right|=۱+\sqrt{۳}\Rightarrow x-۱=\sqrt{۳}\Rightarrow(x-۱)^۲=۳\Rightarrow x^۲-۲x+۱=۳\Rightarrow x^۲-۲x-۲=۰$$

$$\alpha=\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}=\sqrt{(۱+\sqrt{۳})^۲}=\left|۱+\sqrt{۳}\right|=۱+\sqrt{۳}$$

راه حل دوم: اگر یکی از ریشه های معادلهٔ درجه دوم با ضرایب گویا $m+\sqrt{n}$ باشد، حتماً ریشهٔ دیگر $m-\sqrt{n}$ است. پس در این سؤال ریشهٔ دیگر یعنی β برابر $۱-\sqrt{۳}$ است و داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=۱+\sqrt{۳}\\ \beta=۱-\sqrt{۳}\end{array}\right\}\Rightarrow S=۲\ ,\ P=(۱+\sqrt{۳})(۱-\sqrt{۳})=۱-۳=-۲$$

پس معادلهٔ درجه دوم عبارت است از:

$$x^۲-۲x-۲=۰$$

تشکیل معادله درجه دوم جدید

هرگاه معادلهٔ درجه دومی داشته باشیم و معادلهٔ درجه دوم دیگری بخواهیم که ریشه‌هایش رابطه‌ای با ریشه‌های معادلهٔ اول داشته باشد، باید با تشکیل S و P معادلهٔ جدید برحسب S و P معادلهٔ اول، معادلهٔ دوم خواسته شده را از فرمول $x^2 - Sx + P = 0$ بنویسیم.

مثال معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش ۹ برابر ریشه های معادلهٔ $x^2 - x - 3 = 0$ باشد.

پاسخ اگر α و β ریشه های معادلهٔ $x^2 - x - 3 = 0$ باشد و α' و β' ریشه‌های معادلهٔ مورد نظر باشد داریم:

$$\begin{array}{l}\alpha' = 9\alpha \\ \beta' = 9\beta\end{array} \Rightarrow \begin{cases} S' = \alpha' + \beta' = 9\alpha + 9\beta = 9(\alpha+\beta) \xlongequal{\alpha+\beta=S=1} 9(1) = 9 \\ P' = \alpha' \cdot \beta' = 9\alpha \cdot 9\beta = 81(\alpha\beta) \xlongequal{\alpha\beta=P=-3} 81(-3) = -243 \end{cases}$$

با توجه به اینکه $S' = 9$ و $P' = -243$، معادلهٔ جدید به‌صورت $x^2 - 9x - 243 = 0$ است.

مثال معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش مجذور ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشد.

پاسخ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 4x + 1 = 0$ و α' و β' ریشه‌های معادلهٔ مورد نظر باشد، داریم:

$$\begin{array}{l}\alpha' = \alpha^2 \\ \beta' = \beta^2\end{array} \Rightarrow \begin{cases} S' = \alpha' + \beta' = \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P \xlongequal[P=1]{S=4} 16 - 2 = 14 \\ P' = \alpha' \cdot \beta' = \alpha^2 \cdot \beta^2 = (\alpha \cdot \beta)^2 = P^2 = (1)^2 = 1 \end{cases}$$

با داشتن $S' = 14$ و $P' = 1$، معادلهٔ درجه دوم جدید به‌صورت $x^2 - 14x + 1 = 0$ است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۷۲. **مهم** مستطیلی به محیط ۳۰ و مساحت ۵۴ مفروض است. نسبت طول به عرض این مستطیل کدام است؟ *(کتاب درسی)*

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳

۷۳. می‌دانیم α، ۱۶ و β تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند. همچنین α، ۱۰ و β تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهند. α و β ریشه‌های کدام معادله هستند؟

۱) $x^2 - 16x + 10 = 0$ ۲) $x^2 - 32x + 10 = 0$ ۳) $x^2 - 16x + 100 = 0$ ۴) $x^2 - 32x + 100 = 0$

۷۴. **مهم** اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2 - 3x = 1$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادلهٔ $8x^2 + kx - 1 = 0$ به‌صورت $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$ است؟ *(سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۹۰)*

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

۷۵. **مهم** $2 - \sqrt{5}$ و $2 + \sqrt{5}$ ریشه‌های کدام‌یک از معادله‌های درجه دوم زیر هستند؟ *(کتاب درسی)*

۱) $x^2 + 4x + 1 = 0$ ۲) $x^2 - 4x + 1 = 0$ ۳) $x^2 + 4x - 1 = 0$ ۴) $x^2 - 4x - 1 = 0$

۷۶. **دشوار** $(3 - \sqrt{5})^3$ و $(3 + \sqrt{5})^3$ ریشه‌های کدام‌یک از معادله‌های درجه دوم زیر هستند؟

۱) $x^2 - 216x + 72 = 0$ ۲) $x^2 - 144x + 64 = 0$ ۳) $x^2 - 72x + 216 = 0$ ۴) $x^2 - 64x + 144 = 0$

۷۷. ریشه‌های کدام معادله از مربع ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + 3x + 1 = 0$ یک واحد بیشتر است؟ *(سنجش ریاضی ـ ۹۴)*

۱) $x^2 - 9x + 9 = 0$ ۲) $x^2 + 9x + 9 = 0$ ۳) $x^2 - 5x - 5 = 0$ ۴) $x^2 + 5x - 5 = 0$

۷۸. **مهم** اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 6x + 2 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به‌صورت $\left\{\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}\right\}$ است؟

۱) $2x^2 - 18x + 9 = 0$ ۲) $2x^2 - 18x - 9 = 0$ ۳) $2x^2 + 18x + 9 = 0$ ۴) $2x^2 + 18x - 9 = 0$

۷۹. اگر β و α ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-3x-4=0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به‌صورت $\left\{\frac{1}{\alpha}+1, \frac{1}{\beta}+1\right\}$ است؟

(سراسری ریاضی ـ ۹۲)

۱) $4x^2-5x+1=0$ ۲) $4x^2-3x+1=0$ ۳) $4x^2-5x-1=0$ ۴) $4x^2-3x-1=0$

۸۰. نکته‌دار ریشه‌های معادلهٔ $3x^2+ax+b=0$ دو واحد بیشتر از ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x-1=0$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۸۱. نکته‌دار جواب‌های معادلهٔ $2x^2+5x+1=0$ معکوس جواب‌های معادلهٔ $ax^2+bx+4=0$ است. حاصل ab کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

صفرهای تابع درجه ۲

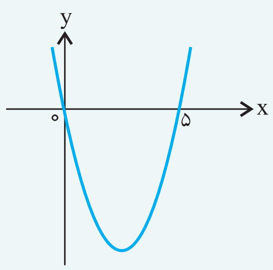
برای تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$، جواب‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع می‌گویند.

اگر نمودار تابع درجه ۲ که یک سهمی است را رسم کنیم، صفرهای تابع طول‌های نقاط تلاقی نمودار با محور xها است.

مثال صفرهای تابع $f(x)=x^2-5x$ را به‌دست آورید.

پاسخ

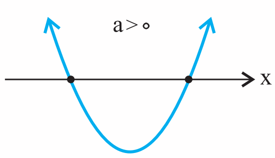
$$x^2-5x=0 \Rightarrow x(x-5)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=5$$

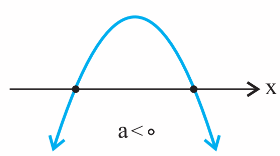


تعیین تعداد صفرهای تابع درجه ۲ به کمک علامت Δ

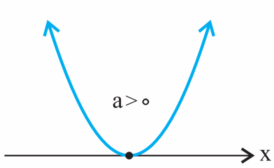
در تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ داریم:

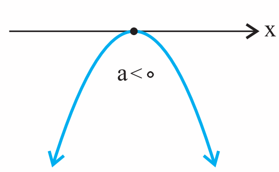
اگر $\Delta>0$ باشد، معادلهٔ $f(x)=0$ دو ریشه دارد و سهمی محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند.



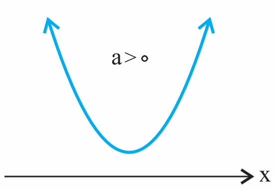


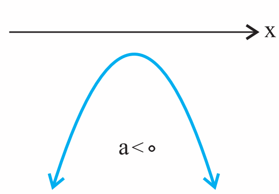
اگر $\Delta=0$ باشد، معادلهٔ $f(x)=0$ ریشهٔ مضاعف دارد و سهمی در یک نقطه بر محور xها مماس است.





اگر $\Delta<0$ باشد، معادلهٔ $f(x)=0$ ریشه ندارد و سهمی محور xها را قطع نمی‌کند.



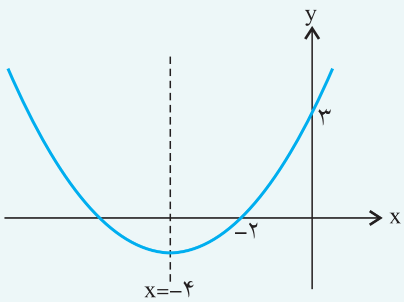


تعیین معادله سهمی به کمک صفرهای تابع درجه ۲

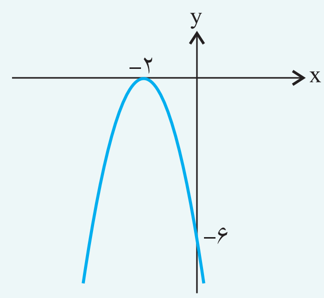
اگر نمودار سهمی محور xها را در ۲ نقطه به طول‌های $x_۱$ و $x_۲$ قطع کرده باشد ($x_۱$ و $x_۲$ صفرهای تابع‌اند)، در این صورت معادلهٔ سهمی را می‌توان به‌صورت $f(x)=a(x-x_۱)(x-x_۲)$ نوشت و اگر نمودار سهمی محور xها را در یک نقطه به طول $x_۱$ قطع کرده باشد ($x_۱$ صفر تابع است)، در این صورت معادلهٔ سهمی را به‌صورت $f(x)=a(x-x_۱)^۲$ می‌توان نوشت که در هر حالت با داشتن مختصات یک نقطهٔ دیگر از سهمی و صدق دادن در معادلات فوق، به راحتی می‌توانیم a را به‌دست آوریم و معادلهٔ سهمی را بنویسیم.

مثال معادلهٔ هریک از سهمی‌های زیر را بنویسید.

الف



ب



پاسخ

الف چون $x=-۴$ محور تقارن تابع است، پس نقطهٔ برخورد دیگر سهمی با محور xها نقطهٔ $x=-۶$ است. یعنی صفرهای تابع -۲ و -۶ است و داریم:

$$f(x)=a(x+۲)(x+۶)$$

چون نمودار محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کرده پس $f(۰)=۳$. یعنی:

$$۳=a(۰+۲)(۰+۶)\Rightarrow ۱۲a=۳\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

در نتیجه معادلهٔ سهمی به صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{۱}{۴}(x+۲)(x+۶)\Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۴}x^۲+۲x+۳$$

ب نمودار سهمی محور xها را فقط در نقطهٔ $x=-۲$ قطع کرده، پس فقط تابع یک صفر دارد و داریم:

$$f(x)=a(x+۲)^۲$$

چون نمودار محور yها را در نقطه‌ای به عرض -۶ قطع کرده، پس $f(۰)=-۶$. یعنی:

$$-۶=a(۰+۲)^۲\Rightarrow a=\frac{-۶}{۴}=-\frac{۳}{۲}$$

در نتیجه معادلهٔ سهمی عبارت است از:

$$f(x)=-\frac{۳}{۲}(x+۲)^۲\Rightarrow f(x)=-\frac{۳}{۲}x^۲-۶x-۶$$

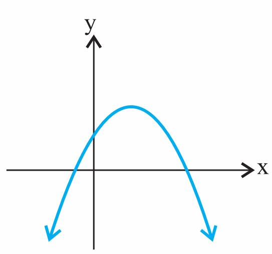
تذکر در تابع درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$، علامت a و b و c را می‌توان با توجه به نمودار تابع، به صورت زیر تعیین کرد:

۱) علامت a را با توجه به ماکزیمم و یا مینیمم داشتن تابع تعیین می‌کنیم.

۲) علامت b را با توجه به علامت طول رأس سهمی یعنی $x=-\frac{b}{۲a}$ مشخص می‌کنیم.

۳) علامت c را با توجه به محل برخورد نمودار با محور yها به‌دست می‌آوریم، چون محل برخورد نمودار تابع با محور yها برابر $f(۰)=c$ است.

مثلاً اگر نمودار تابع درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$ به‌صورت مقابل باشد:

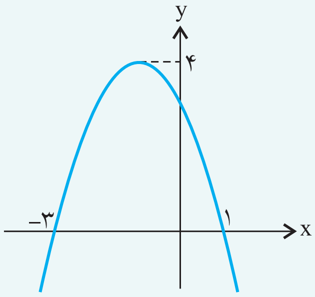


اولاً $a<۰$ است، چون سهمی ماکزیمم دارد.

ثانیاً چون رأس سهمی در ناحیهٔ اول است، پس $x=-\frac{b}{۲a}>۰$ و با توجه به اینکه $a<۰$ است، باید $b>۰$ باشد.

ثالثاً نمودار تابع محور yها را در قسمت مثبت‌ها قطع کرده، پس $c>۰$ است.

مثال اگر نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ به شکل مقابل باشد، مقدار $a+b$ را بیابید.



پاسخ چون نمودار تابع محور xها را در نقاط $x=۱$ و $x=-۳$ قطع کرده، پس صفرهای تـابع ۱ و ۳− اسـت و ضـابطهٔ آن را مـی‌تـوانیم به‌صورت $f(x)=a(x-۱)(x+۳)$ بنویسیم.

از طرفی چون نقاط برخورد نمودار با محور xها نسبت به محور تقارن تابع متقارن هستند لذا طول رأس سهمی به‌صـورت $x=\frac{-۳+۱}{۲}=-۱$ است و با توجه به عرض رأس سهمی که در شکل داده شده مختصات رأس سهمی $A(-۱,۴)$ است که در معادلهٔ تابع صدق می کند. یعنی:

$$۴=a(-۱-۱)(-۱+۳)\Rightarrow ۴=-۴a\Rightarrow a=-۱$$

پس تابع به‌صورت زیر است:

$$f(x)=-۱(x-۱)(x+۳)\Rightarrow f(x)=-x^{۲}-۲x+۳\Rightarrow b=-۲$$

$$\Rightarrow a+b=-۱+(-۲)=-۳$$

علامت صفرهای تابع درجه ۲

برای تعیین علامت صفرهای تابع درجه ۲ (در صورت وجود) که همان علامت ریشه‌های معادلهٔ $ax^{۲}+bx+c=۰$ است، می‌تـوانیم از علامت S و P به‌صورت زیر کمک بگیریم:

اگر
- $P=\frac{c}{a}<۰\Rightarrow$ سهمی ۲ ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد (توجه: در این حالت همواره $\Delta>۰$ است.)
- $P=\frac{c}{a}>۰\,,\Delta>۰\Rightarrow$ سهمی ۲ ریشهٔ هم‌علامت دارد
  - اگر $S=-\frac{b}{a}>۰\Rightarrow$ ۲ ریشهٔ مثبت
  - اگر $S=-\frac{b}{a}<۰\Rightarrow$ ۲ ریشهٔ منفی

مثال تعداد و علامت صفرهای هریک از توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $f(x)=۵x^{۲}-۳x-۱$

ب) $f(x)=۲x^{۲}-۳x+۱$

پاسخ

الف) $f(x)=۰\Rightarrow ۵x^{۲}-۳x-۱=۰$

$\Delta=۹-۴(۵)(-۱)=۲۹>۰\rightarrow$ سهمی ۲ ریشهٔ متمایز دارد

$P=\frac{c}{a}=-\frac{۱}{۵}<۰\rightarrow$ ۲ ریشهٔ مختلف‌العلامت‌اند

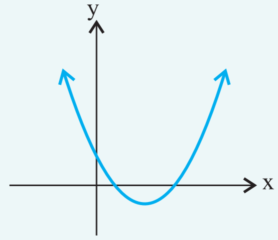
ب) $f(x)=۰\Rightarrow ۲x^{۲}-۳x+۱=۰$

$\Delta=۹-۴(۲)(۱)=۱>۰\rightarrow$ سهمی ۲ ریشهٔ متمایز دارد

$P=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}>۰\rightarrow$ ریشه‌ها هم‌علامت‌اند

$S=-\frac{b}{a}=-\frac{-۳}{۲}=\frac{۳}{۲}>۰\rightarrow$ هر دو ریشه مثبت‌اند

مثال اگر نمودار سهمی به معادلهٔ $f(x)=2x^2-4x+m-3$ مطابق شکل مقابل باشد، حدود تغییرات m را به‌دست آورید.



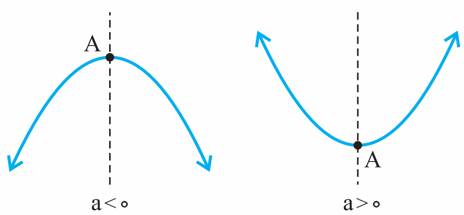
پاسخ مطابق شکل، سهمی محور xها را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع کرده است، پس معادلهٔ $2x^2-4x+m-3=0$ باید دو ریشهٔ مثبت داشته باشد. یعنی باید:

$$\begin{cases} \Delta>0 \Rightarrow 16-4(2)(m-3)>0 \Rightarrow m<5 & \boxed{1} \\ \text{و} \\ P=\frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{m-3}{2}>0 \Rightarrow m-3>0 \Rightarrow m>3 & \boxed{2} \\ \text{و} \\ S=-\frac{b}{a}>0 \Rightarrow \frac{4}{2}>0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است} & \boxed{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{1}\cap\boxed{2}\cap\boxed{3} \Rightarrow 3<m<5$$

ماکزیمم یا مینیمم سهمی

نمودار تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ یک سهمی است، به یکی از دو صورت زیر:



- نقطهٔ A را رأس سهمی می‌گویند.
- طول رأس سهمی $x=-\frac{b}{2a}$ است.
- اگر $a>0$ باشد، سهمی رو به بالا و به ازای $x=-\frac{b}{2a}$ سهمی مینیمم مقدار خود را اختیار می‌کند.
- اگر $a<0$ باشد، سهمی رو به پایین و به ازای $x=-\frac{b}{2a}$ سهمی ماکزیمم مقدار خود را اختیار می‌کند.

مثال بیشترین مقدار (ماکزیمم) تابع $f(x)=-x^2+4x-3$ را بیابید.

پاسخ

$$x=-\frac{b}{2a}=\frac{-4}{-2}=2 \Rightarrow f(2)=-4+8-3=1$$

نکته
۱ مختصات رأس سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ به‌صورت $A\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ است.
۲ سهمی دارای یک خط محور تقارن به معادلهٔ $x=-\frac{b}{2a}$ است.

مثال نمودار تابع به معادلهٔ $f(x)=mx^2+4x+m$ مینیممی به عرض -3 دارد، در این صورت تابع با کدام عرض محور yها را قطع می‌کند؟

پاسخ

$$y_A=-3 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a}=-3 \Rightarrow \frac{-(16-4m^2)}{4m}=-3 \Rightarrow 4m^2-16=-12m \Rightarrow 4m^2+12m-16=0 \Rightarrow$$

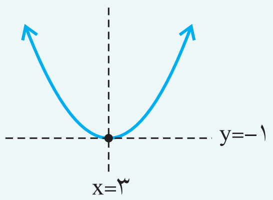
$m^2+3m-4=0 \Rightarrow m=-4$ یا $m=1$

چون تابع مینیمم دارد، باید $a>0$ باشد، پس $m=-4$ غیرقابل قبول است و فقط $m=1$ قابل قبول است و داریم:

$$f(x)=x^2+4x+1 \xrightarrow[\text{برخورد با محور }y\text{ها}]{x=0} f(0)=1$$

مثال **خط به معادلهٔ $y=-۱$ محور تقارن تابع با ضابطهٔ $y=\frac{۱}{۳}x^۲-۲x+a$ را بر روی خود منحنی قطع می‌کند. مقدار a را بیابید.**

پاسخ



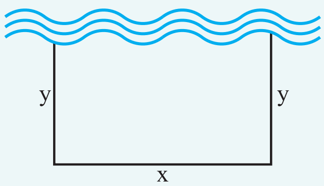
$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۲}{\frac{۲}{۳}}=۳ \text{ : محور تقارن}$$

مطابق شکل چون محور تقارن خط $y=-۱$ را روی منحنی قطع می کند، در واقع مختصات رأس سهمی به‌صورت $A(۳,-۱)$ است، پس:

$$y=\frac{۱}{۳}x^۲-۲x+a \xrightarrow{(۳,-۱)} -۱=\frac{۱}{۳}(۹)-۶+a \Rightarrow a=۲$$

مثال **بیشترین مساحت زمینی مستطیل‌شکل را که می‌توان توسط یک طناب از زمینی کـه یـک طـرف آن رودخانـه اسـت محصور نمود، ۶۴۸ متر مربع است. طول طناب چند متر است؟**

پاسخ چون یک طرف زمین مستطیل‌شکل رودخانه است (مطابق شکل) پس طناب مورد استفاده فقط سه طرف زمین مستطیل‌شکل را پوشش می دهد و داریم:



$L=۲y+x$ طول طناب

از طرفی خود مسئلـه بیشتـرین مسـاحت را تعیین کرده که می‌توان با استفـاده از آن طول طنـاب را به‌دست آورد:

$$S=xy \xrightarrow{x=L-۲y} S=(L-۲y)y=Ly-۲y^۲=-۲y^۲+Ly \text{ مساحت}$$

با توجه به اینکه معادله یک سهمی است، بیشترین مقدار S به ازای $y=\frac{-L}{-۴}=\frac{L}{۴}$ به‌دست می‌آید، پس:

$$S_{max}=-۲\left(\frac{L}{۴}\right)^۲+L\left(\frac{L}{۴}\right)=-\frac{L^۲}{۸}+\frac{L^۲}{۴}=\frac{L^۲}{۸}=۶۴۸ \Rightarrow L^۲=۸\times۶۴۸=۱۶\times۳۲۴ \Rightarrow L=۴\times۱۸=۷۲$$

پس طول طناب ۷۲ متر است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۸۲. **به ازای کدام مجموعه مقادیر m، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=mx^۲-۴x+m-۳$ محور x ها را در دو نقطهٔ متمایز قطع می‌کند؟**

۱) $(-۳,۲)$ ۲) $(-۱,۴)$ ۳) $(۰,۶)$ ۴) $(-۳,۳)$

۸۳. مهم **به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(m-۲)x^۲-۳x+m+۲$ بالای محور x ها و مماس بر آن است؟**

۱) -۳ ۲) $-\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

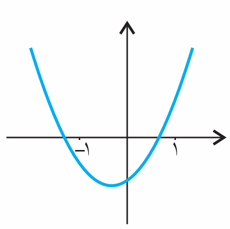
۸۴. **به ازای چند مقدار m، نمودار تابع $f(x)=\left(۳-\frac{x}{m}\right)(mx-۱)$ مماس بر محور x ها است؟** *(سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۹۲)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

۸۵. مهم **یـک موشـک بـا سـرعت اولیـهٔ ۱۶۰ متـر بـر ثانیـه از زمـین پرتـاب مـی‌شـود. ارتفـاع آن (h) در زمـان t از رابطـهٔ $h(t)=-۵t^۲+۱۶۰t$ به‌دست می‌آید. در ثانیه‌های چندم ارتفاع موشک از سطح زمین ۵۶۰ متر است؟ ارتفاع مـاکزیمم موشـک کـدام است؟** *(کتاب درسی)*

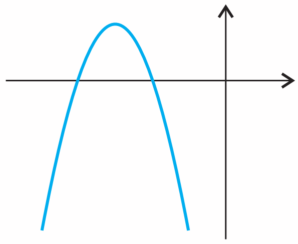
۱) ثانیه‌های ۶ و ۲۶، ارتفاع ۲۵۶۰ متر
۲) ثانیه‌های ۴ و ۲۸، ارتفاع ۱۲۸۰ متر
۳) ثانیه‌های ۶ و ۲۶، ارتفاع ۱۲۸۰ متر
۴) ثانیه‌های ۴ و ۲۸، ارتفاع ۲۵۶۰ متر

۸۶. مهم **نمودار تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ به شکل مقابل است. کدام گزینه درست است؟**



۱) $a+b+c>۰$ و $a-b+c>۰$
۲) $a+b+c>۰$ و $a-b+c<۰$
۳) $a+b+c<۰$ و $a-b+c>۰$
۴) $a+b+c<۰$ و $a-b+c<۰$

۸۷. سهمی به معادلهٔ $f(x)=ax^2+bx+c$ به شکل مقابل است. کدام گزینه درست است؟



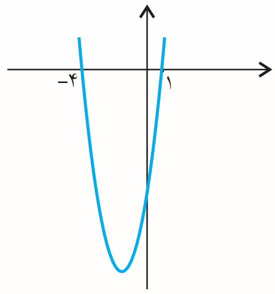
۱) $ab<0$

۲) $bc<0$

۳) $ab>0$

۴) $ab\leq 0$

۸۸. نمودار تابع $f(x)=2x^2+bx+c$ به شکل روبه‌رو است. این نمودار محور yها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟ (کتاب درسی)



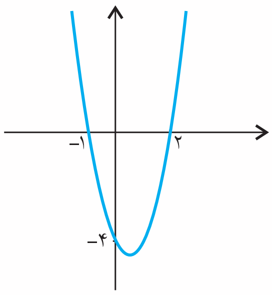
۱) -6

۲) -7

۳) -8

۴) -9

۸۹. نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ به‌صورت مقابل است. حاصل $f(3)$ کدام است؟



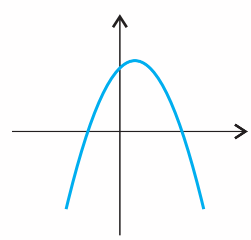
۱) ۳

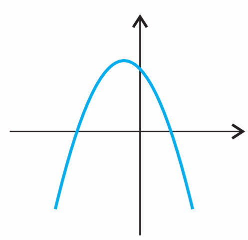
۲) ۸

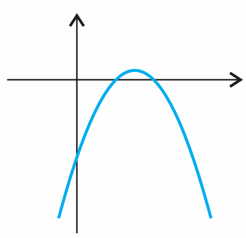
۳) ۹

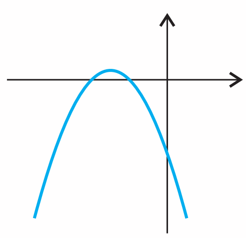
۴) ۱۲

۹۰. نمودار $f(x)=-x^2+4x+1$ شبیه کدام گزینه است؟

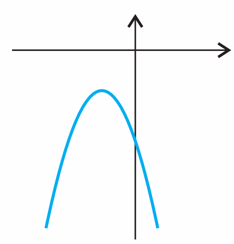
۱) 

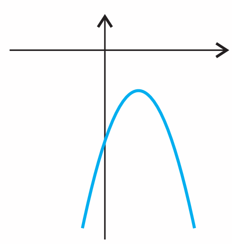
۲) 

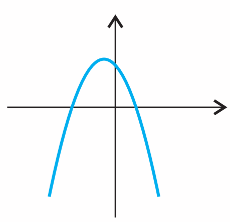
۳) 

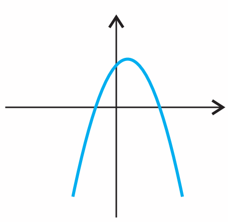
۴) 

۹۱. نمودار $f(x)=x-(x+2)^2$ شبیه کدام گزینه است؟

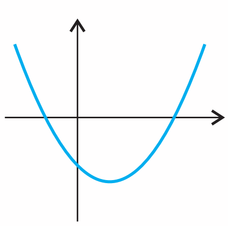
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۹۲. **مهم** نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ به شکل مقابل است. همچنین α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ هستند. کدام گزینه درست است؟



۱) $\frac{\alpha}{\beta}>0$ و $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2>0$

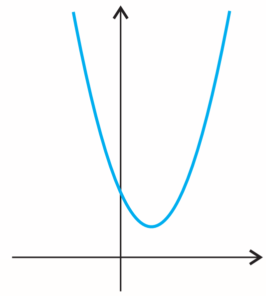
۲) $\frac{\alpha}{\beta}<0$ و $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2>0$

۳) $\frac{\alpha}{\beta}>0$ و $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2<0$

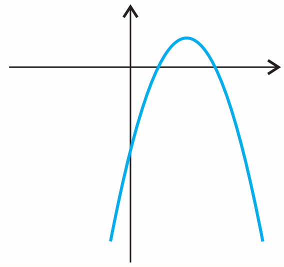
۴) $\frac{\alpha}{\beta}<0$ و $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2<0$

۹۳. مهم نمودارهای زیر مربوط به توابع $f(x)=ax^2+bx+c$ است. در چه تعداد از آن‌ها $abc>0$ است؟

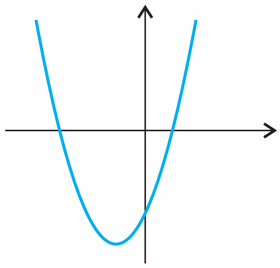
الف)



ب)



ج)



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

۹۴. به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=(m-1)x^2+\sqrt{3}x+m$ همواره زیر محور xها است؟

۱) $m<-\frac{1}{2}$ ۲) $-1<m<1$ ۳) $1<m<\frac{3}{2}$ ۴) $m>\frac{3}{2}$

۹۵. محور تقارن سهمی $y=x^2-4x+k$ منحنی را در نقطه‌ای به عرض -2 قطع می‌کند. طول پاره‌خطی که سهمی روی محور xها ایجاد می‌کند، کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $4\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{2}$

۹۶. تابع $f(x)=x^2-6x+k$ مفروض است. خط $y=3$ محور تقارن تابع را در نقطه‌ای واقع بر نمودار تابع قطع می‌کند. مقدار k کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۹۷. رأس سهمی به معادلهٔ $y=x^2+2x-8$ و نقاط تلاقی این سهمی با محور xها، سه رأس یک مثلث‌اند. مساحت این مثلث کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۱ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷

۹۸. مقادیر تابع با ضابطهٔ $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$، در بازهٔ (a,b) بزرگ‌تر از $\frac{7}{2}$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ *(سراسری تجربی ـ ۸۹)*

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۵/۵ ۴) ۶

۹۹. به ازای کدام مجموعه مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y=(m+2)x^2+3x+1-m$، محور xها را در هر دو طرف مبدأ مختصات، قطع می‌کند؟ *(سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۹۵)*

۱) $m>1$ یا $m<-2$ ۲) $-2<m<1$ ۳) فقط $m<-2$ ۴) فقط $m>1$

۱۰۰. مهم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=x^2-3x-10$ را حداقل چند واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور xها غیرمنفی باشد؟ *(سراسری خارج از کشور تجربی ـ ۹۳)*

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۱. دشوار به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x)=ax^2+(a+3)x-1$ محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟

۱) $a<-9$ ۲) $a<-3$ ۳) $a>-1$ ۴) $-3<a<0$

۱۰۲. مهم حدود a کدام باشد، تا نمودار تابع $f(x)=ax^2+(2a+1)x+(a-1)$ فقط از ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات نگذرد؟

۱) $a\geq 1$ ۲) $-\frac{1}{8}<a<1$ ۳) $-\frac{1}{8}<a<\frac{3}{2}$ ۴) $a<-\frac{1}{8}$

۱۰۳. مهم به ازای کدام مقادیر a، منحنی به معادلهٔ $y=ax^2-(a+2)x$ از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $a\leq -2$ ۲) $a>0$ ۳) $a>-2$ ۴) $-2\leq a<0$

۱۰۴. به ازای کدام مقادیر m، سهمی $y=(m+1)x^2-2x+m-3$ از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می‌گذرد؟

۱) $m>3$ یا $m<-1$ ۲) $-1<m<3$

۳) $m>1$ یا $m<-3$ ۴) $-3<m<1$

۱۰۵. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - kx + ۳k - ۲ = ۰$ باشند، آنگاه به ازای کدام مقدار k، حاصل $\alpha^۲ + \beta^۲$ مینیمم (کمترین مقدار) می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

۱۰۶. دشوار α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - (m+۱)x + ۶ = ۰$ هستند. حدود m برای آن‌که $\alpha < -۳ < \beta$ باشد، کدام است؟

۱) $m > -۶$ ۲) $m < -۶$ ۳) $m > -۹$ ۴) $m < -۹$

صفرهای توابع درجه بالاتر از ۲

صفرهای تابع f (در صورت وجود) مقادیری از x (در دامنهٔ f) هستند که به ازای آن‌ها $f(x)$ صفر می‌شود، یعنی ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = ۰$ هستند. می‌توان گفت صفرهای تابع طول نقاط تلاقی نمودار f با محور xها هستند.

مثال صفرهای تابع $f(x) = x^۳ - ۲x^۲ - ۴x + ۸$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

پاسخ

$$x^۳ - ۲x^۲ - ۴x + ۸ = ۰ \Rightarrow x^۲(x-۲) - ۴(x-۲) = ۰ \Rightarrow (x-۲)(x^۲-۴) = ۰ \Rightarrow (x-۲)^۲(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} (x-۲)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \\ \text{یا} \\ x+۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \end{cases}$$

مثال اگر $x = ۱$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^۳ + ۳x^۲ - x - ۳$ باشد، سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

پاسخ چون $x = ۱$ یکی از صفرهای تابع $f(x)$ است، پس تابع f عاملی به‌صورت $(x-۱)$ دارد که با تقسیم $f(x)$ بر $(x-۱)$ عوامل دیگر $f(x)$ را می‌یابیم:

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^۳} + ۳x^۲ - x - ۳ & x-۱ \\ \hline \cancel{-x^۳} + x^۲ & x^۲ + ۴x + ۳ \\ \hline \quad \cancel{۴x^۲} - x - ۳ & \\ \quad \cancel{-۴x^۲} + ۴x & \\ \hline \qquad \cancel{۳x} - \cancel{۳} & \\ \qquad \cancel{-۳x} + \cancel{۳} & \\ \hline \qquad\quad ۰ & \end{array}$$

پس می‌توان نوشت:

$$f(x) = (x-۱)(x^۲ + ۴x + ۳)$$

و از حل معادله $f(x) = ۰$ صفرهای دیگر تابع را می‌یابیم:

$$(x-۱)(x^۲ + ۴x + ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ x^۲ + ۴x + ۳ = ۰ \Rightarrow (x+۱)(x+۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \ \checkmark \\ x = -۳ \ \checkmark \end{cases} \end{cases}$$

مثال اگر یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^۴ + ax^۳ + x^۲ - ۲a$ برابر (-۲) باشد، صفرهای دیگر تابع را در صورت وجود به‌دست آورید.

پاسخ چون $x = -۲$ یکی از صفرهای تابع است، پس $f(-۲) = ۰$ و داریم:

$$(-۲)^۴ + a(-۲)^۳ + (-۲)^۲ - ۲a = ۰ \Rightarrow ۱۶ - ۸a + ۴ - ۲a = ۰ \Rightarrow a = ۲$$

پس تابع به‌صورت $f(x) = x^۴ + ۲x^۳ + x^۲ - ۴$ است و عاملی به‌صورت $(x+۲)$ دارد که با تقسیم $f(x)$ بر $(x+۲)$ داریم:

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^۴} + \cancel{۲x^۳} + x^۲ - ۴ & x+۲ \\ \hline \cancel{-x^۴} - \cancel{۲x^۳} & x^۳ + x - ۲ \\ \hline \qquad \cancel{x^۲} - ۴ & \\ \qquad \cancel{-x^۲} - ۲x & \\ \hline \qquad\quad \cancel{-۲x} - \cancel{۴} & \\ \qquad\quad \cancel{۲x} + \cancel{۴} & \\ \hline \qquad\qquad ۰ & \end{array}$$

پس می‌توان نوشت:

$$f(x)=(x+2)(x^3+x-2)$$

برای تعیین صفرهای این تابع باید (x^3+x-2) را نیز تجزیه کنیم چون $x=1$ یکی از صفرهای x^3+x-2 است پس این عبارت را بر $x-1$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^3}+x-2 & x-1 \\ \hline \cancel{-x^3}+x^2 & x^2+x+2 \\ \hline \quad \cancel{x^2}+x-2 & \\ \quad \cancel{-x^2}+x & \\ \hline \qquad \cancel{2x}-\cancel{2} & \\ \qquad \cancel{-2x}+\cancel{2} & \\ \hline \qquad 0 & \end{array}$$

پس تابع $f(x)$ به‌صورت زیر می‌شود:

$$f(x)=(x+2)(x-1)(x^2+x+2)$$

با حل معادلهٔ $f(x)=0$ صفرهای تابع را می‌یابیم:

$$(x+2)(x-1)(x^2+x+2)=0\Rightarrow\begin{cases}(x+2)=0\Rightarrow x=-2\ \checkmark\\(x-1)=0\Rightarrow x=1\ \checkmark\\x^2+x+2=0\to\Delta=1-8=-7<0\to \text{ریشه ندارد}\end{cases}$$

پس تابع علاوه بر $x=-2$ یک صفر دیگر یعنی $x=1$ دارد.

روش تغییر متغیر در حل معادلات

در حل برخی از معادلات می‌توان با تغییر متغیر مناسب معادله را به یکی از انواع معادلات که می‌شناسیم، مانند معادلهٔ درجه ۲، تبدیل کنیم و پس از حل آن و با توجه به تغییر متغیر صورت گرفته جواب‌های معادلهٔ اولیه را بیابیم.

مثال **صفرهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود بیابید.**

الف) $f(x)=x^4+2x^2-15$

ب) $f(x)=(x^2+x+1)^2+x^2+x-1$

پاسخ

الف)

$$f(x)=0\Rightarrow x^4+2x^2-15=0$$

با تغییر متغیر $x^2=t$ داریم:

$$t^2+2t-15=0\Rightarrow(t-3)(t+5)=0\Rightarrow t=3 \ \text{یا}\ t=-5$$

$$t=3\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

$$t=-5\Rightarrow x^2=-5\to \text{معادله جواب ندارد}$$

پس صفرهای تابع $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ هستند.

ب)

$$f(x)=0\Rightarrow(x^2+x+1)^2+x^2+x-1=0$$

با تغییر متغیر $x^2+x=t$ داریم:

$$(t+1)^2+t-1=0\Rightarrow t^2+2t+1+t-1=0\Rightarrow t^2+3t=0\Rightarrow t(t+3)=0\Rightarrow t=0\ \text{یا}\ t=-3$$

$$\Rightarrow\begin{array}{l}t=0\Rightarrow x^2+x=0\Rightarrow x(x+1)=0\Rightarrow x=0\,,\,x=-1\\t=-3\Rightarrow x^2+x=-3\Rightarrow x^2+x+3=0\to\Delta=1-12=-11<0\ \ \text{معادله ریشهٔ حقیقی ندارد}\end{array}$$

پس صفرهای تابع -1 و 0 هستند.

۱۰۷. معادلهٔ $(x^2+2)^2-5(x^2+2)+4=0$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) ۴

۱۰۸. تعداد و علامت جواب‌های حقیقی معادلهٔ $(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)=5$ کدام است؟ (سنجش ریاضی - ۹۳)

۱) دو ریشهٔ مثبت ۲) دو ریشه با علامت مخالف

۳) یک ریشهٔ مثبت و سه ریشهٔ منفی ۴) دو ریشهٔ مثبت و دو ریشهٔ منفی

۱۰۹. معادلهٔ $x^4+2ax^2+a^2-1=0$ چهار ریشهٔ متمایز دارد. حدود a کدام است؟

۱) $a>1$ ۲) $a<1$ ۳) $a<-1$ ۴) $-1<a<1$

۱۱۰. مهم ۲ و ۳ دوتا از صفرهای تابع $f(x)=x^3+ax^2-14x+b$ هستند. صفر دیگر تابع کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۴ ۴) -4

۱۱۱. مهم اگر α، β و γ صفرهای تابع $f(x)=2x^3+2x^2-12x$ باشند، آنگاه حاصل $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

۱۱۲. به ازای مقداری از a چندجمله‌ای $f(x)=x^4-ax^3-8x$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است. کوچکترین ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=0$ کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۹۴)

۱) $1+\sqrt{3}$ ۲) $1+\sqrt{5}$ ۳) $-1-\sqrt{3}$ ۴) $-1-\sqrt{5}$

۱۱۳. اگر نمودار تابع $f(x)=2x^3-5x^2-x-m$ محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، طول‌های دو نقطهٔ تلاقی دیگر آن با محور xها کدام‌اند؟ (سراسری خارج از کشور ریاضی - ۸۹)

۱) $-\frac{1}{2}$ و -1 ۲) ۱ و $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ و -1 ۴) ۳ و $-\frac{1}{2}$

۱۱۴. به ازای یک مقدار x، اعداد x^2-2، $2x$ و x^2+4 به ترتیب سه جملهٔ اول از دنبالهٔ هندسی با قدر نسبت $q>0$ هستند. مجموع هفت جملهٔ اول این دنباله کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۳)

۱) $\frac{117}{16}$ ۲) $\frac{125}{16}$ ۳) $\frac{63}{4}$ ۴) $\frac{127}{8}$

۱۱۵. مهم تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ مفروض است. می‌دانیم ۱ و ۴ دوتا از صفرهای تابع $f(x)$ هستند، همچنین ۷ نیز یکی از صفرهای تابع $f(x-1)$ است. صفرهای تابع $f(x-2)$ کدام است؟

۱) ۱، ۴ و ۹ ۲) ۲، ۵ و ۸ ۳) ۳، ۶ و ۸ ۴) ۴، ۵ و ۹

۱۱۶. به ازای کدام مقادیر a، معادلهٔ $3x^4+5x^2+a^2=1$ فقط دو جواب قرینهٔ هم برای x دارد؟

۱) $0<a<2$ ۲) $-1<a<1$ ۳) $|a|>1$ ۴) هر مقدار a

۱۱۷. دشوار صفرهای تابع $f(x)=3x^3+18x^2+ax$ تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند. مقدار a کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۱ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷

۱۱۸. تعداد صفرهای تابع $f(x)=(x^2+3x+1)^3-(x^2+3x+1)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۰

۱۱۹. دشوار ۰، ۱ و ۲ تمام صفرهای تابع $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx$ هستند. مقدار a کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) -3 ۲) -4 ۳) -5 ۴) -6

روش هندسی (نموداری) حل معادلات

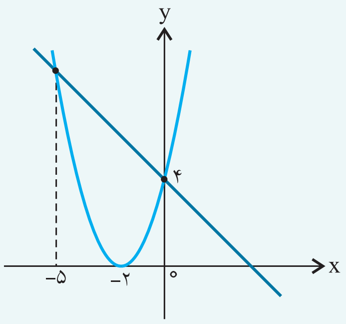
طول نقاط تلاقی نمودارهای توابع $f(x)$ و $g(x)$ جواب‌های معادلهٔ $f(x)=g(x)$ است و برعکس. هر جواب این معادله طول یکی از نقاط محل تلاقی این دو نمودار است.

مثال معادلات زیر را به روش هندسی حل کنید.

الف) $(x+۲)^۲=۴-x$ ب) $x^۲+|x|=۲$

پاسخ

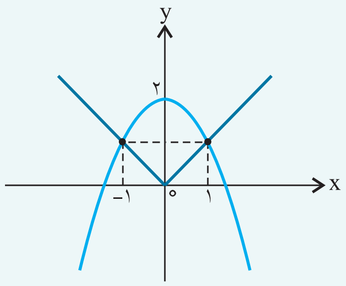
الف) با فرض $f(x)=(x+۲)^۲$ و $g(x)=۴-x$ نمودار این دو تابع را رسم می‌کنیم:



همان‌طور که می‌بینیم طول نقاط تلاقی دو نمودار عبارتند از $x=۰$ و $x=-۵$ که جواب‌های معادله هستند.

ب) $x^۲+|x|=۲\Rightarrow |x|=-x^۲+۲$

با فرض $f(x)=|x|$ و $g(x)=-x^۲+۲$ نمودار این دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



همان‌طور که می‌بینیم طول نقاط تلاقی دو نمودار عبارتند از $x=۱$ و $x=-۱$ که جواب‌های معادله‌اند.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۲۰. **مهم** معادلهٔ $|x|=x^۲+x-۲$ دارای چند جواب است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

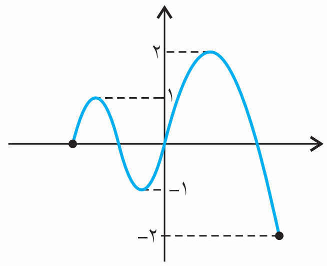
۱۲۱. دربارهٔ تعداد و علامت جواب‌های معادلهٔ $x^۲+۴x+۳=|x|$ کدام است؟

۱) دو جواب، یکی مثبت و دیگری منفی
۲) دو جواب، هر دو مثبت
۳) دو جواب، هر دو منفی
۴) سه جواب، یکی مثبت و دو تا منفی

۱۲۲. به ازای چه مقادیری از a، معادلهٔ $|x+۱|=\frac{x}{۲}+a$ دارای دو جواب است؟

۱) $a>\frac{۱}{۲}$ ۲) $a<\frac{۱}{۲}$ ۳) $a>-\frac{۱}{۲}$ ۴) $a<-\frac{۱}{۲}$

۱۲۳. در شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=f(x)$ نشان داده شده است. به ازای کدام مقادیر a معادلهٔ $f(x)=a$ دارای سه جواب است؟



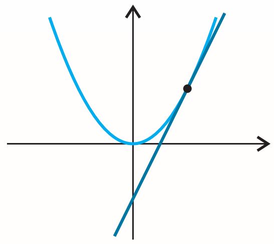
۱) $[-۱,۰]\cup\{۱\}$

۲) $(-۱,۰)\cup[۱,۲)$

۳) $(-۱,۰)\cup\{۱\}$

۴) $(-۲,۱)\cup\{۲\}$

۱۲۴. در شکل مقابل، حل هندسی معادلهٔ $x^۲=۲x+a$ نشان داده شده است، به طوری که معادله فقط یک جواب دارد. a کدام است؟



۱) -۱

۲) -۲

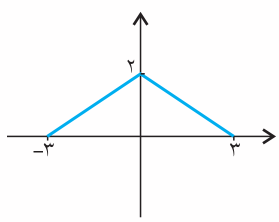
۳) -۳

۴) -۴

۱۲۵. دشوار حدود a برای آن‌که معادلهٔ $x^۲=|x|+a$ دارای چهار جواب باشد، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}<a<\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}<a<\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}<a<۰$ ۴) $-\frac{۱}{۲}<a<۰$

۱۲۶. دشوار در شکل مقابل، نمودار تابع $f(x)$ رسم شده است. حدود a برای آن‌که معادلهٔ $f(x)=x^۲+a$ دارای دو جواب متمایز باشد، کدام است؟



۱) $-۹\le a<۲$

۲) $-۹\le a<۰$

۳) $۰\le a<۲$

۴) $-۹\le a\le -۲$

۱۲۷. دشوار کدام معادله دارای سه جواب است؟

۱) $|x+۱|=x^۲+۲x+۱$ ۲) $|x-۱|=x^۲+۲x+۱$ ۳) $|x+۲|=x^۲+۲x+۱$ ۴) $|x|=x^۲+۲x+۱$

درس دوم: معادلات درجه دوم

روابط بین ضرایب در ریشه‌های معادله درجه دوم

۵۱. گزینه ۱ روش اول:

$$\alpha+\beta=-p \qquad \alpha\beta=q$$

$$\alpha-\beta=1 \Rightarrow (\alpha-\beta)^2=1 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=1 \Rightarrow$$

$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1 \Rightarrow (-p)^2-4q=1 \Rightarrow$$

$$p^2=4q+1 \xrightarrow{p>0} p=\sqrt{4q+1}$$

روش دوم: در معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$، تفاضل ریشه‌ها برابر است با $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$. پس:

$$x^2+px+q=0 \rightarrow \Delta=p^2-4q$$

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=1 \Rightarrow \frac{\sqrt{p^2-4q}}{|1|}=1 \Rightarrow p^2-4q=1 \Rightarrow p^2=4q+1 \Rightarrow$$

$$p=\sqrt{4q+1}$$

۵۲. گزینه ۲

$$2x^2-mx+8=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=\frac{m}{2}\\ \alpha\beta=4\end{cases}$$

اعداد ۶، $\frac{m}{2}$ و ۴ تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند. پس:

$$\frac{m}{2}=\frac{4+6}{2} \Rightarrow m=10$$

۵۳. گزینه ۳

$$2x^2+px+8=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{p}{2}\\ \alpha\beta=\frac{8}{2}=4\end{cases}$$

$$x^2-4x+q=0 \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=4\\ \sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=q \Rightarrow \sqrt{\alpha\beta}=q \Rightarrow q=\sqrt{4} \Rightarrow q=2\end{cases}$$

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=4 \Rightarrow (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=16 \Rightarrow \alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=16 \Rightarrow$$

$$\alpha+\beta+4=16 \Rightarrow \alpha+\beta=12 \Rightarrow -\frac{p}{2}=12 \Rightarrow p=-24$$

$$p+q=-24+2=-22$$

۵۴. گزینه ۴

$x^2+mx-4=0 \Rightarrow$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها -4 است

عدد -4 به سه حالت می‌تواند حاصل‌ضرب دو عدد صحیح باشد:

$$-4=2\times(-2) \Rightarrow 2+(-2)=0 \Rightarrow m=0$$

$$-4=4\times(-1) \Rightarrow 4+(-1)=3 \Rightarrow m=-3$$

$$-4=1\times(-4) \Rightarrow 1+(-4)=-3 \Rightarrow m=3$$

۵۵. گزینه ۲ فرض می‌کنیم α و β ریشه‌های معادله باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\alpha}{\beta}=4\\ \alpha+\beta=-\frac{-10}{2} \Rightarrow \alpha+\beta=5\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=4\ ,\ \beta=1$$

$$\alpha\beta=\frac{m}{2} \Rightarrow 4\times1=\frac{m}{2} \Rightarrow m=8$$

۵۶. گزینه ۲

$$\left.\begin{array}{l}x^2-8x+m=0 \Rightarrow \alpha+\beta=8\\ \alpha-\frac{\beta}{2}=5\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=6\ ,\ \beta=2$$

$$\Rightarrow \alpha\beta=6\times2=12 \Rightarrow m=12$$

۵۷. گزینه ۴

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a} \Rightarrow \alpha^2\beta^2=\left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$\alpha+\beta=\alpha^2\beta^2 \Rightarrow -\frac{b}{a}=\left(\frac{c}{a}\right)^2 \Rightarrow -\frac{b}{a}=\frac{c^2}{a^2} \Rightarrow -b=\frac{c^2}{a} \Rightarrow$$

$$-ab=c^2 \Rightarrow c^2+ab=0$$

۵۸. گزینه ۲ α، ۳ و β تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند، پس:

$$\alpha\beta=3^2=9$$

در معادله، حاصل‌ضرب ریشه‌ها را می‌نویسیم:

$$(m+2)x^2+2nx+9m+3n=0 \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{9m+3n}{m+2} \Rightarrow$$

$$\frac{9m+3n}{m+2}=9 \Rightarrow 9m+3n=9(m+2) \Rightarrow 9m+3n=9m+18 \Rightarrow$$

$$n=6$$

۵۹. گزینه ۳ می‌دانیم:

$$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$$

در معادلهٔ درجه دوم داریم:

$$2x^2-(m+4)x+m=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\tan\alpha\cdot\cot\alpha=\frac{m}{2} \Rightarrow 1=\frac{m}{2} \Rightarrow m=2\\ \tan\alpha+\cot\alpha=\frac{m+4}{2}=\frac{2+4}{2}=3\end{cases}$$

۶۰. گزینه ۳

$$x^2-4x+7=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=4\\ \alpha\beta=7\end{cases}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{4^2-2\times7}{7}=\frac{2}{7}$$

۶۱. گزینه ۱

$$2x^2-(m+1)x+m=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=\frac{m+1}{2}\\ \alpha\beta=\frac{m}{2}\end{cases}$$

$$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=5 \Rightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta)=5 \Rightarrow \frac{m}{2}\left(\frac{m+1}{2}\right)=5 \Rightarrow$$

$m(m+1)=20 \Rightarrow m^2+m-20=0 \Rightarrow m=4$ یا -5

با جایگذاری m در معادله داریم:

$\xrightarrow{m=4} 2x^2-5x+4=0 \rightarrow \Delta<0 \Rightarrow$ ریشه ندارد

$$\xrightarrow{m=-5} 2x^2+4x-5=0 \rightarrow \Delta>0$$

پس پاسخ $m=-5$ است.

۶۲. گزینه ۲

$$2x^2-mx+m-1=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{m}{2}\\ \alpha\beta=\dfrac{m-1}{2}\end{cases}$$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\frac{m}{2}\right)^2-2\left(\frac{m-1}{2}\right)=$$

$$\frac{m^2}{4}-(m-1)=\frac{m^2-4m+4}{4}$$

$$\alpha^2+\beta^2=4\Rightarrow\frac{m^2-4m+4}{4}=4\Rightarrow m^2-4m-12=0$$

$$\Rightarrow m=6 \text{ یا } -2$$

$$2x^2-mx+m-1=0\xrightarrow{m=6}2x^2-6x+5=0\to\Delta<0$$

$$2x^2-mx+m-1=0\xrightarrow{m=-2}2x^2+2x-3=0\to\Delta>0$$

پس در حالت $m=-2$، معادله دارای ریشهٔ حقیقی است.

۶۳. گزینه ۴

$$x^2-7x+1=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=7\\ \alpha\beta=1\end{cases}$$

فرض می‌کنیم $t=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.

$$t=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\Rightarrow t^2=(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=7+2=9$$

$$t^2=9\xrightarrow{t>0}t=3\Rightarrow\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=3$$

۶۴. گزینه ۲

$$x^2+4x-1=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=-4\\ \alpha\beta=-1\end{cases}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\beta}\right)^2=\frac{\alpha^4+\beta^4-2\alpha^2\beta^2}{(\alpha\beta)^2}=$$

$$\frac{(\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2}{(\alpha\beta)^2}=\frac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{(\alpha\beta)^2}-4=$$

$$\frac{((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta)^2}{(\alpha\beta)^2}-4=\frac{((-4)^2-2(-1))^2}{(-1)^2}-4=320$$

۶۵. گزینه ۴

$$x^2-3x-5=0\Rightarrow\alpha+\beta=3$$

$$x^2-3x-5=0\xrightarrow{x=\alpha}\alpha^2-3\alpha-5=0\Rightarrow\alpha^2=3\alpha+5$$

$$\alpha^2+3\beta=3\alpha+5+3\beta=3(\alpha+\beta)+5=3\times3+5=14$$

۶۶. گزینه ۳

$$x^2+4x-7=0\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=-4\\ x_1x_2=-7\end{cases}$$

$$x^2+4x-7=0\xrightarrow{x=x_1}x_1^2+4x_1-7=0\Rightarrow$$

$$x_1^2+4x_1=7\Rightarrow x_1^2+5x_1=7+x_1$$

اکنون عبارت صورت مسئله را می‌نویسیم:

$$x_1^2+5x_1+x_2=7+x_1+x_2=7+S=7+(-4)=3$$

۶۷. گزینه ۳

$$x^2+2x-7=0\Rightarrow x_1x_2=-7\Rightarrow P=-7$$

$$x^2+2x-7=0\xrightarrow{x=x_2}x_2^2+2x_2-7=0\Rightarrow 7-2x_2=x_2^2$$

اکنون عبارت صورت مسئله را می‌نویسیم:

$$\sqrt{x_1^2(7-2x_2)}=\sqrt{x_1^2x_2^2}=|x_1x_2|=|P|=7$$

۶۸. گزینه ۴

$$x^2+2x-4=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=-2\\ \alpha\beta=-4\end{cases}$$

$$x^2+2x-4=0\xrightarrow{x=\alpha}\alpha^2+2\alpha-4=0\Rightarrow$$

$$\alpha^2=-2\alpha+4\Rightarrow\alpha^3=-2\alpha^2+4\alpha$$

اکنون عبارت صورت مسئله را می‌نویسیم:

$$\alpha^3-2\beta^2+4\beta=-2\alpha^2+4\alpha-2\beta^2+4\beta=-2(\alpha^2+\beta^2)+4(\alpha+\beta)=$$

$$-2((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta)+4(\alpha+\beta)=-2((-2)^2-2(-4))+4(-2)=-32$$

۶۹. گزینه ۳

$$x^2+3x-9=0\Rightarrow P=-9\Rightarrow\alpha\beta=-9$$

$$x^2+3x-9=0\xrightarrow{x=\beta}\beta^2+3\beta-9=0\Rightarrow\beta(\beta+3)=9\Rightarrow$$

$$\beta+3=\frac{9}{\beta}$$

اکنون در عبارت صورت مسئله داریم:

$$\frac{\alpha^2}{(\beta+3)^2}=\frac{\alpha^2}{\left(\frac{9}{\beta}\right)^2}=\frac{\alpha^2\beta^2}{81}=\frac{(\alpha\beta)^2}{81}=\frac{(-9)^2}{81}=1$$

۷۰. گزینه ۳ در معادلهٔ $x^2-2x-6=0$ داریم:

$$x^2-2x-6=0\Rightarrow S=2\,,\,P=-6$$

فرض می‌کنیم α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-2x-6=0$ باشند.

α' و β' ریشه‌های معادلهٔ $x^2+bx+c=0$ باشند:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha'=2\alpha+1\\ \beta'=2\beta+1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha'+\beta'=2\alpha+1+2\beta+1=2(\alpha+\beta)+2=2S+2=6\\ \alpha'\beta'=(2\alpha+1)(2\beta+1)=4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1=4P+2S+1=-19\end{cases}$$

در معادلهٔ $x^2+bx+c=0$ داریم:

$$x^2+bx+c=0\Rightarrow\begin{cases}S'=\alpha'+\beta'\Rightarrow -b=6\Rightarrow b=-6\\ P'=\alpha'\beta'\Rightarrow c=-19\end{cases}$$

$$b+c=-6+(-19)=-25$$

۷۱. گزینه ۳

$$x(5x+3)=2\Rightarrow 5x^2+3x-2=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha\beta=-\dfrac{2}{5}\\ \alpha+\beta=-\dfrac{3}{5}\end{cases}$$

در معادلهٔ $4x^2-kx+25=0$ مجموع ریشه‌ها برابر است با $\frac{k}{4}$، پس $\frac{k}{4}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$.

$$\frac{k}{4}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}=$$

$$\frac{\left(-\frac{3}{5}\right)^2-2\left(-\frac{2}{5}\right)}{\left(-\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\frac{9}{25}+\frac{4}{5}}{\frac{4}{25}}=\frac{29}{4}\Rightarrow\frac{k}{4}=\frac{29}{4}\Rightarrow k=29$$

نوشتن معادله درجه ۲ با داشتن S و P

۷۲. گزینه ۱ اگر طول و عرض مستطیل را $x_۱$ و $x_۲$ فرض کنیم، آنگاه معادلهٔ درجه دومی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌هایش $x_۱$ و $x_۲$ باشند.

$$\begin{cases} S = x_۱ + x_۲ = \frac{۳۰}{۲} = ۱۵ \\ P = x_۱x_۲ = ۵۴ \end{cases}$$

معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$x^۲ - ۱۵x + ۵۴ = ۰ \Rightarrow (x-۶)(x-۹) = ۰ \xrightarrow{x_۱ > x_۲} x_۱ = ۹ \,,\, x_۲ = ۶$$

$$\Rightarrow \frac{x_۱}{x_۲} = \frac{۹}{۶} = \frac{۳}{۲}$$

۷۳. گزینه ۴

$$\alpha, ۱۶, \beta \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{۲} = ۱۶ \Rightarrow \alpha+\beta = ۳۲ \Rightarrow S = ۳۲$$

$$\alpha, ۱۰, \beta \Rightarrow \sqrt{\alpha\beta} = ۱۰ \Rightarrow \alpha\beta = ۱۰۰ \Rightarrow P = ۱۰۰$$

$$x^۲ - Sx + P = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۳۲x + ۱۰۰ = ۰$$

۷۴. گزینه ۲

$$۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = \frac{۳}{۲} \\ \alpha\beta = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

در معادلهٔ جدید داریم:

$$\begin{cases} S' = \alpha^۲\beta + \alpha\beta^۲ = \alpha\beta(\alpha+\beta) = -\frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۲} = -\frac{۳}{۴} \\ P' = \alpha^۲\beta \cdot \alpha\beta^۲ = \alpha^۳\beta^۳ = (\alpha\beta)^۳ = \left(-\frac{۱}{۲}\right)^۳ = -\frac{۱}{۸} \end{cases}$$

پس معادلهٔ جدید می‌شود:

$$x^۲ - S'x + P' = ۰ \Rightarrow x^۲ - \left(-\frac{۳}{۴}\right)x - \frac{۱}{۸} = ۰ \xrightarrow{\times ۸}$$

$$۸x^۲ + ۶x - ۱ = ۰ \Rightarrow k = ۶$$

۷۵. گزینه ۴ روش اول:

$$S = \alpha+\beta = (۲+\sqrt{۵}) + (۲-\sqrt{۵}) = ۴$$

$$P = \alpha\beta = (۲+\sqrt{۵})(۲-\sqrt{۵}) = -۱$$

پس معادله می‌شود:

$$x^۲ - Sx + P = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۴x - ۱ = ۰$$

روش دوم:

$$x = ۲ \pm \sqrt{۵} \Rightarrow x - ۲ = \pm\sqrt{۵} \Rightarrow (x-۲)^۲ = (\pm\sqrt{۵})^۲ \Rightarrow$$

$$(x-۲)^۲ = ۵ \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۴ = ۵ \Rightarrow x^۲ - ۴x - ۱ = ۰$$

۷۶. گزینه ۲ با فرض $\alpha = ۳ - \sqrt{۵}$ و $\beta = ۳ + \sqrt{۵}$ معادلهٔ درجه دومی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌هایش α و β باشند، پس معادلهٔ درجه دوم دیگری تشکیل می‌دهیم که ریشه‌های $\alpha^۳$ و $\beta^۳$ باشند:

$$\begin{cases} S = \alpha+\beta = ۳ - \sqrt{۵} + ۳ + \sqrt{۵} = ۶ \\ P = \alpha\beta = (۳-\sqrt{۵})(۳+\sqrt{۵}) = ۴ \end{cases}$$

$$\begin{cases} S' = \alpha^۳ + \beta^۳ = (\alpha+\beta)^۳ - ۳\alpha\beta(\alpha+\beta) = ۶^۳ - ۳ \times ۴ \times ۶ = ۱۴۴ \\ P' = \alpha^۳ \cdot \beta^۳ = (\alpha\beta)^۳ = ۴^۳ = ۶۴ \end{cases}$$

پس معادلهٔ جدید می‌شود:

$$x^۲ - ۱۴۴x + ۶۴ = ۰$$

۷۷. گزینه ۱

$$x^۲ + ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = -۳ \Rightarrow \alpha+\beta = -۳ \\ P = ۱ \Rightarrow \alpha\beta = ۱ \end{cases}$$

ریشه‌های معادلهٔ جدید را α' و β'، همچنین مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌هایش را S' و P' فرض می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix} \alpha' = \alpha^۲ + ۱ \\ \beta' = \beta^۲ + ۱ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} S' = \alpha^۲ + ۱ + \beta^۲ + ۱ \\ P' = (\alpha^۲+۱)(\beta^۲+۱) \end{cases}$$

$$\alpha^۲ + ۱ + \beta^۲ + ۱ = (\alpha+\beta)^۲ - ۲\alpha\beta + ۲ = (-۳)^۲ - ۲ + ۲ = ۹$$

$$(\alpha^۲+۱)(\beta^۲+۱) = \alpha^۲\beta^۲ + \alpha^۲ + \beta^۲ + ۱ =$$

$$(\alpha\beta)^۲ + (\alpha+\beta)^۲ - ۲\alpha\beta + ۱ = ۱^۲ + (-۳)^۲ - ۲ + ۱ = ۹$$

پس در معادلهٔ جدید داریم:

$$x^۲ - S'x + P' = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۹x + ۹$$

۷۸. گزینه ۱

$$x^۲ - ۶x + ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = ۶ \\ \alpha\beta = ۲ \end{cases}$$

$$\alpha\beta = ۲ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{۲}{\beta} \Rightarrow \frac{\alpha}{۲} = \frac{۱}{\beta} \Rightarrow \alpha + \frac{۱}{\beta} = \alpha + \frac{\alpha}{۲} \Rightarrow \alpha + \frac{۱}{\beta} = \frac{۳\alpha}{۲} \\ \beta = \frac{۲}{\alpha} \Rightarrow \frac{\beta}{۲} = \frac{۱}{\alpha} \Rightarrow \beta + \frac{۱}{\alpha} = \frac{۳\beta}{۲} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} S' = \left(\alpha + \frac{۱}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{۱}{\alpha}\right) = \frac{۳\alpha}{۲} + \frac{۳\beta}{۲} = \frac{۳}{۲}(\alpha+\beta) = \frac{۳}{۲} \times ۶ = ۹ \\ P' = \left(\alpha + \frac{۱}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{۱}{\alpha}\right) = \left(\frac{۳}{۲}\alpha\right)\left(\frac{۳}{۲}\beta\right) = \frac{۹}{۴}\alpha\beta = \frac{۹}{۴} \times ۲ = \frac{۹}{۲} \end{cases}$$

پس معادلهٔ جدید می‌شود:

$$x^۲ - S'x + P' = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۹x + \frac{۹}{۲} = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ - ۱۸x + ۹ = ۰$$

۷۹. گزینه ۴

$$۲x^۲ - ۳x - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha+\beta = \frac{۳}{۲} \\ P = \alpha\beta = -۲ \end{cases}$$

در معادلهٔ جدید داریم:

$$\begin{cases} S' = \left(\frac{۱}{\alpha} + ۱\right) + \left(\frac{۱}{\beta} + ۱\right) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} + ۲ = \frac{\frac{۳}{۲}}{-۲} + ۲ = \frac{۵}{۴} \\ P' = \left(\frac{۱}{\alpha} + ۱\right)\left(\frac{۱}{\beta} + ۱\right) = \frac{\alpha\beta + \alpha + \beta + ۱}{\alpha\beta} = \frac{-۲ + \frac{۳}{۲} + ۱}{-۲} = -\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

پس معادلهٔ جدید می‌شود:

$$x^۲ - S'x + P' = ۰ \Rightarrow x^۲ - \frac{۵}{۴}x - \frac{۱}{۴} = ۰ \xrightarrow{\times ۴} ۴x^۲ - ۵x - ۱ = ۰$$

۸۰. گزینه ۴ روش اول: طبق روشی که بلد هستیم، ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۵x - ۱ = ۰$ را α و β فرض می‌کنیم، ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲ + ax + b = ۰$ را نیز α' و β' فرض می‌کنیم:

$$x^۲ - ۵x - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = ۵ \\ \alpha\beta = -۱ \end{cases}$$

$$۳x^۲ + ax + b = ۰ \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha'+\beta'=(\alpha+2)+(\beta+2)=\alpha+\beta+4=5+4=9\\ \alpha'\beta'=(\alpha+2)(\beta+2)=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4=-1+10+4=13\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}S'=-\frac{a}{3}\Rightarrow 9=-\frac{a}{3}\Rightarrow a=-27\\ P'=\frac{b}{3}\Rightarrow 13=\frac{b}{3}\Rightarrow b=39\end{cases}\Rightarrow a+b=12$$

روش دوم: ابتدا به نکتهٔ زیر توجه کنید:

نکته اگر ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ به اندازهٔ k واحد از ریشه‌های معادلهٔ $a'x^2+b'x+c'=0$ بیشتر باشند، می‌توان در معادلهٔ دوم $x-k$ را به جای x قرار داد، سپس عبارت حاصل را در $\frac{a}{a'}$ ضرب کرد.

$$x^2-5x-1=0\xrightarrow{x\to x-2}(x-2)^2-5(x-2)-1=0\Rightarrow$$
$$x^2-4x+4-5x+10-1=0\Rightarrow x^2-9x+13=0$$

در صورت مسئله معادله به صورت $3x^2+ax+b=0$ است.

$$x^2-9x+13=0\xrightarrow{\times 3}3x^2-27x+39=0\Rightarrow a=-27\,,\,b=39$$
$$a+b=-27+39=12$$

۸۱. گزینهٔ ۳ راه حل اول:

$$2x^2+5x+1=0\Rightarrow\begin{cases}S=-\frac{5}{2}\Rightarrow\alpha+\beta=-\frac{5}{2}\\ P=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha\beta=\frac{1}{2}\end{cases}$$

در معادلهٔ جدید داریم:

$$\begin{cases}S'=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}=-5\\ P'=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2\end{cases}$$

معادلهٔ جدید می‌شود:

$$x^2-Sx+P=0\Rightarrow x-(-5)x+2=0\Rightarrow$$
$$x^2+5x+2=0\xrightarrow{\times 2}2x^2+10x+4=0$$

راه حل دوم: ابتدا به نکتهٔ زیر توجه کنید:

نکته معادله‌ای که ریشه‌هایش معکوس ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ است برابر است با $cx^2+bx+a=0$. زیرا اگر $\frac{1}{x}$ را به جای x قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$ax^2+bx+c=0\xrightarrow{x\to\frac{1}{x}}\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+c=0$$
$$\xrightarrow{\times x^2}cx^2+bx+a=0$$

بنابراین:

$$2x^2+5x+1=0\Rightarrow x^2+5x+2=0\xrightarrow{\times 2}$$
$$2x^2+10x+4=0\Rightarrow a=2\,,\,b=10\Rightarrow ab=20$$

صفرهای تابع درجه ۲

۸۲. گزینهٔ ۳ اگر محور xها را در دو نقطهٔ متمایز قطع کند، یعنی $\Delta>0$ است، پس:

$$mx^2+4x+m-3=0\Rightarrow\Delta=4^2-4m(m-3)=-4m^2+12m+16$$
$$\Delta>0\Rightarrow-4m^2+12m+16>0\xrightarrow{\times\left(-\frac{1}{4}\right)}m^2-3m-4<0\Rightarrow$$
$$(m-4)(m+1)<0\Rightarrow-1<m<4$$

۸۳. گزینهٔ ۳ تابع بالای محور xها بر آن مماس است. پس ضریب x^2 مثبت است، پس $m>2$.

چون بر محور xها مماس است، نتیجه می‌گیریم $\Delta=0$. پس:

$$(m-2)x^2-3x+m+2=0\Rightarrow$$
$$\Delta=(-3)^2-4(m-2)(m+2)=9-4(m^2-4)$$
$$\Delta=0\Rightarrow 9-4(m^2-4)=0\Rightarrow 4m^2=25\Rightarrow 4m^2-25=0\Rightarrow$$
$$(2m-5)(2m+5)=0\Rightarrow m=\frac{5}{2}\ \text{یا}\ -\frac{5}{2}$$

با توجه به $m>2$، پاسخ $m=\frac{5}{2}$ قابل قبول است.

۸۴. گزینهٔ ۳ تابع درجه دومی که بر محور xها مماس است، به این شکل است:

$$f(x)=a(x-\alpha)^2=a(x-\alpha)(x-\alpha)$$

پس هر دو پرانتز به ازای یک مقدار صفر می‌شود.

$$f(x)=\left(3-\frac{x}{m}\right)(mx-1)\Rightarrow\begin{cases}3-\frac{x}{m}=0\Rightarrow x=3m\\ mx-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{m}\end{cases}$$

دو مقدار باید برابر باشند:

$$3m=\frac{1}{m}\Rightarrow 3m^2=1\Rightarrow m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

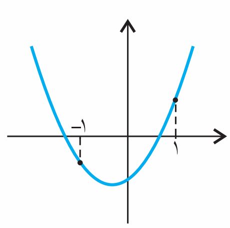
۸۵. گزینهٔ ۳

$$h(t)=560\Rightarrow-5t^2+160t=560\Rightarrow 5t^2-160t+560=0\Rightarrow$$
$$t^2-32t+112=0\Rightarrow(t-4)(t-28)=0\Rightarrow t=4,28$$

در ثانیه‌های ۴ و ۲۸ ارتفاعش از سطح زمین ۵۶۰ متر است.

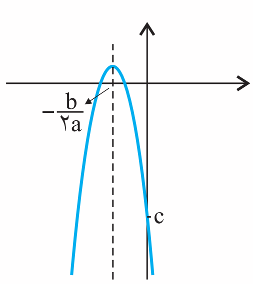
$$h(t)=-5t^2+160t\Rightarrow-\frac{b}{2a}=-\frac{160}{-10}=16$$
$$h(16)=-5(16)^2+160(16)=-1280+2560=1280$$

۸۶. گزینهٔ ۳ با توجه به نمودار تابع و جای‌گذاری $x=1$ و $x=-1$ در $f(x)=ax^2+bx+c$ داریم:



$$f(1)>0\Rightarrow a+b+c>0$$
$$f(-1)<0\Rightarrow a-b+c<0$$

۸۷. گزینهٔ ۳ نمودار رو به پایین است، پس $a<0$. با توجه به محور تقارن داریم:



$$-\frac{b}{2a}<0\Rightarrow\frac{b}{a}>0\xrightarrow{a<0}b<0$$

با توجه به نقطهٔ تلاقی با محور yها، $c<0$ است.

۸۸. گزینه ۲ ۱ و ۴− صفرهای تابع درجه دوم $f(x)=۲x^۲+bx+c$ هستند:

$$۲x^۲+bx+c=a(x-۱)(x+۴) \Rightarrow$$
$$۲x^۲+bx+c=a(x^۲+۳x-۴) \Rightarrow ۲x^۲+bx+c=ax^۲+۳ax-۴a$$
$$\Rightarrow a=۲ \Rightarrow ۲x^۲+bx+c=۲x^۲+۶x-۸ \Rightarrow b=۶\ ,\ c=-۸$$
$$\Rightarrow f(x)=۲x^۲+۶x-۸ \xrightarrow{x=۰} f(۰)=۲(۰)^۲+۶(۰)-۸=-۸$$

۸۹. گزینه ۲ نمودار از نقطهٔ $(۰,-۴)$ گذشته است:

$$f(x)=ax^۲+bx+c \xrightarrow{(۰,-۴)} -۴=a(۰)^۲+b(۰)+c \Rightarrow c=-۴$$

از طرفی صفرهای تابع ۲ و ۱− هستند، پس:

$$ax^۲+bx+c=a(x+۱)(x-۲) \Rightarrow$$
$$ax^۲+bx-۴=ax^۲-ax-۲a \Rightarrow -۴=-۲a \Rightarrow a=۲$$
$$\Rightarrow f(x)=۲(x+۱)(x-۲) \Rightarrow f(۳)=۲\times۴\times۱=۸$$

۹۰. گزینه ۱ صفرهای تابع را در نظر می‌گیریم:

$$-x^۲+۴x+۱=۰ \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{۱}{-۱}=-۱ \Rightarrow \frac{c}{a}<۰$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها منفی است، پس یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی است. (رد گزینه‌های ۳ و ۴)

اکنون محور تقارن سهمی را در نظر می‌گیریم:

$$-\frac{b}{۲a}=-\frac{۴}{-۲}=۲ \Rightarrow x=۲$$

پس محور تقارن سهمی سمت راست محور yها است. (رد گزینهٔ ۲)

۹۱. گزینه ۱

$$f(x)=x-(x+۲)^۲=-x^۲-۳x-۴$$

صفرهای تابع را بررسی می‌کنیم:

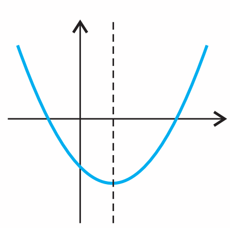
$-x^۲-۳x-۴=۰ \xrightarrow{\Delta<۰}$ جواب ندارد

پس نمودار تابع، محور xها را قطع نمی‌کند. اکنون محور تقارن سهمی را در نظر می‌گیریم:

$$-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۳}{-۲}=-\frac{۳}{۲} \Rightarrow x=-\frac{۳}{۲}$$

پس محور تقارن سهمی $x=-\frac{۳}{۲}$ است که سمت چپ محور yها است.

۹۲. گزینه ۲ با توجه به شکل، یکی از ریشه‌ها مثبت و دیگری منفی است، پس $\frac{\alpha}{\beta}<۰$. از طرفی محور تقارن $x=-\frac{b}{۲a}$ سمت راست محور yها است:



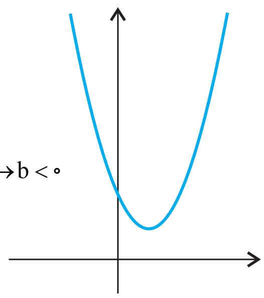
$$-\frac{b}{۲a}>۰ \Rightarrow -\frac{b}{a}>۰ \Rightarrow S>۰$$

یکی از ریشه‌ها مثبت و دیگری منفی است، پس حاصل‌ضرب آن‌ها منفی است، پس $\frac{c}{a}<۰$.

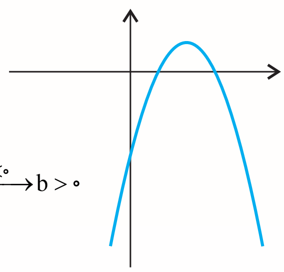
$$\frac{c}{a}<۰ \Rightarrow P<۰$$
$$\left.\begin{matrix}S>۰\\P<۰\end{matrix}\right\} \Rightarrow S\cdot P<۰ \Rightarrow (\alpha+\beta)\alpha\beta<۰ \Rightarrow \alpha^۲\beta+\alpha\beta^۲<۰$$

۹۳. گزینه ۱

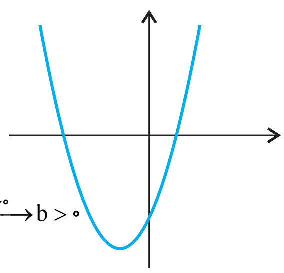
$$\begin{cases}\text{سهمی رو به بالا است} \Rightarrow a>۰\\ x=۰ \Rightarrow f(۰)=c \Rightarrow c>۰\\ \text{محور تقارن سهمی}=\frac{-b}{۲a}>۰ \xrightarrow{a>۰} b<۰\end{cases}$$
$$\Rightarrow abc<۰$$



$$\begin{cases}\text{سهمی رو به پایین است} \Rightarrow a<۰\\ x=۰ \Rightarrow f(۰)=c \Rightarrow c<۰\\ \text{محور تقارن سهمی}=\frac{-b}{۲a}>۰ \xrightarrow{a<۰} b>۰\end{cases}$$
$$\Rightarrow abc>۰$$



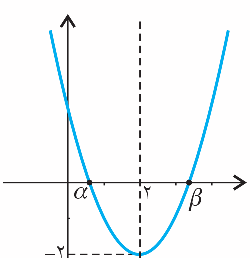
$$\begin{cases}\text{سهمی رو به بالا است} \Rightarrow a>۰\\ x=۰ \Rightarrow f(۰)=c \Rightarrow c<۰\\ \text{محور تقارن سهمی}=\frac{-b}{۲a}<۰ \xrightarrow{a>۰} b>۰\end{cases}$$
$$\Rightarrow abc<۰$$



۹۴. گزینه ۱ سهمی باید رو به پایین باشد، پس ضریب $x^۲$ منفی است. همچنین نباید با محور xها تقاطع داشته باشد، پس $\Delta<۰$.

$$(m-۱)x^۲+\sqrt{۳}x+m=۰ \Rightarrow$$
$$\begin{cases}a=m-۱\\ \Delta=\sqrt{۳}^۲-۴m(m-۱)=-۴m^۲+۴m+۳\end{cases}$$
$$a<۰ \Rightarrow m-۱<۰ \Rightarrow m<۱$$
$$\Delta<۰ \Rightarrow -۴m^۲+۴m+۳<۰ \Rightarrow m^۲-m-\frac{۳}{۴}>۰ \Rightarrow$$
$$\left(m-\frac{۳}{۲}\right)\left(m+\frac{۱}{۲}\right)>۰ \Rightarrow m>\frac{۳}{۲} \text{ یا } m<-\frac{۱}{۲} \xrightarrow{m<۱} m<-\frac{۱}{۲}$$

۹۵. گزینه ۳



$$f(x)=x^۲-۴x+k \Rightarrow$$
$$-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۴}{۲}=۲$$
$\Rightarrow$ محور تقارن : $x=۲$

با توجه به شکل نمودار تابع از نقطهٔ $(۲,-۲)$ می‌گذرد:

$$f(x)=x^۲-۴x+k \xrightarrow{(۲,-۲)} -۲=۲^۲-۴\times۲+k \Rightarrow$$
$$k=۲ \Rightarrow f(x)=x^۲-۴x+۲$$

طول پاره‌خط بین α و β برابر است با قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها:

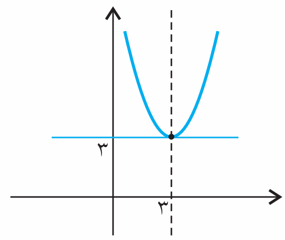
$$\left.\begin{matrix}\alpha=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}\\ \beta=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\end{matrix}\right\} \Rightarrow |\beta-\alpha|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{۸}}{۱}=۲\sqrt{۲}$$

۹۶. گزینه ۳

$f(x)=x^۲-۶x+k\Rightarrow$

$-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۶}{۲}=۳$

$\Rightarrow$ محور تقارن : $x=۳$

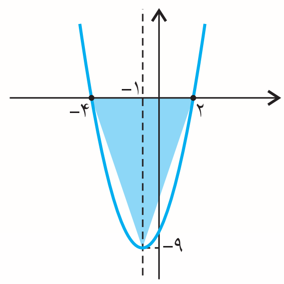


با توجه به شکل، نمودار تابع از نقطهٔ $(۳,۳)$ می‌گذرد:

$$f(x)=x^۲-۶x+k\xrightarrow{(۳,۳)}۳=۳^۲-۶\times۳+k\Rightarrow k=۱۲$$

۹۷. گزینه ۴

$y=x^۲+۲x-۸=(x-۲)(x+۴)$



پس صفرهای تابع ۲ و ۴- است و رأس سهمی روی خط $x=-۱$ است:

$y=x^۲+۲x-۸\xrightarrow{x=-۱}y=-۹$

مساحت مثلث می‌شود: $\frac{۹\times۶}{۲}=۲۷$

۹۸. گزینه ۴

$$f(x)>\frac{۷}{۲}\Rightarrow-\frac{۱}{۲}x^۲+۲x+۶>\frac{۷}{۲}\Rightarrow-x^۲+۴x+۱۲>۷\Rightarrow$$

$$-x^۲+۴x+۵>۰\Rightarrow x^۲-۴x-۵<۰\Rightarrow(x+۱)(x-۵)<۰\Rightarrow$$

$$-۱<x<۵\Rightarrow x\in(-۱,۵)\Rightarrow b=۵\,,\,a=-۱\Rightarrow b-a=۶$$

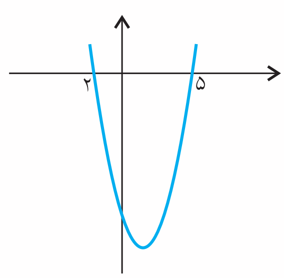
۹۹. گزینه ۱ باید حاصل‌ضرب ریشه‌ها $\left(\frac{c}{a}\right)$، مقداری منفی باشد.

$$y=(m+۲)x^۲+۳x+۱-m\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{۱-m}{m+۲}$$

$\frac{c}{a}<۰\Rightarrow\frac{۱-m}{m+۲}<۰\Rightarrow\frac{m-۱}{m+۲}>۰\Rightarrow m>۱$ یا $m<-۲$

۱۰۰. گزینه ۳

$y=x^۲-۳x-۱۰=(x-۵)(x+۲)$



پس صفرهای تابع ۵ و ۲- است، پس حداقل باید ۲ واحد به سمت راست منتقل شود.

۱۰۱. گزینه ۱ باید دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد، پس $\Delta>۰$.

باید حاصل‌ضرب ریشه‌ها مثبت باشد، پس $\frac{c}{a}>۰$.

باید مجموع ریشه‌ها منفی باشد، پس $-\frac{b}{a}<۰$.

$$ax^۲+(a+۳)x-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}\Delta=(a+۳)^۲+۴a=a^۲+۱۰a+۹\\ \frac{c}{a}=-\frac{۱}{a}\\ -\frac{b}{a}=-\frac{a+۳}{a}\end{cases}$$

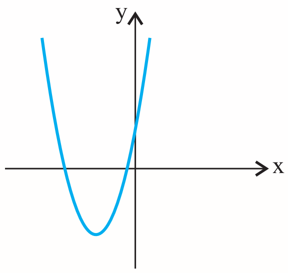
$\Delta>۰\Rightarrow a^۲+۱۰a+۹>۰\Rightarrow(a+۱)(a+۹)>۰\Rightarrow a>-۱$ یا $a<-۹$

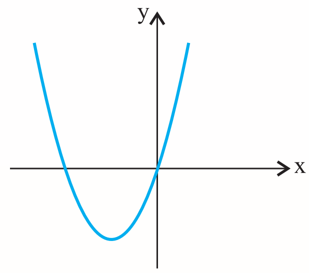
$\frac{c}{a}>۰\Rightarrow-\frac{۱}{a}>۰\Rightarrow a<۰$

$-\frac{b}{a}<۰\Rightarrow-\frac{a+۳}{a}<۰\xrightarrow{a<۰}-(a+۳)>۰\Rightarrow a<-۳$

با توجه به اشتراک جواب‌ها، پاسخ $a<-۹$ است.

۱۰۲. گزینه ۱ باید نمودار تابع به‌صورت یکی از شکل‌های زیر باشد:





بنابراین باید $\Delta>۰$ و همچنین تابع دارای دو ریشهٔ منفی یا یک ریشهٔ منفی و یک ریشهٔ مساوی با ۰ باشد.

$\Delta>۰\Rightarrow(۲a+۱)^۲-۴a(a-۱)>۰\Rightarrow۸a+۱>۰\Rightarrow a>-\frac{۱}{۸}$ I

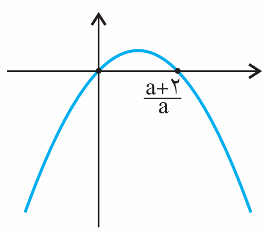
$\frac{c}{a}\geq۰\Rightarrow\frac{a-۱}{a}\geq۰\Rightarrow a<۰$ یا $a\geq۱$ II

$-\frac{b}{a}<۰\Rightarrow-\frac{۲a+۱}{a}<۰\Rightarrow\frac{۲a+۱}{a}>۰\Rightarrow a<-\frac{۱}{۲}$ یا $a>۰$ III

$\mathrm{I}\cap\mathrm{II}\cap\mathrm{III}\Rightarrow a\geq۱$

۱۰۳. گزینه ۱ صفرهای تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$ax^۲-(a+۲)x=۰\Rightarrow x(ax-(a+۲))=۰\Rightarrow x=۰\,,\,x=\frac{a+۲}{a}$$

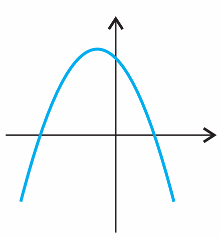


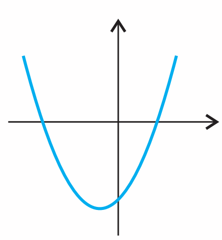
پس تابع از نقاط $(۰,۰)$ و $\left(\frac{a+۲}{a},۰\right)$ می‌گذرد. نمودار تابع باید به شکل مقابل باشد تا از ناحیهٔ دوم نگذرد، پس $\frac{a+۲}{a}\geq۰$ و ضریب $x^۲$ منفی است:

$$\left.\begin{matrix}\frac{a+۲}{a}\geq۰\\ a<۰\end{matrix}\right\}\Rightarrow a+۲\leq۰\Rightarrow a\leq-۲$$

با اشتراک جواب‌ها، پاسخ مسئله $a\leq-۲$ است.

۱۰۴. گزینه ۲ سهمی باید به یکی از دو شکل زیر باشد. در هر دو حالت حاصل‌ضرب ریشه‌ها منفی است، پس $\frac{c}{a}<۰$ و $\Delta>۰$.





$\Delta>۰\Rightarrow-m^۲+۲m+۴>۰\Rightarrow۱-\sqrt{۵}<m<۱+\sqrt{۵}$ I

$y=(m+۱)x^۲-۲x+(m-۳)\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{m-۳}{m+۱}$

$\frac{c}{a}<۰\Rightarrow\frac{m-۳}{m+۱}<۰\Rightarrow-۱<m<۳$ II

$\mathrm{I}\cap\mathrm{II}\Rightarrow-۱<m<۳$

۱۰۵. گزینه ۲

$$x^2 - kx + 3k - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta = k\\ \alpha\beta = 3k-2\end{cases}$$

$$\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = k^2 - 2(3k-2) = k^2-6k+4$$

مینیمم عبارت k^2-6k+4 را بررسی می‌کنیم:

$$k^2-6k+4 \to a=1\,,\ b=-6$$

$$k = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

۱۰۶. گزینه ۲

$$x^2-(m+1)x+6=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=m+1\\ \alpha\beta=6\end{cases}$$

$$\alpha<-3<\beta \Rightarrow \begin{cases}\alpha+3<0\\ \beta+3>0\end{cases} \Rightarrow (\alpha+3)(\beta+3)<0\Rightarrow$$

$$\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9<0 \Rightarrow 6+3(m+1)+9<0\Rightarrow$$

$$3m+18<0\Rightarrow m<-6$$

صفرهای توابع درجه بالاتر از ۲

۱۰۷. گزینه ۲

$$(x^2+2)^2 - 5(x^2+2)+4=0 \xrightarrow{x^2+2=t} t^2-5t+4=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=1\Rightarrow x^2+2=1\Rightarrow x^2=-1\to \text{جواب ندارد} \\ t=4 \Rightarrow x^2+2=4\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

۱۰۸. گزینه ۲

$$(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)=5 \xrightarrow{x^2-2x=t} t^2+4t=5$$

$$\Rightarrow t^2+4t-5=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases} t=1\Rightarrow x^2-2x=1\Rightarrow x^2-2x-1=0\Rightarrow x=1\pm\sqrt{2} \\ t=-5\Rightarrow x^2-2x=-5\Rightarrow x^2-2x+5=0\xrightarrow{\Delta<0} \text{جواب ندارد}\end{cases}$$

پس دو ریشهٔ $1+\sqrt{2}$ و $1-\sqrt{2}$ را دارد که یکی مثبت و دیگری منفی است.

۱۰۹. گزینه ۳

$$x^4+2ax^2+a^2-1=0 \xrightarrow{x^2=t} t^2+2at+a^2-1=0$$

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم باشند، آنگاه:

$$\begin{cases} t=\alpha\Rightarrow x^2=\alpha \\ t=\beta\Rightarrow x^2=\beta\end{cases}$$

برای آن‌که چهار ریشهٔ متمایز داشته باشیم، باید $\alpha,\beta>0$ و $\Delta>0$ باشند، پس $\frac{c}{a}>0$ و $-\frac{b}{a}>0$.

$$t^2+2at+a^2-1=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{c}{a}>0\Rightarrow a^2-1>0\Rightarrow a>1 \text{ یا } a<-1 \\ -\frac{b}{a}>0\Rightarrow -2a>0\Rightarrow a<0 \\ \Delta>0\Rightarrow (2a)^2-4(a^2-1)>0\to \text{همواره برقرار است}\end{cases}$$

با اشتراک جواب‌ها، پاسخ $a<-1$ است.

۱۱۰. گزینه ۴

$$f(x)=x^3+ax^2-14x+b$$

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=0\Rightarrow 2^3+4a-28+b=0\Rightarrow 4a+b=20 \\ f(3)=0\Rightarrow 3^3+9a-42+b=0\Rightarrow 9a+b=15\end{array}\right\}\Rightarrow a=-1, b=24$$

$$\Rightarrow f(x)=x^3-x^2-14x+24$$

$f(x)$ بر عامل‌های $x-2$ و $x-3$ بخش‌پذیر است، پس بر $(x-2)(x-3)$ بخش‌پذیر است.

$$(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^3}-x^2-14x+24 & x^2-5x+6 \\ \hline \cancel{-x^3}+5x^2-6x & x+4 \\ \hline \quad \cancel{4x^2}\ \cancel{-20x}+\cancel{24} & \\ \quad \cancel{-4x^2}+\cancel{20x}\ \cancel{-24} & \\ \hline \qquad 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x)=(x+4)(x-2)(x-3)$$

پس $x=-4$ صفر دیگر تابع است.

۱۱۱. گزینه ۳

$$f(x)=0\Rightarrow 2x^3+2x^2-12x=0\Rightarrow 2x(x^2+x-6)=0\Rightarrow$$

$$2x(x+3)(x-2)$$

پس ۰، ۲ و ۳- صفرهای تابع هستند.

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0^2+2^2+(-3)^2=13$$

۱۱۲. گزینه ۴ $f(x)=x^4-ax^3-8x$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است.

پس $f(-2)=0$.

$$f(-2)=0\Rightarrow (-2)^4-a(-2)^3-8(-2)=0\Rightarrow 16+8a+16=0\Rightarrow$$

$$a=-4\Rightarrow f(x)=x^4+4x^3-8x=x(x^3+4x^2-8)$$

پس عبارت x^3+4x^2-8 باید عامل $x+2$ را داشته باشد.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^3}+4x^2-8 & x+2 \\ \hline \cancel{-x^3}-2x^2 & x^2+2x-4 \\ \hline \quad \cancel{2x^2}-8 & \\ \quad \cancel{-2x^2}-4x & \\ \hline \quad \cancel{-4x}\ \cancel{-8} & \\ \quad \cancel{4x}+\cancel{8} & \\ \hline \qquad 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x)=x(x+2)(x^2+2x-4)=x(x+2)(x+1+\sqrt{5})(x+1-\sqrt{5})$$

$$f(x)=0\Rightarrow x=0,-2,-1-\sqrt{5},-1+\sqrt{5}$$

۱۱۳. گزینه ۳

$$f(x)=2x^3-5x^2-x-m$$

$$f(2)=0\Rightarrow 2\times 2^3-5\times 2^2-2-m=0\Rightarrow m=-6$$

$$\Rightarrow f(x)=2x^3-5x^2-x+6$$

تابع $f(x)$ به ازای $x=2$ صفر شده است، پس عامل $x-2$ دارد.

پس $f(x)$ را بر $x-2$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} \cancel{2x^3}-5x^2-x+6 & x-2 \\ \cline{2-2} \underline{\cancel{-2x^3}+4x^2\qquad\quad} & 2x^2-x-3 \\ \qquad\cancel{-x^2}-x & \\ \qquad\underline{\cancel{x^2}-2x} & \\ \qquad\quad\cancel{-3x}\cancel{+6} & \\ \qquad\quad\underline{\cancel{3x}\cancel{-6}} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x)=(x-2)(2x^2-x-3)=(x-2)(2x-3)(x+1)$$

$$f(x)=0 \Rightarrow x=2,\frac{3}{2},-1$$

۱۱۴. گزینهٔ ۴ هنگامی که یک دنبالهٔ هندسی نزولی (یا صعودی) باشد، آنگاه $q>0$. اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی از دنبالهٔ هندسی باشند، آنگاه $b^2=ac$ است.

$$(2x)^2=(x^2-2)(x^2+4) \Rightarrow 4x^2=x^4+2x^2-8 \Rightarrow$$

$$x^4-2x^2-8=0 \xrightarrow{x^2=t} t^2-2t-8=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t=-2 \Rightarrow x^2=-2 & \text{غیرقابل قبول} \\ t=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2 & \text{یا } -2 \end{cases}$$

اگر $x=-2$ باشد، آنگاه جملات اول و سوم مثبت و جملهٔ دوم منفی می‌شود که با فرض $q>0$ در تناقض است، پس $x=2$.

$$x^2+4\,,\,2x\,,\,x^2-2 \xrightarrow{x=2} 8,4,2 \Rightarrow a=8\,,\,q=\frac{1}{2}$$

$$S_7=a_1\frac{1-q^7}{1-q}=8\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\frac{1}{2}}=\frac{127}{8}$$

۱۱۵. گزینهٔ ۳

$$f(x-1)=0 \xrightarrow{x=7} f(6)=0$$

از طرفی می‌دانیم ۱ و ۴ نیز صفرهای تابع $f(x)$ هستند، پس ۱، ۴ و ۶ صفرهای تابع $f(x)$ هستند.

۳ یکی از صفرهای تابع $f(x-2)$ است. $f(1)=0 \Rightarrow f(3-2)=0 \Rightarrow$

۶ یکی از صفرهای تابع $f(x-2)$ است. $f(4)=0 \Rightarrow f(6-2)=0 \Rightarrow$

۸ یکی از صفرهای تابع $f(x-2)$ است. $f(6)=0 \Rightarrow f(8-2)=0 \Rightarrow$

۱۱۶. گزینهٔ ۲

$$3x^4+5x^2+a^2=1 \Rightarrow 3x^4+5x^2+a^2-1=0$$

$$\xrightarrow{x^2=t} 3t^2+5t+a^2-1=0$$

اگر α و β جواب‌های معادلهٔ بالا (با مجهول t) باشند، آنگاه:

$$\begin{cases} t=\alpha \Rightarrow x^2=\alpha \\ t=\beta \Rightarrow x^2=\beta \end{cases}$$

اگر α و β متمایز هر دو مثبت باشند، برای x چهار جواب متمایز وجود خواهد داشت. اگر هر دو منفی باشند، برای x جواب وجود نخواهد داشت. پس باید یکی مثبت و دیگری منفی باشد:

$$\alpha\beta<0 \Rightarrow \frac{c}{a}<0$$

$$3t^2+5t+a^2-1=0 \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{a^2-1}{3} \xrightarrow{\frac{c}{a}<0} \frac{a^2-1}{3}<0$$

$$\Rightarrow -1<a<1$$

البته حالت $\alpha=\beta$ را نیز باید در نظر گرفت. پس $\Delta=0$:

$$3t^2+5t+a^2-1=0 \Rightarrow \Delta=5^2-12(a^2-1)=37-12a^2$$

$$\xrightarrow{\Delta=0} 37-12a^2=0 \Rightarrow a^2=\frac{37}{12}$$

$$3t^2+5t+a^2-1=0 \xrightarrow{a^2=\frac{37}{12}} 3t^2+5t+\frac{25}{12}=0 \Rightarrow t=-\frac{5}{6}$$

در این حالت $x^2=-\frac{5}{6}$ جواب ندارد.

۱۱۷. گزینهٔ ۳

$$f(x)=3x^3+18x^2+ax=3x\left(x^2+6x+\frac{a}{3}\right)$$

پس $x=0$ یکی از صفرهای تابع را می‌دهد. برای این‌که صفرهای تابع تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند، دو حالت داریم:

ـ ریشه‌ها α، ۰ و $-\alpha$ باشند.

ـ ریشه‌ها ۰، α و ۲α باشند.

حالت اول:

ضریب x^2 برابر ۰ است $f(x)=kx(x+\alpha)(x-\alpha)=kx^3-k\alpha^2x \to$

ولی ضریب x^2 باید ۱۸ باشد، پس این حالت جواب ندارد.

حالت دوم:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=kx(x+\alpha)(x+2\alpha)=kx^3+3\alpha kx^2+2\alpha^2kx \\ f(x)=3x^3+18x^2+ax \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow k=3\,,\,\alpha=2 \Rightarrow a=2\alpha^2k \Rightarrow a=24$$

۱۱۸. گزینهٔ ۳

$$f(x)=0 \Rightarrow (x^2+3x+1)^3-(x^2+3x+1)=0$$

$$\xrightarrow{x^2+3x+1=t} t^3-t=0 \Rightarrow t(t^2-1)=0 \Rightarrow t(t-1)(t+1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=0 \Rightarrow x^2+3x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2} \\ t=-1 \Rightarrow x^2+3x+1=-1 \Rightarrow x^2+3x+2=0 \Rightarrow x=-1,-2 \\ t=1 \Rightarrow x^2+3x+1=1 \Rightarrow x^2+3x=0 \Rightarrow x=0,-3 \end{cases}$$

پس تابع ۶ صفر دارد.

۱۱۹. گزینهٔ ۳ $f(x)$ یک چندجمله‌ای درجه ۴ است. با توجه به این‌که ۰، ۱ و ۲ صفرهای آن هستند، نتیجه می‌گیریم $f(x)$ به یکی از سه حالت زیر است:

۱) $f(x)=x^2(x-1)(x-2)=x^2(x^2-3x+2)=x^4-3x^3+2x^2$
$\Rightarrow a=-3$

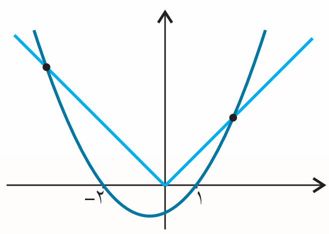
۲) $f(x)=x(x-1)^2(x-2)=(x^2-2x+1)(x^2-2x)=$
$x^4-4x^3+5x^2-2x \Rightarrow a=-4$

۳) $f(x)=x(x-1)(x-2)^2=(x^2-x)(x^2-4x+4)=$
$x^4-5x^3+8x^2-4x \Rightarrow a=-5$

روش هندسی (نموداری) حل معادلات

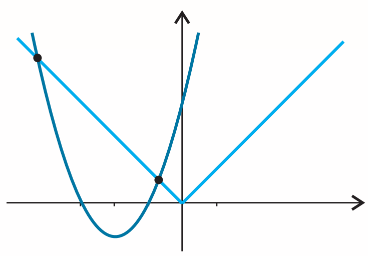
۱۲۰. گزینه ۲ فرض می‌کنیم $f(x)=x^2+x-2$:

$f(x)=(x+2)(x-1)$



با رسم نمودار $f(x)=(x+2)(x-1)$ و $g(x)=|x|$، نمودارها دو نقطهٔ تلاقی خواهند داشت. پس معادلهٔ $f(x)=g(x)$ دارای دو جواب است.

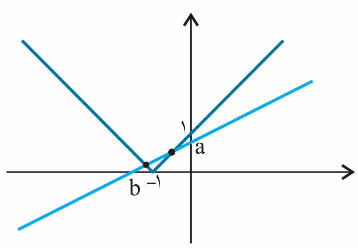
۱۲۱. گزینه ۳ نمودار توابع $f(x)=x^2+4x+3$ و $g(x)=|x|$ را رسم می‌کنیم:



$f(x)=x^2+4x+3=$
$(x+1)(x+3)$

مطابق شکل، دو جواب منفی دارد.

۱۲۲. گزینه ۱ نمودار توابع $f(x)=|x+1|$ و $g(x)=\frac{x}{2}+a$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به شکل، باید $b<-1$ باشد:

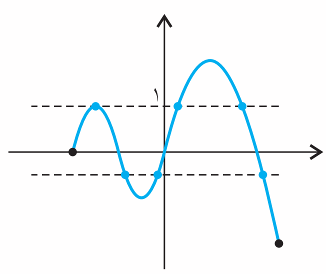


$g(x)=\frac{x}{2}+a \xrightarrow{f(b)=0}$

$0=\frac{b}{2}+a \Rightarrow b=-2a$

$b<-1 \Rightarrow -2a<-1 \Rightarrow$
$a>\frac{1}{2}$

۱۲۳. گزینه ۳



نمودارهای $y=f(x)$ و $y=k$ به ازای $-1<k<0$ و $k=1$ در سه نقطه متقاطع‌اند.

۱۲۴. گزینه ۱

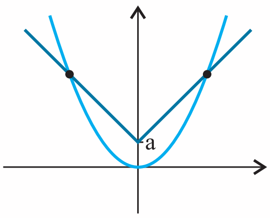
$x^2=2x+a \Rightarrow x^2-2x-a=0$

معادلهٔ درجه دوم بالا باید یک جواب داشته باشد، پس باید $\Delta=0$ باشد:

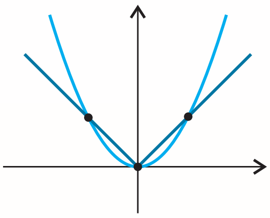
$\Delta=(-2)^2+4a \xrightarrow{\Delta=0} (-2)^2+4a=0 \Rightarrow a=-1$

۱۲۵. گزینه ۳ با توجه به مقدار a، نمودار توابع $y=x^2$ و $y=|x|+a$ به یکی از پنج حالت زیر می‌شود:

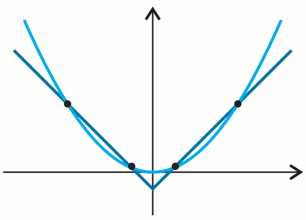
حالت اول:
دو جواب وجود داشته باشد:



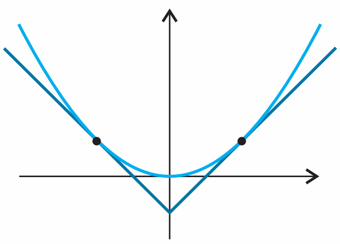
حالت دوم:
سه جواب وجود داشته باشد.



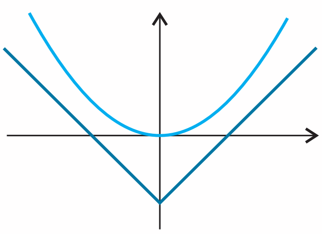
حالت سوم:
چهار جواب وجود داشته باشد.



حالت چهارم:
دو جواب وجود داشته باشد.



حالت پنجم:
جواب وجود نداشته باشد.



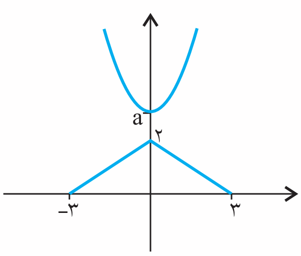
حالت سوم را بررسی می‌کنیم. در هر کدام از حالات $x>0$ و $x<0$ باید دو جواب وجود داشته باشد، پس $\Delta>0$ است:

$x^2=|x|+a \Rightarrow$

$$\begin{cases} x>0 \rightarrow x^2=x+a \Rightarrow x^2-x-a=0 \xrightarrow{\Delta>0} a>-\frac{1}{4} \\ x<0 \rightarrow x^2=-x+a \Rightarrow x^2+x-a=0 \xrightarrow{\Delta>0} a>-\frac{1}{4} \end{cases}$$

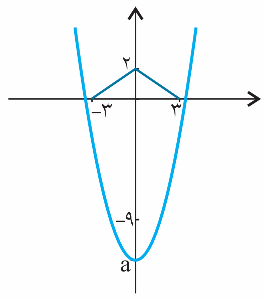
در این حالت $a<0$ است، پس پاسخ مسئله به ازای $-\frac{1}{4}<a<0$ رخ می‌دهد.

۱۲۶. گزینه ۱ باید نمودارهای $y=f(x)$ و $y=x^2+a$ دو نقطهٔ تقاطع داشته باشند.

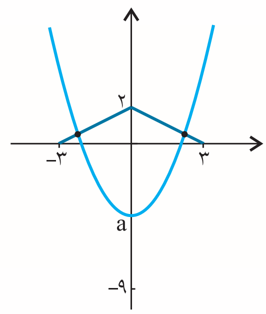


اگر $a>2$ باشد، دو نمودار یکدیگر را قطع نمی‌کنند. اگر $a=2$ باشد، دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند

اگر $a<-۹$ آنگاه دو نمودار یکدیگر را قطع نمی‌کنند. (چرا؟)

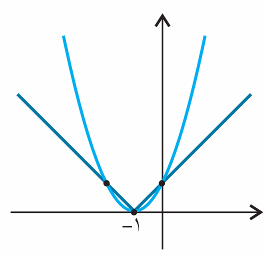


اگر $-۹\le a<۲$ دو نمودار یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.

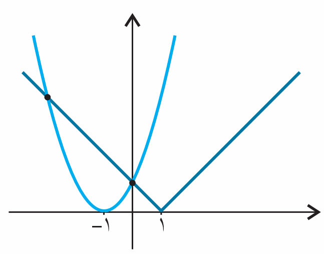


۱۲۷. گزینه ۱ در هر مورد نمودارهای $y=x^۲+۲x+۱=(x+۱)^۲$ و $y=|x+a|$ را رسم می‌کنیم (a می‌تواند ۱، ۲، ۱- و صفر باشد)، سپس تعداد نقاط تقاطع آن‌ها را به‌دست می‌آوریم.

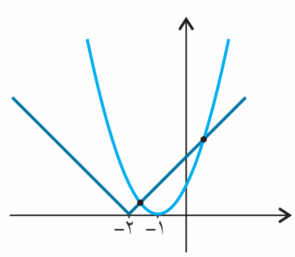
گزینهٔ ۱: نمودارهای $y=(x+۱)^۲$ و $y=|x+۱|$ در سه نقطه متقاطع هستند.



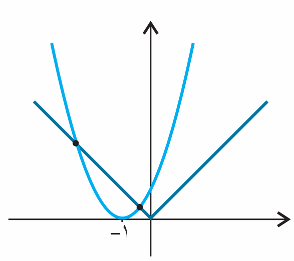
گزینهٔ ۲: نمودارهای $y=(x+۱)^۲$ و $y=|x-۱|$ در دو نقطه متقاطع هستند.



گزینهٔ ۳: نمودارهای $y=(x+۱)^۲$ و $y=|x+۲|$ در دو نقطه متقاطع هستند.



گزینهٔ ۴: نمودارهای $y=(x+۱)^۲$ و $y=|x|$ در دو نقطه متقاطع هستند.



درس سوم: معادلات گویا و گنگ

معادلات شامل عبارات گویا

۱۲۸. گزینه ۲

$۱۱\times\frac{۴۰}{۱۰۰}+۴\times\frac{۷۰}{۱۰۰}=۴/۴+۲/۸=۷/۲\to$ وزن رنگ خالص

$\frac{۷/۲}{۱۱+۴}=\frac{۷/۲}{۱۵}\to$ غلظت رنگ مخلوط شده

اگر x وزن آب تبخیر شده باشد، داریم:

$$\frac{۷/۲}{۱۵-x}=\frac{۵۰}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{۷/۲}{۱۵-x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۱۵-x=۱۴/۴\Rightarrow x=۰/۶$$

۱۲۹. گزینه ۲

$۲۵\times\frac{۲۰}{۱۰۰}=۵\to$ میزان نمک موجود در محلول

فرض می‌کنیم x کیلوگرم نمک اضافه کنیم:

$$\frac{۵+x}{۲۵+x}=\frac{۵۰}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{۵+x}{۲۵+x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲(۵+x)=۲۵+x\Rightarrow x=۱۵$$

۱۳۰. گزینه ۲

$$\frac{x}{x-۲}+\frac{۱}{x-۳}=۳\Rightarrow\frac{x(x-۳)+x-۲}{(x-۲)(x-۳)}=۳\Rightarrow\frac{x^۲-۲x-۲}{x^۲-۵x+۶}=۳$$

$$۳(x^۲-۵x+۶)=x^۲-۲x-۲\Rightarrow ۲x^۲-۱۳x+۲۰=۰\Rightarrow x=۴,\frac{۵}{۲}$$

هر دو جواب قابل قبول است، زیرا مخرجی را صفر نمی‌کنند، پس حاصل‌ضرب ریشه‌ها ۱۰ است.

۱۳۱. گزینه ۴

$$\frac{x^۳-x^۲}{x^۲-۱}=\frac{x^۲-x+۱}{x^۳+۱}\Rightarrow\frac{x^۲(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{x^۲-x+۱}{(x+۱)(x^۲-x+۱)}\Rightarrow$$

$$\frac{x^۲}{x+۱}=\frac{۱}{x+۱}\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=۱,-۱$$

هر دو جواب مخرج را صفر می‌کنند، پس معادله جواب ندارد.

۱۳۲. گزینه ۱

$$\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}-\frac{x+۲}{x+۱}=\frac{x}{x-۱}\Rightarrow\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}-\frac{x+۲}{x+۱}-\frac{x}{x-۱}=۰\Rightarrow$$

$$\frac{x^۲+۱-(x+۲)(x-۱)-x(x+۱)}{(x-۱)(x+۱)}=۰\Rightarrow\frac{-x^۲-۲x+۳}{(x-۱)(x+۱)}=۰\Rightarrow$$

$$-x^۲-۲x+۳=۰\Rightarrow x=۱,-۳$$

مخرج دوتا از کسرها به ازای $x=۱$ برابر با صفر می‌شود، پس فقط $x=-۳$ جواب معادله است.

۱۳۳. گزینه ۴ مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{۲}{x(x+۴)}-\frac{۱}{x(x+۲)}+\frac{۳}{(x+۲)(x+۴)}=۰\Rightarrow$$

$$\frac{۲(x+۲)-(x+۴)+۳x}{x(x+۲)(x+۴)}=۰\Rightarrow\frac{۴x}{x(x+۲)(x+۴)}=۰\Rightarrow$$

$$۴x=۰\Rightarrow x=۰$$

اما مخرج دو تا از کسرها به ازای $x=۰$ برابر با صفر می‌شود. پس معادله جواب ندارد.

۱۳۴. گزینه ۱

$$\frac{x^۲-۲x}{x-a}=\frac{a-x}{(x-a)^۲}\Rightarrow\frac{x^۲-۲x}{x-a}=\frac{-(x-a)}{(x-a)^۲}\Rightarrow$$