

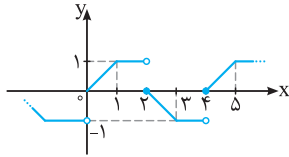
۱۵۴۵☆ در صورتی که  $\tan(\alpha + 15) = \frac{1}{4}$ ، حاصل  $\cot(6^\circ - 2\alpha)$  کدام است؟

- $\frac{5}{3}$  (۴)       $\frac{3}{5}$  (۳)       $\frac{15}{8}$  (۲)       $\frac{8}{15}$  (۱)

قسمت ششم: تناوب و توابع مثلثاتی

(ابتدا درس مربوط به این قسمت را در جلد آموزش مطالعه نمایید.)

دوره تناوب



۱۵۴۶☆ دوره تناوب تابع  $f$  که نمودار آن به صورت مقابل می باشد، کدام است؟

- ۲ (۲)      ۱ (۱)  
۴ (۴)      ۳ (۳)

۱۵۴۷☆ دوره تناوب تابع با ضابطه  $f(x) = 5 \cos(\sqrt{2}x) - 3$  کدام است؟

- $\sqrt{2}\pi$  (۴)       $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$  (۳)       $\frac{2\pi}{5}$  (۲)       $2\pi$  (۱)

۱۵۴۸☆ دوره تناوب تابع با ضابطه  $y = -\pi \sin(\frac{1}{4}(x-2))$  کدام است؟

- ۲ (۴)       $4\pi$  (۳)       $2\pi$  (۲)       $\pi$  (۱)

۱۵۴۹☆ نمودار تابع  $f(x) = 4 - 3 \sin(\frac{\pi}{6} - \frac{b\pi x}{3})$  در هر بازه به طول  $\frac{2}{3}$  تکرار می شود. مقدار مثبت  $b$  کدام است؟

- ۱۲ (۴)      ۹ (۳)      ۶ (۲)      ۲ (۱)

۱۵۵۰☆ دوره تناوب تابع  $y = \cos((2x+1)\pi)$  سه برابر دوره تناوب تابع  $y = \sin((ax+5)\pi)$  است.  $a$  کدام می تواند باشد؟

- ۴ (۴)      ۲ (۳)      ۳ (۲)      ۶ (۱)

۱۵۵۱☆ دوره تناوب تابع  $y = a \sin(\frac{\pi}{4} - bx)$  برابر  $\pi$  است. اگر نمودار این تابع از نقطه  $(\frac{\pi}{4}, 3)$  بگذرد، محور عرض ها را در کدام نقطه قطع می کند؟

- ۲ (۴)      ۳ (۳)      -۳ (۲)      صفر (۱)

۱۵۵۲☆ اگر دوره تناوب تابع  $f(x) = \cos x \cos 3x + \sin x \sin 3x$  برابر  $T_1$  و دوره تناوب تابع  $g(x) = \cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x$  برابر  $T_2$  باشد، کدام گزینه صحیح است؟

- $T_1 = 2T_2$  (۴)       $T_1 + T_2 = 4\pi$  (۳)       $T_2 = 2T_1$  (۲)       $T_1 = T_2$  (۱)

۱۵۵۳☆ دوره تناوب تابع با ضابطه  $f(x) = \sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x$  کدام است؟

- $2\pi$  (۴)       $\pi$  (۳)       $\frac{\pi}{2}$  (۲)       $\frac{\pi}{4}$  (۱)

۱۵۵۴☆ دوره تناوب تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\tan x + \cot x}$  کدام است؟

- $\frac{\pi}{4}$  (۴)       $\frac{\pi}{2}$  (۳)       $\pi$  (۲)       $2\pi$  (۱)

۱۵۵۵☆ دوره تناوب تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\tan 3x - \tan^3 3x}{(1 + \tan^2 3x)^2}$  کدام است؟

- $\pi$  (۴)       $\frac{\pi}{3}$  (۳)       $\frac{\pi}{4}$  (۲)       $\frac{\pi}{6}$  (۱)

۱۵۵۶☆ دوره تناوب تابع  $y = -\pi + \sqrt{2} \tan 3x$  کدام است؟

- $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$  (۴)      ۱ (۳)       $\frac{\pi}{3}$  (۲)       $\frac{2\pi}{3}$  (۱)

۱۵۵۷☆ دوره تناوب تابع  $f(x) = \tan 2x - \cot 2x$  کدام است؟

- $\frac{\pi}{4}$  (۴)       $\frac{\pi}{2}$  (۳)       $2\pi$  (۲)       $\pi$  (۱)

۱۵۵۸☆ اگر دوره تناوب تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\tan ax}{1 - \tan^2 ax}$  برابر  $\frac{3}{2}$  باشد، مقدار  $|a|$  کدام است؟

- $3\pi$  (۴)      ۳ (۳)       $\frac{2\pi}{3}$  (۲)       $\frac{\pi}{3}$  (۱)

(برگرفته از کتاب درسی)

★ ۱۵۵۹. دوره تناوب تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{2}$  (۲)  $\pi$  (۳)  $2\pi$  (۴)  $4\pi$

★ ۱۵۶۰. اگر تابع  $f$  متناوب با دامنه  $\mathbb{R}$  و دوره تناوب آن  $T = 2$  و ضابطه آن در بازه  $[0, 2]$  به صورت  $f(x) = x^2$  باشد،  $f(7/1)$  کدام است؟

- (۱)  $50/41$  (۲)  $49/01$  (۳)  $0/01$  (۴)  $1/21$

★ ۱۵۶۱. دوره تناوب اصلی تابع  $f(x) = \tan x \cot x$  کدام است؟

- (۱) متناوب نیست. (۲) هر مقدار مثبت می تواند باشد. (۳)  $\frac{\pi}{2}$  (۴)  $\pi$

★ ۱۵۶۲. اگر  $f$  تابعی متناوب با دامنه  $\mathbb{R}$  باشد و به ازای هر  $x \in \mathbb{R}$ ، رابطه  $f(x+2)f(x) = 1$  برقرار است. کدام عدد زیر دوره تناوب تابع  $f$  است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس

○ تو این قسمت فقط به حل تستای مربوط به توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس می پردازیم.

(برگرفته از کتاب درسی)

★ ۱۵۶۳. کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $\sin 25^\circ$  یک عدد حقیقی است. (۲) عددی می توان یافت که کسینوس آن برابر  $\frac{\pi}{3}$  باشد.  
 (۳)  $\sin 3^\circ = \sin 30^\circ$  (۴)  $\sin x$  یعنی سینوس زاویه ای از دایره مثلثاتی که اندازه آن  $x$  درجه باشد.

★ ۱۵۶۴. کدام گزینه درست است؟

- (۱) توابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$ ، تنها توابع مثلثاتی هستند.  
 (۲) توابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$  متناوب بوده و دوره تناوب آن ها برابر  $\pi$  است.  
 (۳) اگر نمودار  $y = \sin x$  را به اندازه  $\frac{\pi}{4}$  در راستای محور  $x$  ها به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار  $y = \cos x$  به دست می آید.  
 (۴) دامنه و برد توابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$  به ترتیب  $[-1, 1]$  و  $\mathbb{R}$  می باشد.

★ ۱۵۶۵. دامنه تابع  $f(x) = \frac{x-1}{\sin x}$  به کدام صورت است؟

- (۱)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  (۲)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$   
 (۳)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$  (۴)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

★ ۱۵۶۶. دامنه تابع  $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$  کدام است؟

- (۱)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  (۲)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$   
 (۳)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  (۴)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۹)

★ ۱۵۶۷. در تابع با ضابطه  $f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - 1}$ ، مقدار  $f(-\frac{1}{2}f(x))$  کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) تعریف نشده

(سراسری ریاضی- ۹۱)

★ ۱۵۶۸. با کدام ضابطه  $f(x)$ ، همواره تساوی  $|f(x)| = f(x)^{[x]} (-1)^{[x]}$  برقرار است؟

- (۱)  $\sin \pi x$  (۲)  $\cos \pi x$  (۳)  $\sin 2\pi x$  (۴)  $\cos 2\pi x$

ماکسیمم و مینیمم توابع سینوسی و کسینوسی

(برگرفته از کتاب درسی)

★ ۱۵۶۹. اختلاف بیش ترین مقدار و کم ترین مقدار تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{3} - \pi \sin(2x-1)$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲)  $2\pi$  (۳)  $2\sqrt{3}$  (۴)  $\sqrt{3}$

(برگرفته از کتاب درسی)

★ ۱۵۷۰. در مورد تابع با ضابطه  $f(x) = 3 \cos(\frac{3\pi}{5}x - \frac{\pi}{4}) + 1$  کدام گزینه نادرست است؟  
 $\max = 4$  (۱)  $\min = -4$  (۲)

- (۳)  $T = \frac{10}{3}$  (۴) محور  $y$  ها را در نقطه ای با عرض مثبت قطع می کند.

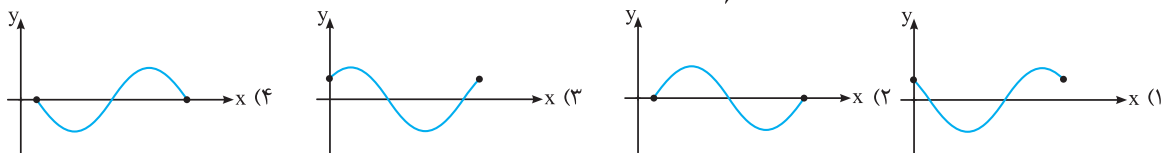
(برگرفته از کتاب درسی)

★ ۱۵۷۱. اگر در مورد تابع  $f$  بدانیم  $\max = 9$ ،  $\min = 3$  و  $T = 3\pi$ ، ضابطه این تابع کدام می تواند باشد؟

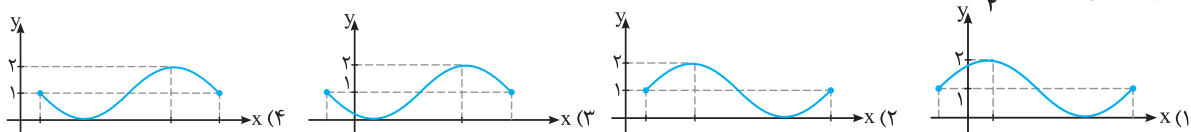
- (۱)  $y = 6 \cos(\frac{2}{3}x) + 3$  (۲)  $y = 3 \cos(\frac{2}{3}x) - 6$  (۳)  $y = 6 \sin(\frac{2}{3}x) + 3$  (۴)  $y = 6 - 3 \sin(\frac{2}{3}x)$

نمودار توابع مثلثاتی

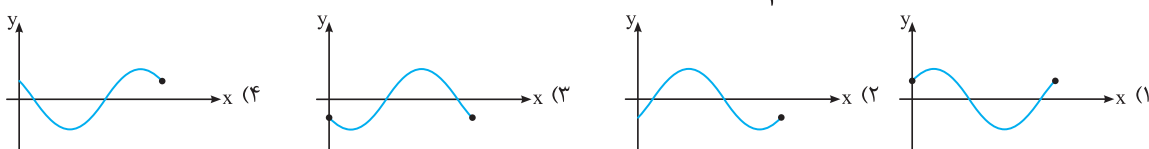
۱۵۷۲☆ کدام یک از نمودارهای زیر، بخشی از نمودار تابع  $y = \cos(x - \frac{\pi}{6})$  است؟



۱۵۷۳☆ نمودار تابع  $y = \sin(\frac{\pi}{4} + x) + 1$  در یک دوره تناوب چگونه است؟



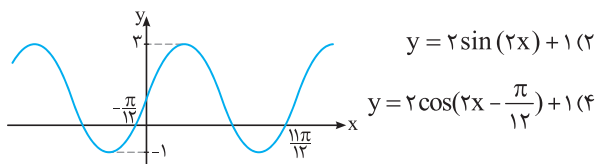
۱۵۷۴☆ کدام نمودار زیر، بخشی از نمودار تابع  $y = \sin(\frac{\pi}{3} - x)$  است؟



۱۵۷۵☆ نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = -2\sin(x + \frac{\pi}{6})$  در بازه  $[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$  از کدام ناحیه عبور نمی‌کند؟

- (۱) فقط ناحیه چهارم
- (۲) فقط ناحیه سوم
- (۳) نواحی سوم و چهارم
- (۴) فقط ناحیه اول

(برگرفته از کتاب درسی)



$$y = 2 \sin(2x) + 1 \quad (۲)$$

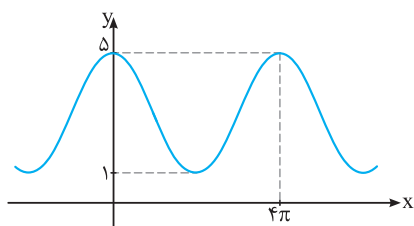
$$y = 2 \cos(2x - \frac{\pi}{12}) + 1 \quad (۴)$$

۱۵۷۶☆ نمودار شکل مقابل، مربوط به کدام گزینه می‌تواند باشد؟

$$y = 3 \sin(\frac{x}{4}) + 1 \quad (۱)$$

$$y = 4 \cos(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{4}) - 1 \quad (۳)$$

(برگرفته از کتاب درسی)



۱۵۷۷☆ نمودار شکل مقابل، مربوط به کدام گزینه می‌تواند باشد؟

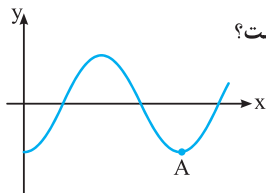
$$y = 3 \cos(\frac{1}{4}x) + 2 \quad (۱)$$

$$y = 2 \sin(\frac{2x + \Delta\pi}{4}) + 3 \quad (۲)$$

$$y = 2 \cos(\frac{1}{4}x) + 3 \quad (۳)$$

$$y = 5 - 4 \sin(\frac{1}{4}x) \quad (۴)$$

۱۵۷۸☆ شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$  می‌باشد. مختصات نقطه A کدام است؟



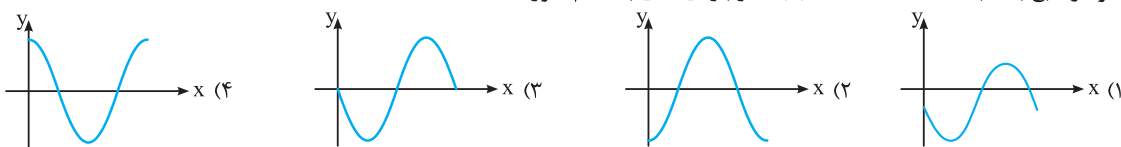
$$(2\pi, -1) \quad (۲)$$

$$(\pi, -1) \quad (۱)$$

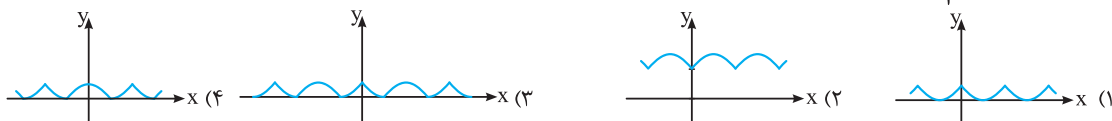
$$(\frac{5\pi}{4}, -2) \quad (۴)$$

$$(\frac{5\pi}{4}, -1) \quad (۳)$$

۱۵۷۹☆ نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = 2 - 4 \cos^2 x$  در بازه  $[0, \pi]$  به کدام صورت است؟

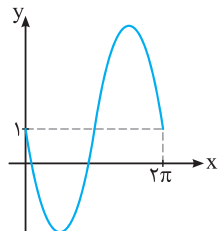


۱۵۸۰☆ نمودار  $y = |\frac{1}{4} - |\cos x||$  به کدام صورت است؟



## کاربرد دوره تناوب و ماکسیمم و مینیمم در حل مسائل

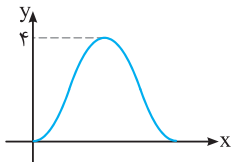
استفاده از دوره تناوب، واسه پیدا کردن پارامتر تو تستایی که نمودار و ضابطه اون داده می شه، یکی از مهم ترین مباحثه و تستای زیاری از این مبحث تو کنگور مطرح شده.



(سراسری ریاضی - ۹۷)

۱۵۸۱☆ شکل مقابل، نمودار تابع  $y = a + 3 \sin bx$  در بازه  $[0, 2\pi]$  است. کدام است  $ab$ ؟

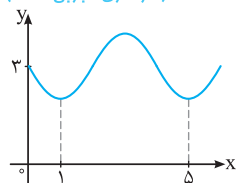
- (۱) ۱  
(۲) -۱  
(۳) -۲  
(۴) -۳



(سراسری تجربی - ۹۳)

۱۵۸۲☆ شکل مقابل، نمودار تابع  $f(x) = a + b \cos(\frac{\pi}{4}x)$  در بازه  $(0, 4)$  است. مقدار  $b$  کدام است؟

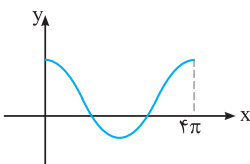
- (۱) -۲  
(۲) -۱  
(۳) ۱  
(۴) ۲



(سراسری ریاضی - ۹۶)

۱۵۸۳☆ شکل روبه رو قسمتی از نمودار تابع  $y = a + \sin(b\pi x)$  است. مقدار  $y$  در نقطه  $x = \frac{25}{3}$  کدام است؟

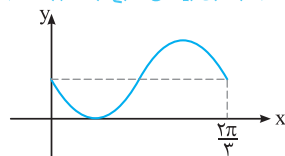
- (۱) ۲  
(۲) ۲/۵  
(۳) ۳  
(۴) ۳/۵



(سراسری ریاضی فارج از کشور - ۹۶)

۱۵۸۴☆ شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع  $y = \frac{1}{2} + 2 \cos(mx)$  است. مقدار تابع در نقطه  $x = \frac{16\pi}{3}$  کدام است؟

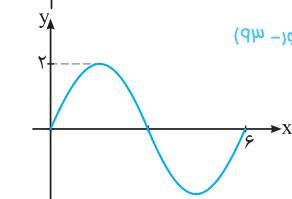
- (سراسری ریاضی - ۹۶)  
(۱) ۱/۲  
(۲) ۱/۲  
(۳) ۱  
(۴) صفر



(سراسری تجربی فارج از کشور - ۹۳)

۱۵۸۵☆ شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع  $y = 1 - \sin(mx)$  است. مقدار تابع در نقطه  $x = \frac{7\pi}{6}$  کدام است؟

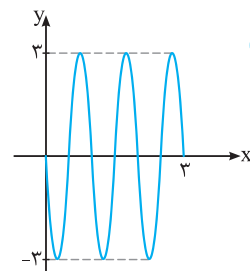
- (۱) صفر  
(۲) ۱/۲  
(۳) ۱  
(۴) ۲



(سراسری ریاضی فارج از کشور - ۹۲)

۱۵۸۶☆ شکل روبه رو قسمتی از نمودار تابع  $y = a \sin(b\pi x)$  است.  $a + b$  کدام است؟

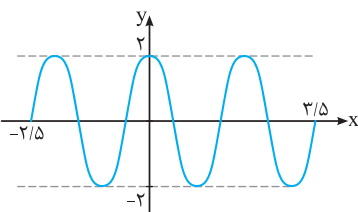
- (۱) ۴/۳  
(۲) ۵/۳  
(۳) ۷/۳  
(۴) ۸/۳



(سراسری ریاضی - ۹۲)

۱۵۸۷☆ شکل روبه رو، قسمتی از نمودار تابع  $y = a \sin(b\pi x)$  است.  $a.b$  کدام است؟

- (۱) -۶  
(۲) -۳  
(۳) ۴/۵  
(۴) ۶

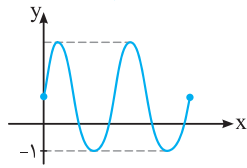


(سراسری ریاضی - ۹۲)

۱۵۸۸☆ شکل روبه رو قسمتی از نمودار تابع  $y = a \sin(\pi(\frac{1}{4} + bx))$  است.  $a.b$  کدام است؟

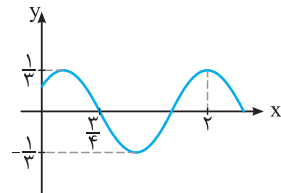
- (۱) ۲  
(۲) ۲/۵  
(۳) ۳  
(۴) ۳/۵

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۷)



۱۵۸۹☆ شکل مقابل، نمودار تابع  $f(x) = 1 + a \sin(b\pi x)$  در بازه  $(0, \frac{4}{3})$  است.  $a + b$  کدام است؟

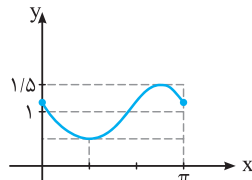
- ۳ (۱)
- ۴ (۲)
- ۵ (۳)
- ۶ (۴)



۱۵۹۰☆ نمودار مقابل بخشی از نمودار تابع  $f(x) = a \cos(bx + c)$  است ( $a > 0$ ). مقدار  $c$  کدام است؟

- $\frac{2\pi}{5}$  (۱)
- $\frac{1}{3}$  (۲)
- $-\frac{1}{3}$  (۴)
- $-\frac{2\pi}{5}$  (۳)

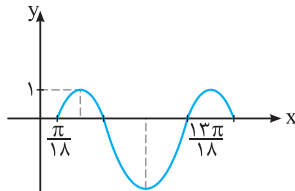
(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۵)



۱۵۹۱☆ شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = 1 + a \sin(bx - \frac{\pi}{6})$  است.  $a + b$  کدام است؟

- $\frac{1}{2}$  (۱)
- ۱ (۲)
- $\frac{3}{2}$  (۳)
- ۲ (۴)

(سراسری ریاضی - ۹۵)



۱۵۹۲☆ شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = a - 2 \cos(bx + \frac{\pi}{4})$  است.  $a + b$  کدام است؟

- $\frac{1}{2}$  (۱)
- ۱ (۲)
- $\frac{3}{2}$  (۳)
- ۲ (۴)

۱۵۹۳☆ می‌دانیم طول روز در هر سال مشابه سال قبل تکرار می‌شود. به طوری که از اول فروردین تا اول تابستان طول روزها در حال افزایش و از

اول تابستان تا اول زمستان در حال کاهش و دوباره از اول زمستان طول روزها افزایش می‌یابد. اگر  $t = 0$  بیان‌گر روز اول فروردین و  $t = 365$  نشان‌دهنده روز آخر سال باشد (سال را کیسه می‌گیریم) و تابع  $L(t) = a \sin bt + c$  بیان‌گر طول روز  $t$  ام بر حسب ساعت و هم‌چنین طول اولین روز تیر،  $15/5$  ساعت و طول اولین روز دی ۹ ساعت باشد، طول روز سی‌ویکم اردیبهشت تقریباً چند ساعت

(برگرفته از کتاب درسی)

است؟  $(\frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.433)$

- ۱۳/۵ (۱)
- ۱۴ (۲)
- ۱۴/۵ (۳)
- ۱۵ (۴)

**حل معادله به روش هندسی**

○ تستی حل معادله به روش هندسی رو قبلاً تو مبحث معادلات حل کردی. این‌ها صرفاً چند تست که نسبت مثلثاتی توش به کار رفته رو حل می‌کنی.

۱۵۹۴☆ چند زاویه مانند  $\theta$  در  $[-\pi, 2\pi]$  وجود دارد، به طوری که  $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{4}$  باشد؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

۱۵۹۵☆ معادله  $|\sin x| = |\frac{x}{\pi}|$  چند جواب دارد؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ بی‌شمار (۴)

۱۵۹۶☆ معادله  $\sin x + \cos x = 0$  در  $[-\pi, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

۱۵۹۷☆ معادله  $x \cos x = 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

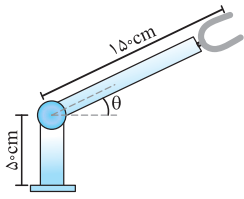
- صفر (۱)
- ۱ (۲)
- ۲ (۳)
- ۳ (۴)

۱۵۹۸☆ معادله  $|\log x| + |\cos x| = 1$  چند جواب دارد؟

- ۴ (۱)
- ۵ (۲)
- ۶ (۳)
- ۷ (۴)

کاربرد توابع مثلثاتی در حل مسائل

تو کتابهای درسی به کاربرد توابع مثلثاتی در حل مسئله، فیلی بها داده شده. نمونه‌هایی از مثلا و تمرینهای کتاب رو می‌بینی.



۱۵۹۹☆ شکل مقابل یک روبات صنعتی را نشان می‌دهد که در صنایع خودروسازی کاربرد دارد. کدام تابع

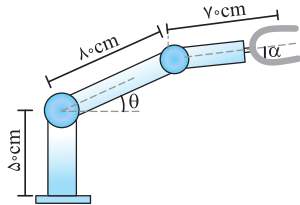
زیر، ارتفاع نوک گیره روبات را از سطح زمین بر حسب  $\theta$  مشخص می‌کند؟ (برگرفته از کتاب درسی)

(۱)  $y = 150 + 50 \sin \theta$

(۲)  $y = 150 + 50 \cos \theta$

(۳)  $y = 50 + 150 \sin \theta$

(۴)  $y = 50 + 150 \cos \theta$



۱۶۰۰☆ شکل روبه‌رو، یک روبات صنعتی را نشان می‌دهد که دارای دو مفصل مکانیکی است. اگر برای

گرفتن یک شیء در ارتفاع ۱۲۵ سانتی‌متری، این روبات مفصل اول خود را در حالت  $\theta = 30^\circ$  قرار

دهد، در این وضعیت  $\alpha$  چند درجه خواهد بود؟ (برگرفته از کتاب درسی)

(۱) صفر

(۲)  $30^\circ$

(۳)  $45^\circ$

(۴)  $60^\circ$

۱۶۰۱☆ یک ساعت دیواری به شعاع ۲۰ سانتی‌متر روی یک دیوار نصب شده است. اگر فاصله عدد ۶ روی محیط ساعت از زمین ۲ متر باشد، فاصله

عدد ۵ تا زمین چقدر است؟ ( $\sqrt{3} = 1.7$ )

(۱) ۲ متر و ۱ سانتی‌متر

(۲) ۲ متر و ۲ سانتی‌متر

(۳) ۲ متر و ۳ سانتی‌متر

(۴) ۲ متر و ۴ سانتی‌متر

۱۶۰۲☆ مهدی قصد دارد سوار چرخ‌وفلکی به شعاع ۲۰ متر شود که از سطح زمین ۲ متر فاصله دارد. پس از آن‌که مهدی سوار کابین شماره (۱)

می‌شود و چرخ‌وفلک به اندازه  $120^\circ$  در جهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌چرخد، ناگهان چرخ‌وفلک متوقف می‌شود. در این لحظه ارتفاع

مهدی از سطح زمین چند متر است؟

(۱) ۳۸

(۲) ۳۶

(۳) ۳۲

(۴) ۳۰

۱۶۰۳ چرخ‌وفلکی به شعاع ۱۵ متر، هر ۲ دقیقه یک دور در خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخد. شخصی از سکویی که ارتفاع آن ۳ متر

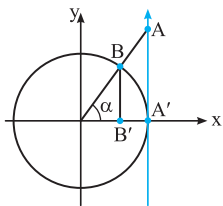
است، بالا رفته و سوار پایین‌ترین کابین می‌شود. پس از ۲۰ ثانیه این شخص در چه ارتفاعی از زمین قرار دارد؟

(۱)  $9/5$  متر

(۲)  $10/5$  متر

(۳)  $11/5$  متر

(۴)  $12/5$  متر



تابع تانژانت

۱۶۰۴☆ در دایره مثلثاتی مقابل، مقدار عددی  $\frac{AA'}{BB'}$  وقتی  $\alpha = 60^\circ$  باشد، کدام است؟

(۱)  $1/2$

(۲)  $2$

(۳)  $2/5$

(۴)  $1/5$

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۶۰۵☆ چه تعداد از گزاره‌های زیر در مورد تابع  $f(x) = \tan x$  درست است؟

(آ) در دامنه‌اش صعودی است.

(ب) می‌توان بازه‌ای یافت که در آن نزولی باشد.

(پ) می‌توان بازه‌ای یافت که در آن غیرصعودی باشد.

(ت) در هر بازه که تعریف شده باشد، صعودی است.

(ث) برد تابع برابر  $\mathbb{R}$  است.

(ج) تابعی متناوب با دوره تناوب  $\pi$  است.

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۱۶۰۶☆ اگر  $-\frac{\pi}{8} < x < 0$ ،  $\tan 2x = \frac{m+1}{m-2}$ ، حدود  $m$  کدام است؟

(۱)  $m > 2$

(۲)  $-1 < m < 2$

(۳)  $m < 0$

(۴)  $-1 < m < \frac{1}{3}$

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۶۰۷☆ کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر  $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ ، آن‌گاه  $\sin \alpha < \tan \alpha$

(۲) اگر  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \pi$ ، آن‌گاه  $\tan \alpha < \sin \alpha$

(۳) اگر  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ ، آن‌گاه  $\sin \alpha < \tan \alpha$

(۴) اگر  $\frac{3\pi}{4} < \alpha < 2\pi$ ، آن‌گاه  $\tan \alpha < \sin \alpha$

۱۶۰۸☆ تابع با ضابطه  $f(x) = \tan 2x$  به ازای چند مقدار  $x$  از بازه  $[-\frac{\pi}{4}, \pi]$  تعریف نمی‌شود؟

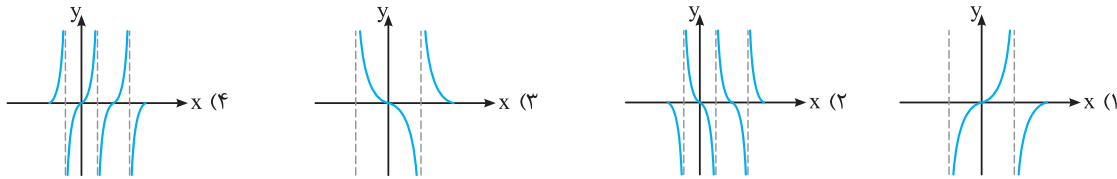
(۱) ۲

(۲) ۳

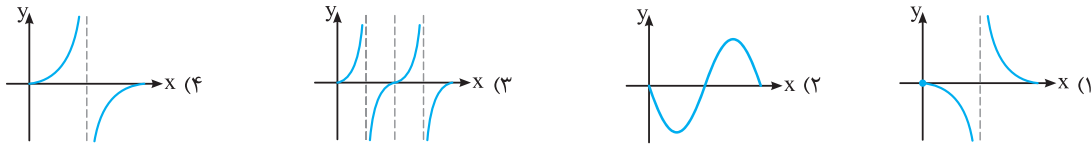
(۳) ۴

(۴) ۵

۱۶۰۹☆. نمودار تابع  $f(x) = -\frac{1}{3} \tan 2x$  در بازه  $[-\frac{\pi}{4}, \pi]$  به کدام صورت است؟



۱۶۱۰☆. نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  به کدام صورت است؟



قسمت هفتم: معادلات مثلثاتی

(ابتدا درس مربوط به این قسمت را در جلد آموزش مطالعه نمایید.)

یافتن جواب کلی در معادلات مثلثاتی

۱۶۱۱☆. یک جواب کلی معادله  $\sin 3x = \sin 2x$  کدام است؟

(برگرفته از کتاب درسی)

(۱)  $k\pi$  (۲)  $\frac{(2k+1)\pi}{3}$  (۳)  $\frac{(2k+1)\pi}{5}$  (۴)  $\frac{k\pi}{3}$

۱۶۱۲☆. جواب کلی معادله  $\sqrt{8} = 4 \cos 2x$  کدام است؟

(۱)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۲)  $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{8}$  (۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{8}$

۱۶۱۳☆. جواب کلی معادله  $\tan x = \tan \Delta x$  کدام است؟

(برگرفته از کتاب درسی)

(۱)  $\frac{k\pi}{5}$  (۲)  $\frac{k\pi}{4}$  (۳)  $\frac{k\pi}{3}$  (۴)  $k\pi$

۱۶۱۴☆. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin 3x + \sin x = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

(۱)  $\frac{k\pi}{2}$  (۲)  $k\pi$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

۱۶۱۵☆. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos 3x + \cos x = 0$  با شرط  $\cos x \neq 0$  کدام است؟

(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۴)

(۱)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$

۱۶۱۶☆. جواب کلی معادله مثلثاتی  $1 = \frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{4} + x)}$  به کدام صورت است؟

(سراسری تجربی - ۹۳)

(۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$  (۴)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

۱۶۱۷☆. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$  کدام است؟

(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۷)

(۱)  $\frac{k\pi}{5}$  (۲)  $\frac{2k\pi}{5}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{5}$  (۴)  $\frac{(2k+1)\pi}{5}$

۱۶۱۸☆. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$  به کدام صورت است؟

(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۱)

(۱)  $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{6}$  (۴)  $k\pi - \frac{\pi}{6}$

۱۶۱۹☆. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x$  به کدام صورت است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۴)

(۱)  $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$  (۲)  $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$  (۳)  $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}$  (۴)  $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

(سراسری تجربی- ۹۱)

۱۶۲۰. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{4} + x)$  به کدام صورت است؟

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (4) \quad 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (3) \quad \frac{2k\pi}{3} \quad (2) \quad \frac{k\pi}{3} \quad (1)$$

☆ ۱۶۲۱. یکی از جواب‌های معادله  $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$  کدام است؟

$$\frac{4\pi}{3} \quad (4) \quad \frac{7\pi}{6} \quad (3) \quad \frac{5\pi}{6} \quad (2) \quad \frac{2\pi}{3} \quad (1)$$

(سراسری تجربی- ۹۵)

☆ ۱۶۲۲. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$  کدام است؟

$$k\pi - \frac{\pi}{3} \quad (4) \quad 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \quad (3) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (1)$$

(سراسری تجربی- ۸۶)

۱۶۲۳. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2\sin^2 x = 3\cos x$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (4) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

۱۶۲۴. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2\cos x(\cos x - \sin x) = 1$  به کدام صورت است؟

$$k\pi + \frac{\pi}{8} \quad (4) \quad k\pi - \frac{\pi}{8} \quad (3) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (2) \quad \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \quad (1)$$

۱۶۲۵. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2\sin^2 x - \sin 2x = 1$  کدام است؟

$$k\pi + \frac{\pi}{8} \quad (4) \quad k\pi - \frac{\pi}{8} \quad (3) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (2) \quad \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \quad (1)$$

(سراسری ریاضی- ۸۶)

☆ ۱۶۲۶. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3}$  به کدام صورت است؟

$$k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (4) \quad k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (3) \quad 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (1)$$

(سراسری ریاضی فارغ از کشور- ۹۲)

۱۶۲۷. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2\cos 2x = \cot x(4\sin x + \tan x)$  کدام است؟

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (4) \quad 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (3) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad k\pi - \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

(سراسری تجربی- ۹۴)

☆ ۱۶۲۸. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$  به کدام صورت است؟

$$k\pi + \frac{\pi}{8} \quad (4) \quad k\pi - \frac{\pi}{8} \quad (3) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (2) \quad \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \quad (1)$$

(سراسری تجربی- ۸۷)

۱۶۲۹. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2\sin(\pi - x) \cdot \cos(\frac{3\pi}{4} + x) + 3\cot x \cdot \sin(\pi + x) = 0$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (4) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (3) \quad 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \quad (2) \quad 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

(سراسری تجربی- ۹۲)

☆ ۱۶۳۰. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$  به کدام صورت است؟

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (4) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

(سراسری تجربی فارغ از کشور- ۹۵)

۱۶۳۱. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$  کدام است؟

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (4) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

(سراسری تجربی فارغ از کشور- ۹۰)

☆ ۱۶۳۲. جواب کلی معادله مثلثاتی  $(\sin x - \tan x) \tan(\frac{3\pi}{4} - x) = \cos \frac{4\pi}{3}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad (4) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (3) \quad k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

(سراسری تجربی- ۹۷)

☆ ۱۶۳۳. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\tan x \tan 3x = 1$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \quad (4) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} \quad (3) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (2) \quad \frac{k\pi}{4} \quad (1)$$

(سراسری تجربی- ۸۹)

☆ ۱۶۳۴. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\tan(x + \frac{\pi}{4}) + \tan(x - \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{3}$  به کدام صورت است؟

$$k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (4) \quad k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \quad (1)$$



☆۱۶۳۵. یکی از جواب‌های کلی معادله  $\sin x + \cos x = 1$  به کدام صورت است؟

(۱)  $k\pi$  (۲)  $\frac{k\pi}{2}$  (۳)  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$

☆۱۶۳۶. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2\sqrt{2} \sin x \cos x = \sin x + \cos x$  کدام است؟

(۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$  (۳)  $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$  (۴)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

☆۱۶۳۷. در معادله مثلثاتی  $1 - \sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$ ، یکی از صورت‌های کلی جواب کدام است؟

(۱)  $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$  (۲)  $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$  (۳)  $2k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{6}$

☆۱۶۳۸. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$  کدام است؟

(۱)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۲)  $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$  (۳)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

☆۱۶۳۹. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin^2 \frac{5\pi}{6} = \sin(\frac{\pi}{4} + x) \cos(-x)$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

(۱)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۲)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۳)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۴)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

☆۱۶۴۰. جواب کلی معادله مثلثاتی  $(1 + \tan^2 x) \cos(\pi + 2x) = 2$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

(۱)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۳)  $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

☆۱۶۴۱. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos(x + \frac{\pi}{3}) \cos(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{4}$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

(۱)  $k\pi - \frac{\pi}{3}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

☆۱۶۴۲. جواب‌های کلی معادله  $0 = 1 - \cos(\frac{2\pi}{3} - x) + 3 \cos(\frac{2\pi}{3} - x) + 5 \sin x$  به صورت  $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$  است. مجموعه مقادیر  $i$  کدام‌اند؟

(۱)  $\{1, 5\}$  (۲)  $\{1, 7\}$  (۳)  $\{5\}$  (۴)  $\{1, 5, 7\}$

حالت‌های خاص در معادلات مثلثاتی

☆۱۶۴۳. جواب کلی معادله  $\sin^3 x - \sin x = 0$  به کدام صورت است؟

(۱)  $k\pi$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۳)  $2k\pi - \frac{\pi}{2}$  (۴)  $\frac{k\pi}{2}$

☆۱۶۴۴. نمودار تابع  $y = 3 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ ، روی بازه  $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ ، در چند نقطه محور  $x$  ها را قطع می‌کند؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

☆۱۶۴۵. اگر دوره تناوب تابع  $f(x) = a \sin b\pi x$  برابر  $\frac{1}{4}$  باشد، نمودار تابع در بازه  $[0, 1]$  در چند نقطه محور  $x$  ها را قطع می‌کند؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

☆۱۶۴۶. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2 \tan x \cdot \cos^2 x = 1$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

(۱)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۳)  $2k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

☆۱۶۴۷. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - x) = 1 + \sin(\frac{5\pi}{4} + x)$  کدام است؟

(۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $2k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۳)  $2k\pi - \frac{\pi}{2}$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

☆۱۶۴۸. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos^3 x \sin(3\pi - x) - \sin^3 x \cos(\pi + x) = \cos \frac{3\pi}{4}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{k\pi}{4}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

☆۱۶۴۹. جواب کلی معادله  $0 = 1 - 2 \sin(\pi - x) + \sin(\pi + x) \cos(\frac{\pi}{4} + x)$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

(۱)  $2k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۲)  $2k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۳)  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$

(سراسری ریاضی- ۸۷)

۱۶۵۰. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin \frac{\Delta\pi}{6} + \sin(\frac{\pi}{4} + x) \sin(\pi + x) = 0$  کدام است؟

(۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

☆ ۱۶۵۱. یکی از جواب‌های معادله  $\sin 3x \cos x = 1 - \cos 3x \sin x$  کدام است؟

(۱)  $\frac{\pi}{4}$  (۲)  $\frac{\Delta\pi}{4}$  (۳)  $\frac{3\pi}{8}$  (۴)  $\frac{\Delta\pi}{8}$

☆ ۱۶۵۲. جواب کلی معادله  $\sin \Delta x (\cos 3x - \sin \Delta x) + \cos \Delta x (\sin 3x - \cos \Delta x) = 0$  کدام است؟

(۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$  (۳)  $\frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{16}$  (۴)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

(سراسری ریاضی- ۹۳)

☆ ۱۶۵۳. جواب کلی معادله  $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2 \cos^2 x$  کدام است؟

(۱)  $\frac{k\pi}{2}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$

(سراسری ریاضی- ۹۶)

☆ ۱۶۵۴. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin x \sin 3x = \cos 2x$  کدام است؟

(۱)  $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$  (۲)  $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۴)  $\frac{k\pi}{3}$

☆ ۱۶۵۵. تمام جواب‌های معادله  $\sin^6 x + \cos^6 x = 1$  کدام است؟

(۱)  $k\pi$  (۲)  $\frac{k\pi}{2}$  (۳)  $\frac{(2k+1)\pi}{2}$  (۴)  $2k\pi$

☆ ۱۶۵۶. جواب‌های کلی معادله مثلثاتی  $\cos 2x = \sin x$  به صورت  $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$  بیان شده است. مجموعه مقادیر  $i$  کدام است؟

(۱)  $\{7, 9\}$  (۲)  $\{1, 3, 5\}$  (۳)  $\{1, 4, 7\}$  (۴)  $\{1, 5, 9\}$

(سراسری ریاضی- ۹۶)

☆ ۱۶۵۷. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$  با شرط  $x \neq \frac{k\pi}{4}$  کدام است؟

(۱)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۲)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۴)  $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

(سراسری ریاضی- ۹۷)

☆ ۱۶۵۸. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin 2x \sin 4x + \sin^2 x = 1$  کدام است؟

(۱)  $k\pi + \frac{\pi}{6}$  (۲)  $(2k+1)\frac{\pi}{6}$  (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{6}$  (۴)  $\frac{k\pi}{6}$

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۷)

☆ ۱۶۵۹. جواب کلی معادله  $\sin 3x - \sin x + 4 \sin^2 x = 2$ ، با شرط  $x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{4}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{k\pi}{4}$  (۲)  $(2k+1)\frac{\pi}{4}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۴)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$

☆ ۱۶۶۰. جواب کلی معادله  $3\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 5 = 0$  کدام است؟

(۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $2k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۳)  $k\pi - \frac{\Delta\pi}{4}$  (۴)  $2k\pi - \frac{3\pi}{4}$

جواب‌های معادله مثلثاتی در یک بازه

(سراسری ترمی خارج از کشور- ۹۶)

☆ ۱۶۶۱. مجموع تمام جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin \Delta x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

(۱)  $8\pi$  (۲)  $9\pi$  (۳)  $10\pi$  (۴)  $11\pi$

(برگرفته از کتاب درسی)

☆ ۱۶۶۲. چند مثلث وجود دارد که طول دو ضلع آن‌ها ۳ و ۴ سانتی‌متر و مساحت آن‌ها ۳ سانتی‌متر مربع باشد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

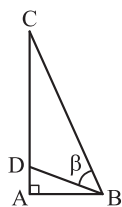
☆ ۱۶۶۳. یک فوتبالیست، توپ را با سرعت  $60 \text{ km/h}$  به سمت دروازه حریف که در ۳۶ متری او قرار گرفته، می‌فرستد. اگر رابطه بین سرعت

توپ  $v$  (بر حسب کیلومتر بر ساعت)، مسافت طی شده افقی  $d$  (بر حسب متر) و زاویه حرکت توپ  $\theta$ ، به صورت  $d = \frac{v^2}{50} \sin 2\theta$  باشد،

(برگرفته از کتاب درسی)

زاویه حرکت توپ کدام می‌تواند باشد؟

(۱)  $10^\circ$  (۲)  $15^\circ$  (۳)  $22/5^\circ$  (۴)  $30^\circ$



۱۶۶۴. در شکل مقابل، اگر  $AD = \frac{5}{2}$ ،  $CD = \frac{7}{5}$  و  $AB = 1$  باشد، زاویه  $\beta$  چند درجه است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

- (۱) ۷۵
- (۲) ۶۰
- (۳) ۴۵
- (۴) ۳۰

۱۶۶۵☆. معادله  $\sin(\pi \cos x) = -1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ۴

۱۶۶۶. معادله  $\sin 2x + \sqrt{2} \cos x = 0$  در بازه  $[-\pi, \pi]$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۵
- (۴) ۶

۱۶۶۷☆. معادله  $\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} = 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۱۶۶۸. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{4} - x) = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۶)

- (۱)  $\frac{14\pi}{3}$
- (۲)  $4\pi$
- (۳)  $\frac{9\pi}{2}$
- (۴)  $5\pi$

۱۶۶۹☆. معادله  $\tan 2x - \cot(x - \frac{\pi}{4}) = 0$  در بازه  $[0, \pi]$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۴
- (۲) ۳
- (۳) ۲
- (۴) ۱

۱۶۷۰☆. مجموع جواب‌های معادله  $2 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0$  در بازه  $[\pi, 2\pi]$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{8\pi}{3}$
- (۲)  $\frac{10\pi}{3}$
- (۳)  $3\pi$
- (۴)  $\frac{11\pi}{3}$

۱۶۷۱☆. معادله  $\sin x \cos x = \cos^2 x - \frac{1}{4}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۴
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) صفر

۱۶۷۲☆. معادله  $\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x = \frac{1}{4}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- (۱) صفر
- (۲) ۲
- (۳) ۴
- (۴) ۸

۱۶۷۳. معادله  $1 + \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند ریشه دارد؟

- (۱) ۵
- (۲) ۴
- (۳) ۳
- (۴) ۲

۱۶۷۴☆. مجموع تمام جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin 4x = \sin^2 x - \cos^2 x$  در بازه  $[0, \pi]$ ، برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۹۵)

- (۱)  $\frac{7\pi}{4}$
- (۲)  $\frac{9\pi}{4}$
- (۳)  $\frac{5\pi}{2}$
- (۴)  $\frac{11\pi}{3}$

۱۶۷۵. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8}) = 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۵)

- (۱)  $\frac{3\pi}{4}$
- (۲)  $\frac{5\pi}{4}$
- (۳)  $\frac{3\pi}{2}$
- (۴)  $\frac{7\pi}{4}$

۱۶۷۶☆. در معادله مثلثاتی  $2 \cos^2 x + \cos x = 1$ ، نقاط پایانی تمام جواب‌ها بر دایره مثلثاتی، رأس‌های کدام شکل هندسی است؟

- (۱) مثلث متساوی‌الاضلاع
- (۲) مثلث قائم‌الزاویه
- (۳) دوزنقه
- (۴) مستطیل

۱۶۷۷☆. نقاط پایانی کمان جواب‌های معادله  $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$  بر روی دایره مثلثاتی، رأس‌های کدام چندضلعی است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۱)

- (۱) مربع
- (۲) مستطیل
- (۳) مثلث قائم‌الزاویه
- (۴) مثلث متساوی‌الساقین

۱۶۷۸☆. مجموع جواب‌های معادله  $2 \sin^2(x - \frac{\pi}{8}) + 3 \cos(x - \frac{5\pi}{8}) = 5$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3\pi}{4}$
- (۲)  $\frac{3\pi}{8}$
- (۳)  $\frac{5\pi}{4}$
- (۴)  $\frac{5\pi}{8}$

۱۶۷۹☆. در معادله مثلثاتی  $8 \sin^2 x + k \sin 2x = 1$ ، مجموع جواب‌های متمایز در فاصله  $[0, \pi]$  برابر  $\frac{3\pi}{4}$  است. کدام است k؟

- (۱) -۲
- (۲) -۴
- (۳) ۲
- (۴) ۴

۱۵۵۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$y = a \sin\left(\frac{\pi}{\nu} - bx\right) \Rightarrow y = a \cos bx$$

$$T = \frac{\nu\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = \nu \xrightarrow{\cos 2x = \cos(-2x)} y = a \cos 2x$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{\pi}{\nu}, \nu\right)} \nu = a \underbrace{\cos \pi}_{-1} \Rightarrow a = -\nu$$

$$\Rightarrow y = -\nu \cos 2x \xrightarrow{x=0} y = -\nu \cos 0 = -\nu$$

۱۵۵۲ ۱ ۲ ۳ ۴

**یادآوری:**  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

$$f(x) = \cos x \cos 3x + \sin x \sin 3x = \cos(3x - x) = \cos 2x$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\nu} = \pi$$

$$g(x) = \cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x = \cos(3x + x) = \cos 4x$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T_1 = 2T_2$$

۱۵۵۳ ۱ ۲ ۳ ۴

**یادآوری:**  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ,  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$f(x) = \sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x$$

$$= -\sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= -\frac{1}{\nu} \sin 2x \cos 2x \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{\nu} \sin 4x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$$

۱۵۵۴ ۱ ۲ ۳ ۴

**یادآوری:**  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ,  $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

ابتدا ضابطه تابع را ساده کرده و سپس دوره تناوب آن را به دست می آوریم:

$$f(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\tan x + \cot x} = \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\frac{2}{\sin 2x}}$$

$$= \frac{\cos 2x \times 1}{\frac{2}{\sin 2x}} = \frac{1}{\nu} \sin 2x \cos 2x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\nu} \sin 4x$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{\pi}{2}$$

۱۵۵۵ ۱ ۲ ۳ ۴

**یادآوری:**  $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ ,  $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

بنابر نکته فوق داریم:

$$f(x) = \frac{\tan 3x(1 - \tan^2 3x)}{(1 + \tan^2 3x)^2} = \frac{\tan 3x}{1 + \tan^2 3x} \times \frac{1 - \tan^2 3x}{1 + \tan^2 3x}$$

$$= \frac{1}{\nu} \sin 6x \times \cos 6x = \frac{1}{\nu} \sin 12x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

۱۵۴۵ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به رابطه  $\tan(45^\circ - \alpha) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$  ابتدا

حاصل  $\tan(30^\circ - \alpha)$  را محاسبه می کنیم:

$$\tan(30^\circ - \alpha) = \tan(45^\circ - (\alpha + 15^\circ)) = \frac{1 - \tan(\alpha + 15^\circ)}{1 + \tan(\alpha + 15^\circ)}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$$

حال از رابطه  $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$  ، حاصل  $\tan(60^\circ - 2\alpha)$  را

به دست می آوریم:

$$\tan(60^\circ - 2\alpha) = \tan 2(30^\circ - \alpha) = \frac{2 \tan(30^\circ - \alpha)}{1 - \tan^2(30^\circ - \alpha)}$$

$$= \frac{\frac{6}{5}}{1 - \frac{9}{25}} = \frac{15}{8} \Rightarrow \cot(60^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{\tan(60^\circ - 2\alpha)} = \frac{8}{15}$$

۱۵۴۶ ۱ ۲ ۳ ۴

**نکته:** طول کوچک ترین بازه ای که نمودار تابع  $f$  تکرار می شود را دوره تناوب اصلی می گوئیم و با  $T$  نمایش می دهیم.

نمودار تابع  $f$  در هر بازه به طول ۴ تکرار می شود، پس  $T = 4$

۱۵۴۷ ۱ ۲ ۳ ۴

**نکته:** اگر  $a, b, c, d$  و اعداد حقیقی و  $a, b \neq 0$  باشند، آنگاه دوره تناوب توابع  $y = a \cos(bx + c) + d$  و  $y = a \sin(bx + c) + d$

برابر  $T = \frac{2\pi}{|b|}$  است.

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi$$

بنابر نکته فوق داریم:

۱۵۴۸ ۱ ۲ ۳ ۴

ضریب  $x$  در داخل کمان  $\frac{1}{3}$  است. پس داریم:

$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 4\pi$$

۱۵۴۹ ۱ ۲ ۳ ۴

دوره تناوب تابع  $f$  برابر  $\frac{2}{3}$  است. پس:

$$T = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{\left|-\frac{b\pi}{3}\right|} = \frac{2}{3} \xrightarrow{b>0} \frac{6}{b} = \frac{2}{3} \Rightarrow b = 9$$

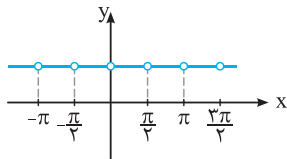
۱۵۵۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$y = \cos((2x + 1)\pi) = \cos(2\pi x + \pi) \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{|2\pi|} = 1$$

$$y = \sin((ax + \delta)\pi) = \sin(a\pi x + \delta\pi) \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{|a\pi|} = \frac{2}{|a|}$$

$$T_1 = 3T_2 \Rightarrow 1 = 3 \times \frac{2}{|a|} \Rightarrow |a| = 6 \Rightarrow a = \pm 6$$

با توجه به گزینه ها،  $a = 6$  را می پذیریم.



نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل است:

با توجه به نمودار،  $f$  متناوب بوده و  $T = \frac{\pi}{2}$

۱۵۶۲ (۴) (۳) (۲) (۱)

در رابطه  $f(x+2)f(x) = 1$ ، به جای  $x$ ،  $x+2$  را قرار می‌دهیم. داریم:

$$f(x+4)f(x+2) = 1$$

$$\frac{f(x+2)f(x)=1}{f(x+2)f(x)=1} \rightarrow f(x+4)f(x+2) = f(x+2)f(x)$$

$$\frac{f(x+2)f(x)=1}{\div f(x+2) \neq 0} \rightarrow f(x+4) = f(x)$$

بنابراین  $T = 4$  دوره تناوب  $f$  است.

۱۵۶۳ (۴) (۳) (۲) (۱)

در گزینه (۱)، دامنه  $y = \sin x$  برابر  $\mathbb{R}$  است. پس برای هر  $x \in \mathbb{R}$  و به خصوص  $x = 25$  تعریف می‌شود. در گزینه (۲)،  $\frac{\pi}{3} > 1$  پس هیچ عددی مثل  $x$  یافت نمی‌شود که  $\cos x = \frac{\pi}{3}$ . در گزینه (۳)، ۳ رادیان تقریباً برابر  $171.9^\circ$  درجه است و لذا  $\sin 3^\circ \neq \sin 3^\circ$ . در گزینه (۴)،  $\sin x$  یعنی سینوس زاویه‌ای از دایره مثلثاتی که اندازه آن  $x$  رادیان باشد نه  $x$  درجه.

۱۵۶۴ (۴) (۳) (۲) (۱)

با توجه به رابطه  $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \cos x$ ، معلوم می‌شود که اگر نمودار  $y = \sin x$  را  $\frac{\pi}{4}$  واحد در راستای محور  $x$  ها به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار  $y = \cos x$  به دست می‌آید.

توابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$  ساده‌ترین توابع مثلثاتی از بین بی‌شمار تابع مثلثاتی هستند. پس گزینه (۱) نادرست است. هم‌چنین دوره تناوب این توابع برابر  $T = 2\pi$  بوده و لذا گزینه (۲) نادرست است.

دامنه توابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$  برابر  $\mathbb{R}$  برد آن‌ها برابر  $[-1, 1]$  است. اما در گزینه (۴) جا به جا آمده است. پس این گزینه نیز نادرست است.

۱۵۶۵ (۴) (۳) (۲) (۱)

می‌دانیم مقدار  $\sin x$  به ازای  $x = 0$ ،  $x = \pi$ ،  $x = 2\pi$ ،  $x = 3\pi$  و به طور کلی  $x = k\pi$  که در آن  $k \in \mathbb{Z}$ ، برابر صفر می‌شود. پس در تابع  $f(x) = \frac{x-1}{\sin x}$  داریم:

$$\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

۱۵۶۶ (۴) (۳) (۲) (۱)

می‌دانیم مقدار  $\cos x$  به ازای  $x = 2\pi$ ،  $x = 4\pi$  و به طور کلی  $x = 2k\pi$  که در آن  $k \in \mathbb{Z}$ ، برابر یک می‌شود. پس در تابع  $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$  داریم:

$$1 - \cos x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq 1 \Rightarrow x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

۱۵۵۶ (۴) (۳) (۲) (۱)

نکته: اگر  $a, b, c, d$  اعداد حقیقی و  $a \neq 0$  و  $b \neq 0$  باشند، آنگاه دوره تناوب توابع  $y = a \tan^n(bx + c) + d$  و  $y = a \cot^n(bx + c) + d$  برابر  $T = \frac{\pi}{|b|}$  است. ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$y = -\pi + \sqrt{2} \tan 2x \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

۱۵۵۷ (۴) (۳) (۲) (۱)

$$\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$$

یادآوری:

$$f(x) = \tan 2x - \cot 2x = -2 \cot 4x \Rightarrow T = \frac{\pi}{4}$$

داریم:

۱۵۵۸ (۴) (۳) (۲) (۱)

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

یادآوری:

بنابر یادآوری فوق، داریم:

$$f(x) = \frac{\tan ax}{1 - \tan^2 ax} = \frac{1}{2} \tan 2ax \Rightarrow T = \frac{\pi}{|2a|}$$

$$\frac{T = \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2|a|}} \rightarrow \frac{\pi}{2|a|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |a| = \frac{\pi}{2}$$

۱۵۵۹ (۴) (۳) (۲) (۱)

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

یادآوری:

صورت و مخرج کسر را بر  $\cos x$  تقسیم می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} = \frac{\tan x - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan x \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \tan(x - \frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow T = \frac{\pi}{1} = \pi$$

۱۵۶۰ (۴) (۳) (۲) (۱)

نکته: اگر  $f$  تابعی متناوب با دوره تناوب  $T$  باشد، برای هر  $n \in \mathbb{N}$  داریم:

$$f(x \pm nT) = f(x)$$

داریم:

در این تست،  $f$  متناوب و  $T = 2$  است. پس بنابر نکته فوق می‌توان نوشت:

$$f(\sqrt{1}) = f(1/1 + 2 \times 2) = f(1/1) = (1/1)^2 = 1/21$$

نوشت:

۱۵۶۱ (۴) (۳) (۲) (۱)

می‌توان نوشت:

$$f(x) = \tan x \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{\sin 2x}{\sin 2x}$$

$$\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin 2x} = \begin{cases} 1 & x \neq \frac{k\pi}{2} \\ \text{تعریف نشده} & x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

۱۵۷۱ (۴ ۳ ۲ ۱)

با توجه به گزینه‌ها، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به یکی از صورت‌های  $f(x) = a \sin(bx) + c$  یا  $f(x) = a \cos(bx) + c$  باشد، داریم:

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{9 + 3}{2} = 6$$

$$\max = |a| + c \Rightarrow 9 = |a| + 6 \Rightarrow a = \pm 3$$

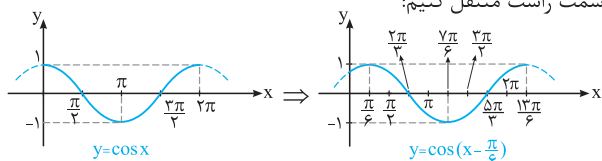
از طرفی دوره تناوب هر یک از توابع مذکور،  $T = \frac{2\pi}{|b|}$  است. پس:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \xrightarrow{T=3\pi} 3\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{2}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{2}{3}$$

چون نمودار تابع  $f$  را در اختیار نداریم و نیز اطلاعات دیگری در مورد ضابطه آن داده نشده است، در مورد علامت  $a$  و  $b$  چیزی نمی‌توان گفت. بنابراین با توجه به گزینه‌ها، گزینه (۳) می‌تواند درست باشد.

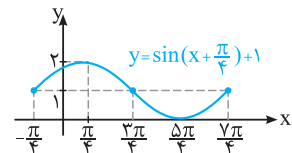
۱۵۷۲ (۴ ۳ ۲ ۱)

کافی است نمودار  $y = \cos x$  را  $\frac{\pi}{6}$  واحد در راستای محور  $x$  ها به سمت راست منتقل کنیم:



۱۵۷۳ (۴ ۳ ۲ ۱)

کافی است نمودار  $y = \sin x$  را  $\frac{\pi}{4}$  واحد به چپ و ۱ واحد به بالا انتقال دهیم:

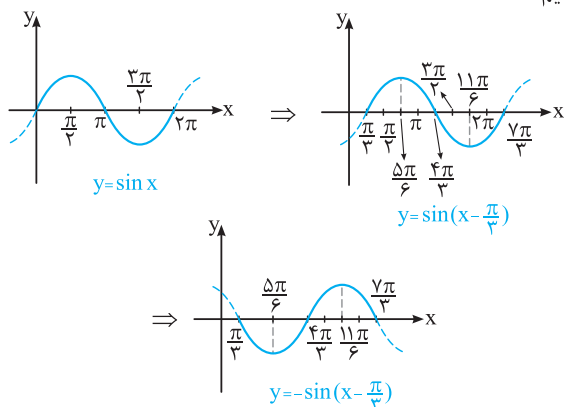


۱۵۷۴ (۴ ۳ ۲ ۱)

می‌توان نوشت:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

بنابراین برای رسم نمودار  $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$  ابتدا نمودار  $y = \sin x$  را  $\frac{\pi}{3}$  واحد در راستای محور  $x$  ها به سمت راست منتقل کرده و در نهایت، نمودار حاصل را نسبت به محور  $x$  ها قرینه می‌کنیم:



۱۵۶۷ (۴ ۳ ۲ ۱)

ابتدا دامنه تابع  $f$  را می‌یابیم:

$$\sin \pi x - 1 \geq 0 \Rightarrow \sin \pi x \geq 1 \xrightarrow{-\sin \pi x \leq 1} \sin \pi x = 1$$

می‌دانیم مقدار سینوس به ازای زوایای  $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots$  و به طور کلی  $2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$  برابر ۱ می‌شود. پس:

$$\sin \pi x = 1 \Rightarrow \pi x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k + \frac{1}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

واضح است که به ازای هر  $x = 2k + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$  پس  $[x] + [-x] = -1$  بنابراین داریم:

$$f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - 1} = -1 + 0$$

$$\Rightarrow f(x) = -1 \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}f(x)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

۱۵۶۸ (۴ ۳ ۲ ۱)

اگر  $0 \leq x < 1$  باشد، آن‌گاه  $[x] = 0$ ، در این صورت رابطه

$$f(x) = |f(x)| \quad \text{به صورت} \quad (-1)^{[x]} f(x) = |f(x)|$$

درمی‌آید که نتیجه می‌شود، در بازه  $[0, 1)$ ،  $f(x) \geq 0$  می‌باشد، داریم:

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \pi x < \pi \\ 0 \leq 2\pi x < 2\pi \end{cases}$$

پس بازه  $[0, 1)$  برای کمان  $\pi x$  به منزله بازه  $[0, \pi)$  و برای کمان  $2\pi x$  به منزله بازه  $[0, 2\pi)$  می‌باشد. چون در بازه  $[0, \pi)$ ،  $f(x) \geq 0$  بود، پس باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که مقدار تابع در بازه معادل آن نامنفی باشد. در نتیجه فقط گزینه (۱) صحیح است. زیرا سینوس در بازه  $[0, \pi)$  نامنفی است. اما تابع کسینوس در بازه  $[0, \pi)$  می‌تواند منفی هم باشد و نیز توابع سینوس و کسینوس در بازه  $[0, 2\pi)$  می‌توانند منفی نیز باشند.

۱۵۶۹ (۴ ۳ ۲ ۱)

**نکته:** به طور کلی در توابع  $y = a \sin(bx + d) + c$

و  $y = a \cos(bx + d) + c$ ،  $(a, b \neq 0)$  داریم:

$$\max = |a| + c \quad , \quad \min = -|a| + c$$

هم‌چنین عدد  $c$  همواره میانگین مقادیر ماکسیمم و مینیمم است. یعنی:

$$c = \frac{\max + \min}{2}$$

در این سؤال،  $a = -\pi$  و  $c = \sqrt{3}$ ، پس بنابر نکته فوق داریم:

$$\max = |-\pi| + \sqrt{3} = \pi + \sqrt{3} \quad , \quad \min = -|-\pi| + \sqrt{3} = \sqrt{3} - \pi$$

$$\Rightarrow \max - \min = (\pi + \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - \pi) = 2\pi$$

۱۵۷۰ (۴ ۳ ۲ ۱)

در این تابع داریم  $a = 3, c = 1, b = \frac{2\pi}{5}$ ، پس:

$$\max = |a| + c = 4 \quad , \quad \min = -|a| + c = -3 + 1 = -2$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{2\pi}{5}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{5}} = \frac{10}{2} = 5$$

هم‌چنین:  $f(0) = 3 \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + 1 = 3 \times \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) + 1 > 0$

پس نمودار تابع، محور  $y$  ها را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع می‌کند.

۱۵۷۸ ۱ ۲ ۳ ۴

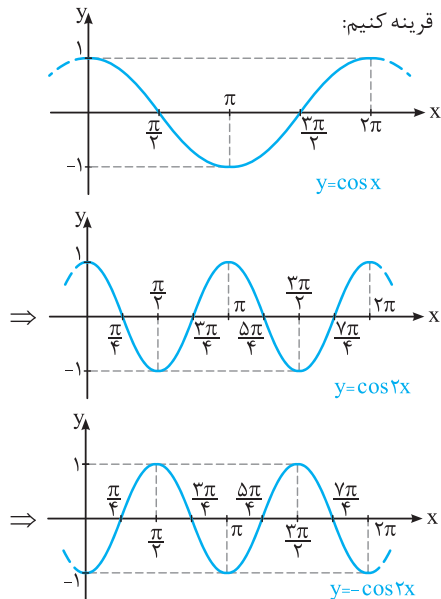
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

یادآوری:

داریم:

$$f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$$

برای رسم نمودار تابع  $f$  کافی است نمودار  $y = \cos x$  را رسم کرده و سپس طول نقاط آن را بر ۲ تقسیم نموده و در نهایت نمودار حاصل را نسبت به محور  $x$  ها قرینه کنیم:



با توجه به نمودار، مختصات نقطه  $A$ ،  $(\pi, -1)$  است.

۱۵۷۹ ۱ ۲ ۳ ۴

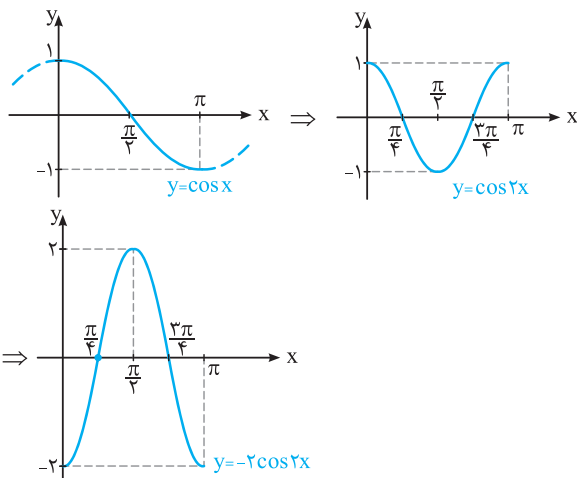
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

یادآوری:

بنابر یادآوری فوق داریم:

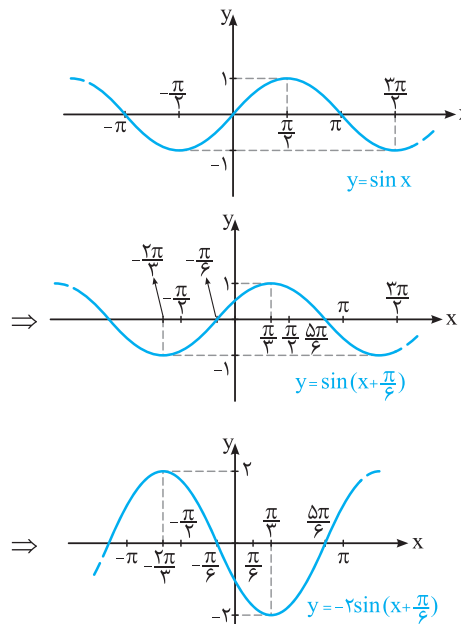
$$f(x) = 2 - 4\cos^2 x = -2(2\cos^2 x - 1) = -2\cos 2x$$

حال نمودار تابع  $f$  را مرحله به مرحله در بازه  $[0, \pi]$  رسم می‌کنیم:



۱۵۷۵ ۱ ۲ ۳ ۴

نمودار تابع  $f$  را مرحله به مرحله رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل، نمودار تابع در بازه  $[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$  از ناحیه اول عبور نمی‌کند.

۱۵۷۶ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به نمودار،  $\max = 3$  و  $\min = -1$ ، پس:

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$$

$$\max = 3 \Rightarrow |a| + c = 3 \Rightarrow |a| + 1 = 3 \Rightarrow |a| = 2$$

از طرفی، نمودار تابع در یک بازه به طول  $\pi$  تکرار شده است. پس:

$$T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2$$

با توجه به گزینه‌ها، این شرایط فقط در گزینه‌های (۲) و (۴) دیده می‌شود. از طرفی نمودار محور  $x$  ها را در  $-\frac{\pi}{12}$  قطع کرده است. پس گزینه (۲) صحیح است. زیرا:

$$y = 2\sin(2x) + 1 \xrightarrow{x = -\frac{\pi}{12}} y = 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 1 = -1 + 1 = 0$$

۱۵۷۷ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به نمودار داریم:

$$\max = 5, \min = 1$$

بنابراین:

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

$$\max = |a| + c \Rightarrow 5 = |a| + 3 \Rightarrow |a| = 2$$

هم‌چنین:

از طرفی، نمودار تابع در هر بازه به طول  $4\pi$  تکرار می‌شود. پس:

$$T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$$

تنها گزینه (۳) تمام این ویژگی‌ها را دارد.

۱۵۸۳ (۴) (۳) (۲) (۱)

با توجه به شکل داریم:  $f(0) = 3 \Rightarrow a + \sin 0 = 3 \Rightarrow a = 3$   
 مطابق شکل، دوره تناوب تابع برابر  $T = 5 - 1 = 4$  است. از سوی دیگر

دوره تناوب تابع  $y = 3 + \sin(b\pi x)$  برابر  $T = \frac{2\pi}{|b\pi|}$  می‌باشد. پس:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow \frac{2}{|b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

به ازای  $b = \frac{1}{2}$ ، ضابطه تابع به صورت  $y = 3 + \sin(\frac{\pi}{2}x)$  درمی‌آید که به ازای  $x = 1$  مقدار خود را خواهد داشت که با توجه به شکل، این‌گونه نیست، پس  $b = -\frac{1}{2}$  بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 + \sin(-\frac{\pi}{2}x) \Rightarrow f(\frac{25}{3}) = 3 + \sin(-\frac{25\pi}{6}) \\ &= 3 - \sin(\frac{25\pi}{6}) = 3 - \sin(4\pi + \frac{\pi}{6}) = 3 - \sin \frac{\pi}{6} = 3 - \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow f(\frac{25}{3}) = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

۱۵۸۴ (۴) (۳) (۲) (۱)

دوره تناوب تابع با توجه به نمودار آن  $T = 4\pi$  است. از سوی دیگر دوره تناوب تابع  $y = \frac{1}{2} + 2\cos(mx)$  برابر  $T = \frac{2\pi}{|m|}$  می‌باشد. چون نمودار داده شده، مانند نمودار  $y = \cos x$  است، پس  $m > 0$ . بنابراین:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{m} = 4\pi \Rightarrow m = \frac{1}{2} \Rightarrow y &= \frac{1}{2} + 2\cos \frac{1}{2}x \\ \Rightarrow y(\frac{16\pi}{3}) &= \frac{1}{2} + 2\cos \frac{8\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2\cos(\frac{9\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) \\ &= \frac{1}{2} + 2\cos(3\pi - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} - 2\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

۱۵۸۵ (۴) (۳) (۲) (۱)

نمودار در یک دوره تناوب داده شده است و با توجه به آن، دوره تناوب تابع برابر  $T = \frac{2\pi}{3}$  است. از طرفی دوره تناوب تابع  $y = 1 - \sin(mx)$ ،

برابر  $T = \frac{2\pi}{|m|}$  است. پس:

$$\frac{2\pi}{|m|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |m| = 3$$

می‌دانیم اگر  $m > 0$ ، آن‌گاه نمودار  $y = \sin(mx)$  با شروع از صفر، ابتدا ماکسیمم و سپس مینیمم دارد و در نتیجه نمودار  $y = -\sin(mx)$  ابتدا مینیمم و سپس ماکسیمم خواهد داشت. واضح است که نمودار  $y = 1 - \sin(mx)$ ، انتقال یافته نمودار  $y = -\sin(mx)$  در راستای محور  $y$ ‌ها و به اندازه یک واحد به سمت بالا است و لذا مانند نمودار  $y = -\sin x$ ، ابتدا مینیمم و سپس ماکسیمم دارد. پس با توجه به نمودار، می‌توان گفت  $m > 0$  و لذا  $m = 3$ . بنابراین:

$$\begin{aligned} y = 1 - \sin 3x \Rightarrow y(\frac{7\pi}{6}) &= 1 - \sin \frac{7\pi}{2} = 1 - \sin(3\pi + \frac{\pi}{2}) \\ &= 1 - (-\sin \frac{\pi}{2}) = 1 + \sin \frac{\pi}{2} = 2 \end{aligned}$$

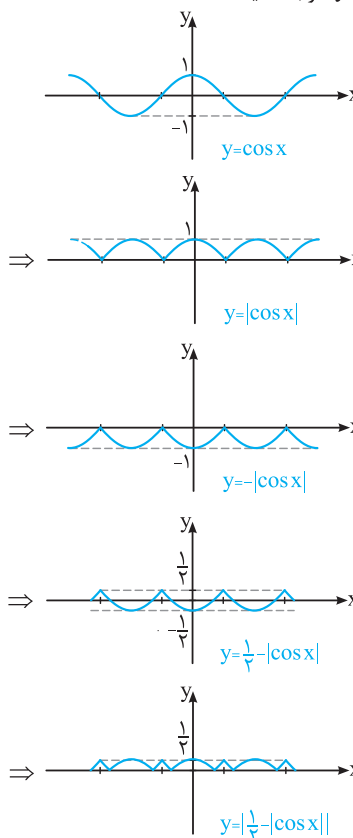
۱۵۸۶ (۴) (۳) (۲) (۱)

نمودار تابع در یک دوره تناوب رسم شده است. پس می‌توان نوشت:

$$T = 6 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 6 \Rightarrow \frac{2}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

۱۵۸۰ (۴) (۳) (۲) (۱)

به مراحل رسم  $y = |\frac{1}{3} - |\cos x||$  توجه کنید:



۱۵۸۱ (۴) (۳) (۲) (۱)

با توجه به شکل، نمودار تابع  $y = a + 3\sin bx$  از نقطه  $(0, 1)$  می‌گذرد. پس:

$$y = a + 3\sin bx \xrightarrow{x=0, y=1} 1 = a + 3\sin 0 \Rightarrow a = 1$$

همچنین نمودار تابع در یک بازه به طول  $2\pi$  تکرار می‌شود، پس  $T = 2\pi$  است. از طرفی دوره تناوب تابع  $y = 1 + 3\sin bx$  برابر  $T = \frac{2\pi}{|b|}$  است.

$$\frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \Rightarrow |b| = 1$$

بنابراین:

از آنجایی که نمودار تابع سینوسی، نسبت به محور  $x$ ‌ها قرینه شده، پس  $b = -1$ ، در نتیجه  $ab = -1$

۱۵۸۲ (۴) (۳) (۲) (۱)

با توجه به نمودار داریم:  $f(0) = 0 \Rightarrow a + b = 0$  (۱)

با مقایسه این نمودار با نمودار  $y = \cos x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  معلوم می‌شود که علاوه بر انبساط افقی، عرض‌های نقاط نمودار در عدد منفی  $b$  ضرب شده‌اند و سپس به اندازه  $a$  واحد به بالا منتقل داده شده‌اند. چون  $y = \cos x$  در  $x = \pi$  به مینیمم خود می‌رسد و زاویه  $\frac{\pi}{3}x$ ، به ازای  $x = 2$  برابر  $\pi$

می‌شود، پس تابع  $f(x) = a + b\cos(\frac{\pi}{3}x)$  به ازای  $x = 2$  به

ماکسیمم خود خواهد رسید. بنابراین:

$$f(2) = 4 \Rightarrow a + b\cos \pi = 4 \Rightarrow a - b = 4$$
 (۲)

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -2$$