

به نام خداوند بی‌همتا

زندگی صحنه‌ی یکتای هنرمندی ماست.
هرکسی نغمه‌ی خود خواند و از صحنه رود.
صحنه پیوسته به جاست.

خرم آن نغمه که مردم بسپارند به یاد.

بدون شک یکی از دغدغه‌های داوطلبان کنکور در هفته‌های منتهی به آزمون، مرور و جمع‌بندی کامل مطالب درسی در بازه‌ی زمانی محدود است. مروری کامل، مفید و سریع که بتواند در حداقل زمان ممکن، تمام نکات اصلی و مهم و سؤال برانگیز توسط طراحان کنکور را برای آمادگی و آرامش خاطر بیشتر در اختیار داوطلبان کنکور قرار دهد. کتاب حاضر در راستای مطالب ذکر شده طراحی شده است و به جرأت می‌توان گفت که این اثر، اولین کتاب جمع‌بندی ریاضیات پایه و دیفرانسیل و آمار و مدلسازی می‌باشد که برای داوطلبان کنکور سراسری و دانشگاه آزاد فرصتی مغتنم ایجاد کرده است تا در هفته‌ها یا روزهای نزدیک به آزمون، ضمن مرور و جمع‌بندی کل مطالب درس مربوطه، آمادگی و حسن اعتماد به نفس خود را بالا برده و امیدوارانه‌تر برای شرکت در جلسه آزمون حاضر شوند.

محتوای کتاب:

در این کتاب سعی شده است تمام مطالب و محتوای کتابهای درسی (شامل ریاضیات پایه، آمار و حساب دیفرانسیل و انتگرال) به طور کامل به گونه‌ای آورده شود که داوطلبین گرامی بتوانند در مدت ۲۴ ساعت مفید تمام مباحث را مرور نمایند. کتاب حاضر از ۱۶ فصل مجزا تشکیل شده است. در ابتدای هر فصل یک نمودار درختی ترسیم شده که نمای کلی آن فصل را نمایش می‌دهد. این نمودار شامل قسمت‌های زیر می‌باشد:

الف) عناوین فصل: ساختار کلی مطالب فصل در این قسمت برای سازماندهی ذهن مخاطب ارائه شده است.

ب) طبقه‌بندی تست‌های کنکور: این بخش به دانش‌آموزان عزیز نشان می‌دهد که از مطالب هر فصل چه مدل سؤال‌هایی در کنکور طراحی می‌شود و از هر کدام از این تیپ‌های مختلف مثال‌ها و تمرین‌هایی در فصل آمده است.

ج) تعداد سؤالات مطرح شده در کنکور: این قسمت تعداد سؤالات مطرح شده در

کنکور سراسری و آزاد از هر فصل را به تفکیک نشان می‌دهد که در واقع به نحوی نشان‌دهنده میزان اهمیت آن فصل هم می‌باشد. در متن هر فصل تمام نکات مهم و کلیدی مربوط به آن موضوع آورده شده است، بلافاصله پس از اتمام نکات هر قسمت چند تست نمونه استاندارد آمده است تا دانش‌آموزان عزیز قبل از آزمون سراسری و آزاد تست‌های مشابه کنکور را دیده و همه مطالب را یک بار دوره کرده باشند و در پایان کتاب شش آزمون جامع استاندارد مطابق با آزمون سراسری آورده شده است که می‌بایستی در مدت ۵۰ دقیقه به آن پاسخ دهید.

نحوه استفاده از کتاب:

مشکل اساسی برخی از دانش‌آموزان عزیز این است که در موقع حل مسائل گرفتار رعب و وحشتی هولناک (!) می‌شوند، رفع این مشکل امکان‌پذیر نیست مگر با حل مثال‌های مختلف. ما بر همین اساس ۳۱۰ تست نمونه با جواب کاملاً تشریحی در کتاب آورده‌ایم که شما بتوانید همه مطالب مورد نیازتان را در کمترین زمان ممکن و به صورت گام به گام یاد بگیرید.

مراحل زیر را برای موفقیت خودتان در استفاده از این کتاب انجام دهید:

۱. ابتدا نگاهی به نمای کلی فصل بیاندازید تا مسیر کلی مباحث و موضوعات مهم در ذهن شما مرور شود.

۲. مطالب و نکات کتاب را قبل از تست‌ها مطالعه کنید.

۳. چندین بار فرمول‌ها و روابط و نکات مهم هر قسمت را برای خود بنویسید و مرور کنید

۴. بعد از تسلط کامل بر نکات و فرمول‌ها سعی کنید تست‌های نمونه را بدون نگاه کردن به پاسخ تشریحی آن‌ها، حل کنید.

۵. در صورتی که از حل مسأله بازماندید، جواب تشریحی آن را مطالعه کرده و دوباره مسأله را خودتان حل کنید.

۶. بعد از انجام ۵ مرحله‌ی مذکور و رعایت تمام موارد، در ۶ روز مختلف و در مدت زمان ۵۰ دقیقه به پنج آزمون جامع که در انتهای کتاب آورده شده است پاسخ دهید و میزان آمادگی خود را در این درس بررسی کنید.

توصیه: اگر بند ششم از مطالب فوق را انجام ندهید مطمئن باشید توفیق چندانی نخواهید داشت و بازهم سر جای اول خواهید بود. ما با اطمینان کامل می‌توانیم بگوییم که با حل ۷۵۰ تست آورده شده در این کتاب می‌توانید بیش از ۸۵ درصد سؤالات کنکور را پاسخ دهید. مطمئن باشید که نتیجه این زحمت و تلاش را بعد از آزمون سراسری و آزاد خواهید دید.

۹	فصل اول	آمار و مدل سازی
۲۳	فصل دوم	بخش پذیری
۲۹	فصل سوم	نظریه معادلات
۴۹	فصل چهارم	بسط دو جمله ای
۵۳	فصل پنجم	مثلثات
۸۷	فصل ششم	تابع و اعمال روی تابع
۱۰۱	فصل هفتم	انواع تابع
۱۲۳	فصل هشتم	تابع نمایی و لگاریتمی
۱۳۱	فصل نهم	دستگاه اعداد
۱۳۷	فصل دهم	الگو و دنباله
۱۵۹	فصل یازدهم	سری
۱۷۳	فصل دوازدهم	حد
۱۹۹	فصل سیزدهم	پیوستگی
۲۱۱	فصل چهاردهم	مجانب
۲۲۷	فصل پانزدهم	مشتق
۲۵۹	فصل شانزدهم	کاربرد مشتق
۳۱۳	فصل هفدهم	انتگرال
۳۴۳	فصل هجدهم	آزمون های جامع

فصل دوازدهم

حد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$





۶ روش‌های رفع ابهام:

۱. هم ارزی

۲. قاعده‌ی هوییتال

۶-۱. توابع هم ارز:

دو تابع f و g وقتی $x \rightarrow x_1$ هم ارز یکدیگرند، هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

هم ارزی‌های مثلثاتی

	تابع	هم‌ارز	تابع	هم‌ارز
$u \rightarrow 0$	$\sin^m u$	u^m	$u - \sin u$	$\frac{1}{6}u^3$
	$\tan^m u$	u^m	$\tan u - u$	$\frac{1}{3}u^3$
	$1 - \cos^m u$	$\frac{m}{2}u^2$	$\tan u - \sin u$	$\frac{1}{2}u^3$
	$(\sin^{-1} u)^m$	u^m	$(\tan^{-1} u)^m$	u^m
$u \rightarrow 1^-$	$\cos^{-1} u$	$\sqrt{1-u^2}$		

- اگر به ازای x_0 ، کمان \sin ، \tan برابر صفر شود، از عنوان تابع صرف‌نظر کنید.
- در توابع جبری وقتی $x \rightarrow 0$ عبارت داده شده با کوچک‌ترین توان خود هم ارز می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (ax + bx^2 + cx^3 + \dots) \approx \lim_{x \rightarrow 0} (ax)$$

- در توابع جبری وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ عبارت داده شده با بزرگ‌ترین توان خود هم ارز می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots} \right) \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{ax^n}{a'x^m} \right) = \begin{cases} 0 & ; m > n \\ \frac{a}{a'} & ; m = n \\ \infty & ; m < n \end{cases}$$

- در مواردی که جملات تابع، قرینه و حذف می‌شوند، نمی‌توان از هم ارزی استفاده کرد.

- **هم‌ارزی برنولی:** در توابع به فرم $y = \sqrt[n]{1+f(x)}$ وقتی $f(x) \rightarrow 0$ تابع هم‌ارز $1 + \frac{f(x)}{n}$ می‌باشد.

- در توابع نمایی به فرم $y = a^x + b^x$ که $a > b$ می‌باشد هرگاه $x \rightarrow +\infty$ تابع هم‌ارز a^x بوده و هرگاه $x \rightarrow -\infty$ تابع هم‌ارز b^x می‌باشد.

(سراسری ریاضی ۸۵)

● حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{2 - \sqrt{4 - x^2}}$ کدام است؟

- ۱۸ (۴) ۱۶ (۳) ۱۲ (۲) ۸ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{2 - \sqrt{4 - x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x \sin(-x)}{4 - 4 + x^2} \times (2 + \sqrt{4 - x^2})$$

پاسخ:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \times \frac{\sin 2x}{x} \times \frac{\sin x}{x} \right) = 2 \times 2 = 4$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) پاسخ صحیح است.

(سراسری ریاضی ۸۵)

● حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cos^{-1} x}{\sqrt{x - x^2}}$ کدام است؟

- $-\sqrt{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۱)

پاسخ:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cos^{-1} x}{\sqrt{x - x^2}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2\sqrt{x-x^2}}{(1-2x)\sqrt{1-x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2\sqrt{x} \times \sqrt{1-x}}{(1-2x) \times \sqrt{1+x} \times \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2\sqrt{x}}{(1-2x) \times \sqrt{1+x}} = \frac{-2}{-\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) پاسخ صحیح است.

● حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 [2x] - x}{3x^2 - 2x - 1}$ کدام است؟

- $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [2x] = [2^-] = 1$$

پاسخ:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 [2x] - x}{3x^2 - 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{3x^2 - 2x - 1} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 1}{6x - 2} = \frac{1}{4}$$

بنابراین گزینه (۱) پاسخ صحیح است.

(آزاد ریاضی ۸۸)

● حد تابع $y = \frac{\tan 2x \cdot \cos x}{\cos 4x - 1}$ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

- $\frac{1}{16}$ (۴) $-\frac{1}{16}$ (۳) $-\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۱)

تست نمونه

• حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$ کدام است؟

- (۱) e (۲) e^2 (۳) e^{-1} (۴) e^{-2}

پاسخ: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2$

بنابراین گزینه‌ی (۲) پاسخ صحیح است.

• حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \tan x)^{\cot 2x}$ کدام است؟

- (۱) e (۲) e^2 (۳) \sqrt{e} (۴) ∞

پاسخ:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \tan x)^{\cot 2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \tan x)^{\frac{1}{\tan 2x}} \sim \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{2x}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

بنابراین گزینه‌ی (۳) پاسخ صحیح است.

۸ حد بن‌نهایت:

حد تابع $f(x)$ وقتی x به x_0 میل می‌کند، $+\infty$ است هرگاه وقتی x به اندازه کافی به x_0 نزدیک شود، $f(x)$ از هر عدد بسیار بزرگ و مثبتی، بزرگ‌تر شود:
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

حد تابع $f(x)$ وقتی x به x_0 میل می‌کند، $-\infty$ است هرگاه وقتی x به قدر کافی به x_0 نزدیک شود، $f(x)$ از هر عدد منفی کوچکی، کوچک‌تر شود:
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

• هرگاه a یک عدد حقیقی مخالف صفر باشد داریم:

$$\begin{cases} a > 0 \Rightarrow \frac{a}{0^+} = +\infty, \frac{a}{0^-} = -\infty \\ a < 0 \Rightarrow \frac{a}{0^+} = -\infty, \frac{a}{0^-} = +\infty \end{cases}$$

تست نمونه

• اگر $f(x) = \frac{2x+5}{x^2-4x+3}$ و $g(x) = 2^x$ آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(f(x))$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $+\infty$ (۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: $f(x) = \frac{2x+5}{(x-1)(x-3)} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{7}{(0^+)(-2)} = \frac{7}{0^-} = -\infty$