فصل اول

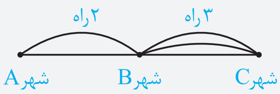
آنالیـــز ترکیبـــی و احتمـــال

حتماً بخوانید

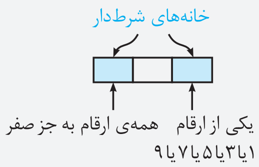
آنالیـز ترکیبـی، یکـی از پیش‌نیازهـای بسـیار مهـم فصـل احتمـال اسـت کـه تقریبـاً هـر ۲ سـال یـک بـار در کنکـور بـه طـور مجـزا نیـز از آن تسـت می‌آیـد و بنابرایـن شـاید امسـال نوبتـش باشـد. جالـب ماجـرا اینجـا اسـت کـه در سـال ۹۲ همان‌طـور کـه پیش‌بینـی می‌شـد، از خـود تمرینـات کتـاب در کنکـور تسـت مطـرح شـد و ایـن امـر، اهمیـت تمرینـات جدیـد کتـاب درسـی را نشـان می‌دهـد، تمریناتـی کـه شـاید خیلی‌هـا بـه آن دقـت نکـرده باشـند! بـه همیـن خاطـر مـا تمرینـات مهـم آنالیـز ترکیبـی را بـه خوبـی تجزیـه و تحلیـل کـرده و نتیجـه‌ی آن را در قالـب چنـد تسـت بـرای شـما آمـاده نموده‌ایـم.
امـا در مـورد مبحـث احتمـال بایـد بگوییـم کـه آمـدن **۴ سـؤال** از ایـن قسـمت در سـال ۹۲ نشـان داد کـه ایـن مبحـث چـه قـدر مهـم و جـدی اسـت. چهـار سـؤال از ۳۰ سـؤال کنکـور یعنـی بـه تنهایـی چیـزی حـدود ٪۱۴ سـؤالات!! بـا توجـه بـه ایـن کـه سـؤالات احتمـال جـزء سـؤالات متوسـط هسـتند، ایـن درصـد بسـیار جالـب توجـه و در مبحـث احتمـال، قابـل تأمـل اسـت.
بـه هـر حـال هـر سـال حداقل دو تسـت از احتمال می‌آید. اگر سـه سـؤال در کنکور داده شـود، یکـی از کتاب ریاضـی ۳ و چنـد تسـت بعدتر دو سـؤال از کتاب سـال چهـارم می‌آید. زدن تسـت‌های احتمال خیلی دشـوار نیسـت **به شـرطی کـه فن کوزه‌گـری را بلد باشـید**. این فن یعنـی این‌کـه بدانید تسـت داده شـده، مربوط بـه کـدام بخـش و مبحـث احتمـال اسـت. در درسـنامه‌های کوتـاه و روان ایـن قسـمت، می‌توانیـد روش‌های بی‌نظیـر فهمیـدن مبحـث تسـت اعـم از نشـانه‌های مختلف و حتـی نحوه‌ی اسـتفاده از شـماره‌ی سـؤال در دفترچـه را یـاد بگیریـد. هم‌چنیـن به کمـک «ورزن‌های دیگر سـؤال»، «دیدهای ویـژه» و «ترفندهـای ویژه» ضمـن دیـدن نمونـه سـؤال‌های قابـل طـرح و پـی بـردن بـه بخش‌هـای پراهمیـت و کم‌اهمیـت، می‌توانیـد ترفندهـای موجـود بـرای حل تسـت‌ها را نیـز بیاموزید.

۱ اصل ضرب

اگر دو عمل مستقل A و B یکی به n طریق و دیگری به m طریق قابل انجام باشد، آن‌گاه این دو عمل با هم به $m \times n$ طریق مختلف قابل انجام هستند.



◀ **مثال:** از شهر A به شهر B، دو راه و از شهر B به شهر C، سه راه وجود دارد. پس طبق اصل ضرب به $۶ = ۳ \times ۲$ طریق مختلف می‌توان از شهر A به شهر C رفت (با عبور از شهر B).



◀ **روش:** در حل مسائل (بالاخص مسائل اعداد) برای استفاده از اصل ضرب ابتدا به سراغ خانه‌های شرطدار می‌رویم. **مثلاً:** اگر بخواهیم تعداد اعداد فرد سه رقمی را بیابیم، خانه‌های یکان (به خاطر فرد بودن) و صدگان (صفر نباید در این خانه باشد) شرطدار هستند.

◀ **نکته:** در حل مسائل اگر بین دو یا چند عمل انتخاب، «وَ» به کار رود، تعداد حالات انجام آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم و اگر «یا» به کار رود، تعداد حالات انجام آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

۱ چند عدد چهار رقمی با ارقام فرد و متمایز بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟

داخل تجربی ۹۰ | پاسخ: ۳

۱) ۷۲ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۱۰۸

می‌خواهیم با ارقام فرد ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ عدد چهار رقمی بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ با ارقام **متمایز** بسازیم، لذا خانه‌ی شرطدار، هزارگان است که نباید عدد ۱ باشد. پس از این خانه محاسبه را شروع می‌کنیم و در هر مرحله یک رقم از تعداد کل ارقام کم می‌کنیم:

مرحله۱ مرحله۲ مرحله۳

تعداد حالات: $\boxed{۴} \times \boxed{۴} \times \boxed{۳} \times \boxed{۲} = ۹۶$

۳، ۵، ۷ یا ۹ — یکی از سه رقم باقی‌مانده از مرحله‌ی قبل و ۱ عدد

۲ یک عدد سه رقمی را متقارن گوییم، هرگاه رقم یکان و صدگان آن برابر باشند (مانند ۱۶۱). تعداد اعداد سه رقمی متقارن فرد کدام است؟

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۲

۱) ۴۵ ۲) ۵۰

۳) ۲۵۰ ۴) ۴۵۰

صدگان شبیه یکان

تعداد حالات: $\boxed{۱} \times \boxed{۱۰} \times \boxed{۵} = ۵۰$

همه‌ی ارقام — یکی از ارقام ۱،۳،۵،۷،۹

در اعداد سه رقمی متقارن، هر رقمی در یکان قرار بگیرد، رقم صدگان با آن برابر است. لذا با مشخص شدن رقم یکان، رقم صدگان نیز خود به خود مشخص می‌شود و حق انتخابی برای آن نداریم. از طرفی برای آن‌که عدد حاصل فرد باشد، یکان آن باید ۱، ۳، ۵، ۷ یا ۹ باشد. پس داریم:

فرار از اشتباه: متاسفانه بعضی از دوستان! در این مسأله توجه ندارند که با معلوم شدن یکان، رقم صدگان خود به خود معلوم می‌شود و انتخابی برای آن نداریم و برای آن ۵ حالت در نظر می‌گیرند!

۳ با استفاده از رنگ‌های آبی، قرمز و سبز به چند روش می‌توان خانه‌های شکل زیر را رنگ کرد به‌طوری که خانه‌های مجاور رنگشان متفاوت باشند؟

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۳

۱) ۱۲۰ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۲۴۳

خانه اول را با یکی از سه رنگ آبی، قرمز یا سبز رنگ می‌کنیم ولی برای خانه‌های بعدی باید حواسمان باشد، رنگ مورد استفاده نباید شبیه رنگ خانه‌ی قبلی باشد. مثلاً اگر خانه‌ی اول را آبی کرده‌ایم، برای خانه‌ی دوم باید از دو رنگ قرمز یا سبز استفاده کنیم نه آبی! به همین ترتیب برای رنگ کردن خانه‌ی سوم، رنگ خانه‌ی دوم را نباید استفاده کنیم. پس از خانه‌ی دوم به بعد برای رنگ کردن خانه‌ها فقط ۲ حق انتخاب داریم. بنابراین:

$\boxed{۳} \times \boxed{۲} \times \boxed{۲} \times \boxed{۲} \times \boxed{۲} \Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $= ۳ \times ۲^۴ = ۳ \times ۱۶ = ۴۸$

۲ جایگشت

یادآوری (فاکتوریل): به حاصل‌ضرب اعداد طبیعی متوالی از ۱ تا n، n فاکتوریل (n!) می‌گویند.

$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times ۳ \times ۲ \times ۱$ **مثلاً**: $۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$ و $۰! = ۱$ (قرارداد)

جایگشت: اگر تعدادی شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالت قرار گرفتن آن‌ها در کنار هم یک جایگشت می‌گویند.

◀ **نکته:** تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر $n!$ است. **مثلاً:** ۳ حرف a، b و c به $3!=6$ حالت می‌توانند کنار هم قرار بگیرند.

جایگشت‌های با تکرار: اگر در میان n شیء موجود، r شیء شبیه هم وجود داشته باشد، تعداد جایگشت‌های اشیاء برابر $\frac{n!}{r!}$ است.

مثلاً: تعداد جایگشت‌های حروف $c،c،b،a،a$ برابر $\frac{5!}{\underset{\text{۲ تا a تکراری}}{2!}\,\underset{\text{۲ تا c تکراری}}{2!}}$ است.

دیر ویژه: بحث جایگشت‌های با تکرار به‌طور مستقیم در کتاب درسی نیامده، اما در مسائل ساده مانند مثال فوق به کار می‌رود. به هر حال دانستن مطلب در همین حد برای حل مسائل آنالیز ترکیبی و احتمال کافی است و بیشتر از آن به هیچ وجه لازم نیست.

۴ حروف کلمه‌ی SERESHT را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد، به طوری‌که حرف R همواره در وسط قرار گیرد؟

برگرفته از کتاب درسی | پاسخ: ۲

۱) ۳۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۳۶۰

۷ خانه در نظر می‌گیریم و حرف R را در خانه‌ی وسط قرار می‌دهیم.

			R			

حال ۶ حرف S، E، S، E، H و T باقی می‌مانند که باید در ۶ مکان باقی‌مانده قرار بگیرند. پس انگار جایگشت ۶ حرف را می‌خواهیم که در آن ۲ حرف E و S هر یک دو بار تکرار شده‌اند. بنابراین تعداد جایگشت‌ها برابر $\frac{6!}{2!2!}=\frac{720}{4}=180$ است.

۳ چند شیء کنار هم باشند یا نباشند

◀ **روش:** اگر در محاسبه‌ی جایگشت اشیاء، بخواهیم چند شیء خاص کنار هم باشند،آن‌ها را در داخل یک بسته قرار داده و یک شیء در نظر می‌گیریم. سپس جایگشت شیء حاصل را با اشیای دیگر محاسبه می‌کنیم.

◀ **مثال:** ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ به چند طریق می‌توانند کنار هم قرار بگیرند، به‌طوری که:

الف) ۲ و ۴ کنار هم باشند.

جابجایی داخل بسته

$\underbrace{1,3,(2,4)}_{\text{۳ شیء}} \Rightarrow$ تعداد حالات مطلوب $=3!\times 2!$

ب) ۲ بلافاصله بعد از ۴ بیاید.

۲و۴ داخل بسته جابجایی ندارند!

$\underbrace{1,3,(4,2)}_{\text{۳ شیء}} \Rightarrow$ تعداد حالات مطلوب $=3!\times 1$

دیر ویژه: این قسمت را طراحان کنکور بیشتر از بقیه‌ی قسمت‌ها دوست داشته‌اند! جدیداً باب شده که از فعل منفی در صورت تست استفاده می‌شود و می‌گویند مثلاً a و b کنار هم نباشند! در این صورت تعداد جایگشت‌هایی که a و b کنار هم هستند را به دست می‌آوریم و از تعداد کل جایگشت‌ها کم می‌کنیم.

۵ ارقام ۱،۲،۳،۴،۵ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند. تعداد پنج رقمی‌های حاصل کدام است؟

داخل تجربی ۸۲ | پاسخ: ۳

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

ارقام فرد۱، ۳ و ۵ را در داخل یک بسته قرار داده و یک شیء در نظر می‌گیریم که با دو عدد دیگر یعنی ۲ و۴ تشکیل سه شیء می‌دهند که $3!$ جایگشت دارند. از طرفی خود اعداد ۱، ۳ و ۵ نیز در داخل بسته به $3!$ حالت می‌توانند جابه‌جا شوند. بنابراین داریم:

$\underbrace{\boxed{1}\,\boxed{3}\,\boxed{5}}_{\text{۱بسته}},\boxed{2},\boxed{4} \Rightarrow$ تعداد اعداد ۵ رقمی مورد‌نظر $=3!\times 3!=6\times 6=36$

۶ حروف کلمه‌ی LAGRANGE را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم. در چند حالت، حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟

داخل تجربی ۸۴ | پاسخ: ۳

۱) ۳۶۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۱۴۴۰

دو حرف A را یک بسته و دو حرف G را نیز یک بسته در نظر می‌گیریم که با ۴ حرف دیگر یعنی E، N، R و L تشکیل ۶ شیء می‌دهند. این شش شیء $6!$ جایگشت دارند.

$\underbrace{\boxed{A,A}\,\boxed{G,G}\,\boxed{L}\,\boxed{R}\,\boxed{N}\,\boxed{E}}_{\text{۶ شیء}} \Rightarrow$ تعداد جایگشت‌ها $=6!=720$

فرار از اشتباه: در داخل هر کدام از بسته‌ها، حروف یکسان قرار دارند. پس با جابجایی آن‌ها درون بسته حالت جدیدی ایجاد نمی‌گردد و بر روی تعداد جایگشت‌ها تأثیری ندارند. ضمناً این مسأله ارتباطی با مسائل «جایگشت با تکرار» ندارد.

۷ تعداد جایگشت‌های حروف کلمه‌ی SYSTEM به طوری‌که S ها کنار هم نباشند، کدام است؟

خارج تجربی ۹۲ | پاسخ: ۳

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

در سؤال از فعل منفی استفاده شده است. پس همان‌طور که در دید ویژه تأکید کردیم، ابتدا جایگشت‌هایی از حروف کلمه‌ی SYSTEM را می‌یابیم که دو حرف S کنار هم باشند. سپس آن‌ها را از تعداد کل جایگشت‌ها کم می‌کنیم:

$\underbrace{\text{SS YTEM}}_{\text{۵ شیء متمایز}} \Rightarrow$ تعداد جایگشت‌هایی که دو حرف S کنار هم هستند. $= ۵! = ۱۲۰$

از طرفی تعداد کل جایگشت‌های ۶ حرف S، S، Y، T، E و M که در میان آن‌ها ۲ حرف یکسان وجود دارد، طبق درسنامه‌ی «جایگشت‌های با تکرار» برابر $\frac{۶!}{۲!} = \frac{۷۲۰}{۲} = ۳۶۰$ است. بنابراین جواب برابر $۳۶۰ - ۱۲۰ = ۲۴۰$ می‌شود.

۴ جایگشت یکی در میان

در دو حالت زیر، اعضای تیم‌های A و B می‌توانند به صورت یکی در میان قرار بگیرند:

الف) تعداد اعضای A و B با هم مساوی باشند:

(جایگشت اعضای B) × (جایگشت اعضای A) × ۲ = تعداد جایگشت‌های یکی در میان

ب) تعداد اعضای A و B یکی اختلاف داشته باشند:

(جایگشت اعضای B) × (جایگشت اعضای A) = تعداد جایگشت‌های یکی در میان

۸ با جابه‌جایی ارقام عدد ۵۷۶۲۲۲ چند عدد شش رقمی می‌توان تشکیل داد به‌طوری که رقم‌های ۲ یک در میان باشند؟

برگرفته از کتاب درسی | پاسخ: ۲

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

سه رقم ۲ را گروه A و سه رقم ۶، ۵ و ۷ را گروه B در نظر می‌گیریم. چون تعداد اعضای دو گروه یکسان است، طبق درسنامه داریم:

تعداد حالات یکی در میان: $۲ \times$ (جایگشت اعضای A) $\times$ (جایگشت اعضای B) $= ۲ \times ۱ \times ۳! = ۲ \times ۶ = ۱۲$

تذکر: چون اعضای گروه A یکسان هستند، جایگشت اعضای آن یک است و جابه‌جایی آن‌ها نسبت به هم حالت جدیدی ایجاد نمی‌کند.

۵ ترتیب و ترکیب

ترتیب: تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز، هرگاه ترتیب انتخاب آن‌ها مهم باشد (مثل انتخاب سه نفر از یک گروه برای سمت‌های مدیریت، معاونت و نگهبانی)، از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثلاً: $P(۵,۴) = \frac{۵!}{(۵-۴)!} = \frac{۵!}{۱!} = ۵! = ۱۲۰$

دید ویژه: در حل مسائل ترتیب بهتر است از همان چیزهایی که در جایگشت و اصل ضرب یاد گرفتیم استفاده کنیم نه فرمول فوق! ولی شما باید فرمول را حفظ باشید تا در مسائلی که صرفاً فرمول مهم است یا جواب را برحسب $P(n,r)$ داده‌اند، بتوانید از آن استفاده کنید.

ترکیب: تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز، اگر ترتیب انتخاب آن‌ها مهم نباشد و فقط انتخاب r شیء ملاک باشد (مثل انتخاب دو نفر از یک کلاس برای اردو)، از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

دید ویژه: خیلی از مسائلی که در کنکور از مبحث آنالیز ترکیبی و احتمال می‌آید، از مبحث ترکیب می‌باشد. پس به این قسمت و تست‌های مربوط به آن توجه ویژه‌ای داشته باشید.

خواص مهم ترکیب:

۱) $\boxed{\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1}$ مثلاً: $\binom{5}{0}=\binom{5}{5}=1$

۲) $\boxed{\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n}$ مثلاً: $\binom{5}{1}=\binom{5}{4}=5$

۳) $\boxed{\binom{n}{2}=\binom{n}{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}}$ مثلاً: $\binom{5}{2}=\binom{5}{3}=\frac{5\times 4}{2}=10$

۴) قاعده‌ی پاسکال: $\boxed{\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}}$ مثلاً: $\binom{25}{9}+\binom{25}{10}=\binom{26}{10}$

دو عدد یکسان — یکی به n اضافه می‌شود. — دو عدد متوالی — عدد بزرگ‌تر

دو عدد یکسان — یکی به ۲۵ اضافه شود. — دو عدد متوالی — عدد بزرگ‌تر

ارتباط بین ترتیب و ترکیب:

$\boxed{P(n,r)=C(n,r)\times r!}$ مثلاً: $P(5,3)=C(5,3)\times 3!$

۹ اگر $\frac{P(n,4)}{C(n-1,4)}=26$، مقدار n کدام است؟

خارج تجربی ۸۴ | پاسخ: ۱

۱) ۵۲ ۲) ۵۳ ۳) ۵۴ ۴) ۵۵

با توجه به فرمول‌های $P(n,r)$ و $C(n,r)$ داریم:

$$\frac{P(n,4)}{C(n-1,4)}=26\Rightarrow\frac{\frac{n!}{(n-4)!}}{\frac{(n-1)!}{(\underbrace{(n-1)-4}_{n-5})!\,4!}}\xrightarrow[\text{نزدیک در نزدیک}]{\text{دور در دور}}\frac{\overset{n(n-1)!}{n!}(n-5)!4!}{(n-1)!\underset{(n-4)(n-5)!}{(n-4)!}}=26\Rightarrow\frac{n\cancel{(n-1)!}\,\cancel{(n-5)!}\times 24}{\cancel{(n-1)!}(n-4)\cancel{(n-5)!}}=26$$

$$\Rightarrow\frac{24n}{n-4}=26\Rightarrow 24n=26(n-4)\xrightarrow{\div 2}12n=13(n-4)\Rightarrow 12n=13n-52\Rightarrow n=52$$

۱۰ از هر یک از مدارس A، B، C، D و E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان سه دانش‌آموز که دوبه‌دو غیرهم‌مدرسه باشند، انتخاب کرد؟

داخل تجربی ۹۲ و تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۳

۱) ۱۶۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۶۴۰ ۴) ۴۸۰

سه دانش‌آموز دو به دو غیر هم مدرسه‌ای یعنی سه دانش‌آموز را از ۳ مدرسه‌ی مختلف برداریم. پس ابتدا ۳ مدرسه از ۵ مدرسه را به $\binom{5}{3}$ حالت انتخاب می‌کنیم. مثلاً مدارس A، B و C. سپس یک نفر از ۴ نفر مدرسه‌ی A، یک نفر از ۴ نفر مدرسه‌ی B و یک نفر از ۴ نفر مدرسه‌ی C انتخاب می‌کنیم که برای هر کدام از این انتخاب‌ها ۴ حالت وجود دارد. پس داریم:

$$\underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{انتخاب ۳ مدرسه از ۵ مدرسه}}\times 4\times 4\times 4=\frac{5\times 4}{2}\times 64=640$$

۱۱ اگر در یک سالن دو ردیف صندلی و در هر ردیف ۴ صندلی باشد، به چند طریق ۳ دانش‌آموز سال اول و ۲ دانش‌آموز سال دوم می‌توانند روی آن‌ها بنشینند به‌طوری که اولی‌ها در ردیف اول باشند؟

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۳

۱) ۸۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۳۶۰

یکی از تمرینات مهم کتاب درسی! ابتدا سه صندلی از چهار صندلی ردیف اول را به $\binom{4}{3}$ طریق انتخاب و سپس ۳ دانش‌آموز سال اولی را به $3!$ حالت روی آن‌ها می‌نشانیم. حال ۵ صندلی باقی‌مانده است (۴ صندلی در ردیف دوم و ۱ صندلی در ردیف اول) و باید ۲ دانش‌آموز سال دومی را در این صندلی‌ها قرار داد. پس دو صندلی از پنج صندلی باقی‌مانده را به $\binom{5}{2}$ طریق انتخاب و ۲ دانش‌آموز سال دوم را به $2!$ حالت روی آن‌ها می‌نشانیم. پس طبق اصل ضرب داریم:

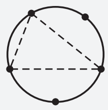
$$\text{تعداد حالات مورد نظر}:\ \binom{4}{3}\times 3!\times\binom{5}{2}\times 2!=4\times 6\times\frac{5\times 4}{2}\times 2=480$$

ورژن دیگر: از آن‌جا که $P(n,r)=\binom{n}{r}\times r!$، پاسخ نهایی را می‌توان به‌صورت زیر نیز بیان نمود، زیرا ممکن است طراح، گزینه‌ها را برحسب P بدهد:

$$\underbrace{\binom{۴}{۳}\times ۳!}_{P(۴,۳)}\times\underbrace{\binom{۵}{۲}\times ۲!}_{P(۵,۲)}=P(۴,۳)\times P(۵,۲)$$

۶ مسائل هندسی ترکیب

فرض کنید n نقطه روی محیط دایره باشد. تعداد k ضلعی‌هایی که با استفاده از این n نقطه می‌توان ساخت از فرمول $\binom{n}{k}$ به‌دست می‌آید. **مثلاً:** اگر ۵ نقطه روی یک دایره باشد، تعداد ۳ ضلعی‌های ساخته شده با این نقاط برابر $\binom{۵}{۳}=۱۰$ است.



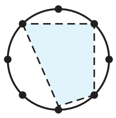
۱۲ **بر روی یک دایره، ۸ نقطه‌ی متمایز وجود دارد. تعداد چهارضلعی‌های محدب که هر رأس آن واقع بر نقاط مفروض باشد، کدام است؟**

داخل تجربی ۸۰ | پاسخ: ۳

۱) ۵۶ ۲) ۶۸ ۳) ۷۰ ۴) ۷۲

برای ساخت چهارضلعی موردنظر نیاز به ۴ نقطه (رأس) داریم. پس کافی است از بین ۸ نقطه‌ی متمایز، ۴ تا انتخاب کنیم که این کار به $\binom{۸}{۴}$ طریق مختلف قابل انجام است. لذا داریم:

$$\text{تعداد چهارضلعی‌های محدب}=\binom{۸}{۴}=\frac{۸!}{۴!۴!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵\times\cancel{۴!}}{۴\times۳\times۲\times۱\times\cancel{۴!}}=۷۰$$



۷ حداقل، حداکثر و روش متمم

در مسائل ترکیب و خصوصاً بعداً در احتمال مسائلی را خواهید دید که با لفظ حداقل یا حداکثر همراهند. بهتر است همین‌جا با این مفاهیم آشنا شویم:

۱ حداکثر k نفر، یعنی k نفر یا کم‌تر از k نفر. به عبارت دیگر یعنی: k نفر یا $(k-۱)$ نفر یا $\cdots$ یا ۲ نفر یا ۱ نفر یا ۰ نفر.

۲ حداقل k نفر، یعنی k نفر یا بیشتر از k نفر. به عبارت دیگر یعنی: k نفر یا $(k+۱)$ نفر یا $(k+۲)$ نفر یا ... .

روش متمم: بعضی وقت‌ها محاسبه‌ی تعداد حالات مطلوب مسأله خیلی وقت‌گیر و طولانی است. در این مسائل بهتر است تعداد حالات نامطلوب که محاسبه‌اش راحت‌تر می‌باشد را به‌دست آورده و این حالات نامطلوب را از کل حالات کم کنیم.

تعداد حالات نامطلوب − تعداد کل حالات = تعداد حالات مطلوب

دید ویژه: اگر در صورت تست «**حداقل یکی**» را دیدید سریعاً بفهمید که باید از روش متمم سؤال را حل کنید. **مثلاً:** متمم آن که «**حداقل یکی** از ۳ نفر دکتر باشد» می‌شود «هیچ‌کدام از ۳ نفر دکتر نباشد!»

۱۳ **از بین ۵ دانش‌آموز تجربی و ۳ دانش‌آموز ریاضی، به چند طریق می‌توان سه نفر برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد؛ به‌طوری که لااقل دو نفر از آن‌ها دانش‌آموز تجربی باشند؟**

خارج تجربی ۹۰ | پاسخ: ۴

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

از بین ۳ نفر انتخابی می‌خواهیم حداقل ۲ نفر دانش‌آموز تجربی باشد. پس باید ۲ نفر از دانش‌آموزان رشته‌ی تجربی و ۱ نفر باقی‌مانده را از دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی یا هر ۳ نفر را از دانش‌آموزان رشته‌ی تجربی انتخاب کنیم:

$$\text{تعداد حالات انتخاب}:\binom{۵}{۲}\overset{\text{و}}{\times}\binom{۳}{۱}\overset{\text{یا}}{+}\binom{۵}{۳}=\frac{۵\times۴}{۲}\times۳+\frac{۵!}{۳!۲!}=۳۰+\frac{۵\times۴}{۲}=۴۰$$

۱۴ **از میان ۷ کشتی‌گیر و ۵ وزنه‌بردار به چند روش می‌توان ۳ نفر را انتخاب کرد، به‌طوری که حداقل یک نفر کشتی‌گیر باشد؟**

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۳

۱) ۲۲۰ ۲) ۶۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۱۶۰

طبق درسنامه لفظ «حداقل یکی» در سؤال وجود دارد، پس خیلی سریع از روش متمم استفاده می‌کنیم. متمم عبارت خواسته شده آن است که هیچ کدام از سه نفر انتخابی کشتی‌گیر نباشند. یعنی باید هر ۳ نفر را از بین ۵ نفر وزنه‌بردار انتخاب کنیم. پس داریم:

$$\text{متمم}:\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۳!۲!}=۱۰$$

از طرفی کل حالات، انتخاب ۳ نفر از ۱۲ = ۷ + ۵ نفر است که برابر می‌شود با:

$$\text{کل حالات}: \binom{۱۲}{۳} = \frac{۱۲!}{۹!۳!} = \frac{\cancel{۱۲}^{۲}\times ۱۱\times ۱۰\times \cancel{۹!}}{\cancel{۹!}\times \cancel{۶}} = ۲۲۰$$

پس جواب مسأله برابر می‌شود با:

$$\text{حالات مطلوب} = \text{کل حالات} - \text{حالات نامطلوب} = ۲۲۰ - ۱۰ = ۲۱۰$$

۱۵ از ۱۰ پرسش موجود، به چند طریق می‌توان ۸ پرسش را جهت پاسخ‌گویی انتخاب کرد، به شرط آن‌که حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟

برگرفته از کتاب درسی | پاسخ: ۴

۱) ۲۵   ۲) ۳۰   ۳) ۳۲   ۴) ۳۵

حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول یعنی (۴ پرسش از ۵ پرسش اول) یا (۵ پرسش از ۵ پرسش اول). بنابراین:

$$\underbrace{\binom{۵}{۴}}_{\text{۴تا از ۵تای اول}}\underbrace{\binom{۵}{۴}}_{\text{۴تا از ۵تای دوم}} + \underbrace{\binom{۵}{۵}}_{\text{۵تا از ۵تای اول}}\underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{۳تا از ۵تای دوم}} = ۵\times ۵ + ۱\times \frac{۵\times ۴}{۲} = ۲۵ + ۱۰ = ۳۵$$

۸ زیرمجموعه

تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی از فرمول $\binom{n}{k}$ به‌دست می‌آید. از طرفی می‌دانیم تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر ۲^n است. پس داریم:

$$\boxed{\underbrace{\binom{n}{۰}}_{\text{زیرمجموعه ۰ عضوی}} + \underbrace{\binom{n}{۱}}_{\text{زیرمجموعه ۱ عضوی}} + \underbrace{\binom{n}{۲}}_{\text{زیرمجموعه ۲ عضوی}} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{\text{زیرمجموعه n عضوی}} = ۲^n}$$

نکته: اگر A یک مجموعه‌ی n عضوی باشد، داریم:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های زوج عضوی} = \text{تعداد زیرمجموعه‌های فرد عضوی} = ۲^{n-۱}$$

۱۶ تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی از مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e,f\}$ شامل عضو a، کدام است؟

داخل تجربی ۹۳ | پاسخ: ۲

۱) ۸   ۲) ۱۰   ۳) ۱۲   ۴) ۱۵

می‌خواهیم سه عضو از مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e,f\}$ انتخاب کنیم که شامل a باشد. پس یکی از سه عضو، a است. لذا فقط دو عضو دیگر نیاز داریم که باید آن‌ها را از بین ۵ عضو باقی‌مانده، یعنی b، c، d، e و f انتخاب کنیم که این کار به $\binom{۵}{۲} = \frac{۵\times ۴}{۲} = ۱۰$ طریق مختلف ممکن است.

۱۷ تعداد زیرمجموعه‌های زوج عضوی مجموعه‌ی $\{۱,۲,\dots,۱۰\}$ کدام است؟

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۴

۱) ۱۰۲۴   ۲) ۲۵۶

۳) ۵۱۱   ۴) ۵۱۲

با توجه درسنامه تعداد زیرمجموعه‌های زوج عضوی مجموعه‌ی ۱۰ عضوی برابر $۲^{۱۰-۱} = ۲^۹ = ۵۱۲$ است.

۱۸ حاصل $\binom{۸}{۱} + \binom{۸}{۲} + \cdots + \binom{۸}{۷}$ کدام است؟

برگرفته از کتاب درسی | پاسخ: ۴

۱) ۱۲۸   ۲) ۱۲۶

۳) ۲۵۶   ۴) ۲۵۴

طبق درسنامه:

$$\binom{۸}{۰} + \underbrace{\binom{۸}{۱} + \binom{۸}{۲} + \cdots + \binom{۸}{۷}}_{\text{عبارت خواسته شده}} + \binom{۸}{۸} = ۲^۸ \Rightarrow \binom{۸}{۱} + \binom{۸}{۲} + \cdots + \binom{۸}{۷} = ۲^۸ - \binom{۸}{۰} - \binom{۸}{۸} = ۲۵۶ - ۱ - ۱ = ۲۵۴$$

۹ فرمول اصلی احتمال

اگر تعداد اعضای پیشامد A را با $n(A)$ و تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را با $n(S)$ نمایش دهیم، احتمال رخداد پیشامد A برابر است با:

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}}$$

دید ویژه: حل اکثر مسائل این بخش ساده می‌باشد و نیاز به تسلط بر مبحث ترکیب از بخش آنالیز ترکیبی دارد.

۱۹ در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می‌شوند. اگر به طور تصادفی ۴ موش از بین آن‌ها جهت آزمایش برداشته شوند، با کدام احتمال فقط یکی از موش‌های مورد آزمایش، سفید است؟

داخل تجربی ۸۶ و مشابه داخل تجربی ۸۴ | پاسخ: ۳

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

$$\text{احتمال مورد نظر} = \frac{\overbrace{\binom{۳}{۱}}^{\text{انتخاب یکی از ۳ موش سفید}} \times \overbrace{\binom{۵}{۳}}^{\text{انتخاب ۳تای دیگر از ۵ موش سیاه}}}{\underbrace{\binom{۸}{۴}}_{\text{انتخاب ۴ تا از کل موش‌ها}}} = \frac{۳\times\frac{۵!}{۳!۲!}}{\frac{۸!}{۴!۴!}} = \frac{۳\times\frac{۵\times۴}{۲}}{\frac{۸\times۷\times۶\times۵\times\cancel{۴!}}{۴\times۳\times۲\times۱\times\cancel{۴!}}} = \frac{۳}{۷}$$

۲۰ در ظرفی ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره‌های خارج شده هم‌رنگ‌اند؟

خارج تجربی ۹۲ | پاسخ: ۱

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۳}{۱۴}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۱۴}$

$$\text{احتمال مورد نظر} = \frac{\overbrace{\binom{۴}{۳}}^{\text{انتخاب ۳ تا از ۴ مهره‌ی سفید}} \overset{\text{یا}}{+} \overbrace{\binom{۵}{۳}}^{\text{انتخاب ۳ تا از ۵ مهره‌ی سیاه}}}{\underbrace{\binom{۵+۴}{۳}}_{\text{انتخاب ۳ تا از ۹ مهره‌ی کل}}} = \frac{۴+\frac{۵!}{۳!۲!}}{\frac{۹!}{۳!۶!}} = \frac{۴+۱۰}{\frac{۹\times۸\times۷\times\cancel{۶!}}{۶\times\cancel{۶!}}} = \frac{۱۴}{۸۴} = \frac{۲}{۱۲} = \frac{۱}{۶}$$

۲۱ حروف کلمه‌ی ATAXIA را بریده و به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال هر سه حرف A کنار هم قرار می‌گیرند؟

داخل تجربی ۸۹ | پاسخ: ۲

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را می‌یابیم:

$$A،A،A،T،X،I \xrightarrow{\text{جایگشت با تکرار}} n(S) = \frac{۶!}{\underbrace{۳!}_{\text{سه حرف A}}} = \frac{۶\times۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}} = ۱۲۰$$

حال می‌خواهیم هر سه حرف A کنار هم باشند، پس حروف A را داخل یک بسته قرار می‌دهیم. با این کار ۴ شیء داریم که کنار هم به !۴ حالت می‌توانند قرار بگیرند. حواستان باشد در داخل بسته سه حرف A فقط به یک حالت کنار هم می‌توانند قرار بگیرند. بنابراین:

$$\underbrace{\boxed{A،A،A}،T،X،I}_{\text{۴ شیء}} \Rightarrow n(A) = ۴!\times۱ = ۲۴ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲۴}{۱۲۰} = \frac{۱}{۵}$$

۲۲ ۶ نفر که ۲ نفر آن‌ها برادر هستند، به تصادف در یک ردیف می‌ایستند. چه‌قدر احتمال دارد دو برادر در اول و آخر صف واقع شده باشند؟

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۴

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱}{۱۵}$

دو برادر a و b را به دو حالت در ابتدا و انتهای صف قرار می‌دهیم. سپس ۴ نفر باقی‌مانده در بین آن‌ها به !۴ حالت می‌توانند قرار بگیرند:

$$a\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{۴!}b \ \text{یا}\ b\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{۴!}a \Rightarrow n(A) = ۴!+۴! = ۲\times۴! \ \text{و}\ n(S) = \text{جایگشت ۶ نفر} = ۶!$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۲\times۴!}{۶!} = \frac{۲\times\cancel{۴!}}{۶\times۵\times\cancel{۴!}} = \frac{۱}{۱۵}$$

۲۳ چهار رقم ۳، ۲، ۱ و ۰ را به تصادف در کنار هم قرار می‌دهیم تا عددی چهار رقمی حاصل شود. با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی مضرب ۶، حاصل می‌شود؟

خارج تجربی ۸۹ | پاسخ: ۴

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

وقتی در سؤال گفته است با کنار هم قرار دادن چهار رقم ۰، ۱، ۲ و ۳، عدد چهار رقمی می‌سازیم، یعنی تکرار ارقام مجاز نیست. ابتدا تعداد کل این ارقام را می‌یابیم:

در هر مرحله ۱ رقم مصرف می‌شود

$$n(S)=\boxed{۳}\times\boxed{۳}\times\boxed{۲}\times\boxed{۱}=۱۸$$

یکی از ارقام ۱، ۲، ۳ — یکی از ارقام باقی‌مانده از مرحله‌ی قبل و رقم صفر

برای آن‌که عدد مذکور بر ۶ بخش‌پذیر باشد، باید هم زوج و هم بر ۳ بخش‌پذیر باشد. شرط آن‌که عددی بر ۳ بخش‌پذیر باشد آن است که مجموع ارقامش بر ۳ بخش‌پذیر باشد. چون همواره مجموع ارقام ۰، ۱، ۲ و ۳ برابر ۶ است، لذا هر عدد چهاررقمی که با این ارقام ساخته شود، همواره بر ۳ بخش‌پذیر می‌باشد. بنابراین کافی است تعداد اعداد چهاررقمی زوج را بیابیم. پس با توجه به ارقام موجود، برای زوج بودن باید یکان صفر یا ۲ باشد. از طرفی چون تکرار ارقام مجاز نیست و برای رقم صفر ۲ شرط داریم (در یکان آمدن و در هزارگان نیامدن) باید مسأله را به ۲ قسمت زیر تفکیک کنیم:

۱) صفر در یکان باشد: $\boxed{۳}\times\boxed{۲}\times\boxed{۱}\times\boxed{۱}=۶$ (۲) (۳) (۴) (۱) — ۱ یا ۲ یا ۳، رقم صفر

۲) صفر در یکان نباشد: $\boxed{۲}\times\boxed{۲}\times\boxed{۱}\times\boxed{۱}=۴$ (۲) (۳) (۴) (۱) — ۱ یا ۳، رقم ۲

پس کلاً $۶+۴=۱۰$ عدد زوج داریم که تمام آن ده عدد بر ۳ نیز بخش‌پذیرند. لذا ده عددِ مضرب ۶ داریم و احتمال مورد‌نظر $\frac{۱۰}{۱۸}=\frac{۵}{۹}$ است.

۱۰ احتمال متمم پیشامد A

اگر A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S و A' متمم آن باشد. داریم:

$$\boxed{P(A')=۱-P(A)} \text{ یا } \boxed{P(A)=۱-P(A')}$$

دید ویژه: از احتمال متمم در مسائلی استفاده می‌کنیم که شمارش اعضای پیشامد A، طولانی و وقت‌گیر باشد. همان‌طور که در آنالیز ترکیبی هم اشاره شد، به کلمات «**حداقل**» و «**حداکثر**» در صورت تست‌ها بسیار توجه کنید. این کلمات اغلب بوی استفاده از متمم را می‌دهند! مخصوصاً عبارت «**حداقل یکی**».

۲۴ در ظرفی ۴ مهره‌ی آبی، ۳ مهره‌ی قرمز و ۲ مهره‌ی سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، حداقل یک مهره‌ی آبی، خارج می‌شود؟

خارج تجربی ۹۳ و مشابه خارج تجربی ۹۱ | پاسخ: ۲

۱) $\frac{۳۱}{۴۲}$ ۲) $\frac{۳۷}{۴۲}$ ۳) $\frac{۶۷}{۸۴}$ ۴) $\frac{۷۳}{۸۴}$

حداقل یک مهره از سه مهره‌ی انتخابی آبی، یعنی ۱ مهره یا ۲ مهره یا ۳ مهره‌ی انتخابی آبی باشد. حالت‌ها زیاد است، پس از روش متمم استفاده می‌کنیم که در آن هیچ کدام از ۳ مهره‌ی انتخابی آبی نیست (یعنی هر سه مهره از رنگ‌های قرمز و سفید انتخاب می‌شوند.) بنابراین داریم:

$$P(A')=\frac{\overbrace{\binom{۲+۳}{۳}}^{\text{انتخاب ۳ مهره از رنگ‌های قرمز و سفید}}}{\underbrace{\binom{۲+۳+۴}{۳}}_{\text{انتخاب ۳ مهره از کل مهره‌ها}}}=\frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{\frac{۵!}{۳!۲!}}{\frac{۹!}{۶!۳!}}=\frac{\frac{۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}\times۲}}{\frac{۹\times۸\times۷\times\cancel{۶!}}{\cancel{۶!}\times۶}}=\frac{۱۰}{۸۴}\Rightarrow P(A)=۱-\frac{۱۰}{۸۴}=\frac{۷۴}{۸۴}=\frac{۳۷}{۴۲}$$

۲۵ در آزمایشگاهی ۷ موش نگهداری می‌شوند که بر روی ۳ موش آزمون مهارت انجام شده است. اگر ۲ موش از بین آن‌ها تصادفی انتخاب شوند، با کدام احتمال، لااقل بر روی یکی از آن دو، آزمون انجام شده است؟

داخل تجربی ۸۵ | پاسخ: ۳

۱) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$

۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۱۶}{۲۱}$

برای حل این سؤال از روش متمم استفاده می‌کنیم. (البته حل معمولی مسأله هم خیلی دشوار نمی‌باشد.) فرض می‌کنیم بر روی هیچ‌یک از دو موش انتخابی آزمون مهارت انجام نگرفته باشد. پس داریم:

$$P(A')=\frac{\underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{انتخاب ۲ تا از ۴ موش دیگر}}}{\binom{۷}{۲}}=\frac{\frac{۴\times۳}{۲}}{\frac{۷\times۶}{۲}}=\frac{۶}{۲۱}\Rightarrow P(A)=۱-\frac{۶}{۲۱}=\frac{۱۵}{۲۱}=\frac{۵}{۷}$$

۲۶ در یک بیمارستان ۵ نوزاد در یک روز متولد شده‌اند. با کدام احتمال لااقل دو نفر از آنان دختر است؟

خارج تجربی ۸۸ | پاسخ: ۴

۱) $\frac{۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۷}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۶}$

لااقل ۲ تا از ۵ نوزاد دختر باشد، یعنی ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ دختر. حالت‌ها زیاد شد، پس از متمم می‌رویم. متمم پیشامد موردنظر این می‌شود که یک دختر داشته باشیم (فرزند اول یا دوم یا ... یا پنجم دختر $\Leftarrow$ ۵ حالت) یا هیچ دختری نداشته باشیم (همه‌ی فرزندان پسر $\Leftarrow$ یک حالت).

از طرفی $n(S)=۲\times۲\times۲\times۲\times۲=۲^۵=۳۲$ داریم:

$$P(A')=P(\text{دختر ۱ یا دختر ۰})=\frac{۶}{۳۲}\Rightarrow P(A)=۱-\frac{۶}{۳۲}=\frac{۲۶}{۳۲}=\frac{۱۳}{۱۶}$$

۲۷ در کیسه‌ای ۳ مهره‌ی سیاه، ۴ مهره‌ی قرمز و ۳ مهره‌ی آبی وجود دارد. از این کیسه ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال این‌که حداقل ۲ مهره همرنگ باشند، کدام است؟

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۴

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۷

حداقل ۲ مهره از ۳ مهره‌ی انتخابی همرنگ باشد، یعنی ۲ مهره یا هر ۳ مهره همرنگ باشد. چون محاسبه‌ی این حالات وقت‌گیر است، از روش متمم مسأله را حل می‌کنیم. متمم پیشامد فوق آن است که ۳ مهره را از رنگ‌های مختلف برداریم، از طرفی فضای نمونه‌ای هم انتخاب ۳ مهره از کل مهره‌ها ($۱۰=۳+۴+۳$ مهره) است. بنابراین:

$$P(A')=\frac{\binom{۳}{۱}\times\binom{۴}{۱}\times\binom{۳}{۱}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۳\times۴\times۳}{\frac{۱۰!}{۳!۷!}}=\frac{۳\times۴\times۳}{\frac{۱۰\times۹\times۸\times\cancel{۷!}}{۶\times\cancel{۷!}}}=\frac{۳}{۱۰}\Rightarrow P(A)=۱-\frac{۳}{۱۰}=\frac{۷}{۱۰}=۰/۷$$

۱۱ مسائل پرتاب دو تاس و جمع اعداد رو شده

اگر دو تاس را با هم (یا یک تاس را دو بار) پرتاب کنیم، فضای نمونه‌ای $n(S)=۶\times۶=۳۶$ عضو دارد و مجموع اعداد رو شده‌ی دو تاس می‌تواند اعداد ۲ یا ۳ یا ... یا ۱۲ باشد. جدول زیر یک روش ساده و روان را برای محاسبه‌ی مجموع اعداد دو تاس بدون نوشتن حالات!!! به شما یاد می‌دهد.

به جدول و توضیحات بعد از آن خوب دقت کنید:

مجموع اعداد دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$n(A)$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

طبق جدول فوق **مثلاً**: اگر بگویند مجموع دو تاس در چند حالت برابر ۷ می‌شود، جواب برابر ۶ است.

شگفتی جدول:

۱ تا مجموع ۷، تعداد حالات همواره یکی کم‌تر از مجموع خواسته شده است. **مثلاً**: مجموع ۶ دارای $۵=۱-۶$ حالت است.

۲ از مجموع ۸ به بعد، تعداد حالات برابر ۱۳ منهای مجموع خواسته شده است. **مثلاً**: مجموع ۹ دارای $۴=۹-۱۳$ حالت است.

دیر ویژه:

۱ سؤال از مجموع اعداد رو شده در پرتاب دو تاس اهمیت ویژه‌ای در کنکور دارد. همچنین کمی بعید است که طراح وارد بحث مجموع اعداد ۳ تاس شود مگر در حد یک سؤال ساده که در کتاب ریاضی ۳ آمده است.

۲ سؤالی که جدیداً از این مبحث در کنکور می‌آید با کلماتی نظیر حداقل یا حداکثر یا مضرب ۴ بودن یا عدد اول بودن همراه است. برای حل سؤال باید ابتدا اعداد مطلوب سؤال را مشخص کنید و سپس از دو ویژگی بیان شده در مورد جدول کمک بگیرید.

۲۸ دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده، مضرب ۴ است؟

داخل تجربی ۹۲ | پاسخ: ۴

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

روش اول: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای $n(S)=۳۶$ است. از طرفی مجموع دو عدد مضرب ۴ باشد، یعنی مجموع ۴ یا ۸ یا ۱۲ شود. حال با توجه به جدول درسنامه و ویژگی‌های گفته شده می‌توانیم بدون نوشتن حالات، احتمال‌ها را محاسبه کنیم:

$$P(A)=P(\text{مجموع ۴})+P(\text{مجموع ۸})+P(\text{مجموع ۱۲})=\overset{۴-۱}{\frac{۳}{۳۶}}+\overset{۱۳-۸}{\frac{۵}{۳۶}}+\overset{۱۳-۱۲}{\frac{۱}{۳۶}}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

روش دوم: حالت‌هایی که در آن‌ها مجموع دو تاس ۴ یا ۸ یا ۱۲ می‌شود را می‌نویسیم:

$$n(A)=\{\underbrace{(۱،۳)،(۲،۲)،(۳،۱)}_{\text{مجموع ۴}}،\underbrace{(۲،۶)،(۳،۵)،(۴،۴)،(۵،۳)،(۶،۲)}_{\text{مجموع ۸}}،\underbrace{(۶،۶)}_{\text{مجموع ۱۲}}\}\xrightarrow{n(A)=۹}P(A)=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

۲۹ در پرتاب دو تاس با هم، احتمال آن‌که مجموع دو عدد رو شده حداکثر ۱۰ شود، کدام است؟

مثال کتاب درسی | پاسخ: ۲

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

مجموع دو تاس حداکثر ۱۰ شود، یعنی مجموع ۲ یا ۳ یا ۴ یا ... یا ۱۰. نوشتن اعضا واقعاً طولانی و وقت‌گیر است، پس از روش متمم استفاده می‌کنیم. متمم این پیشامد، یعنی این‌که مجموع دو تاس ۱۱ یا ۱۲ شود. بنابراین:

$$A'=\{(۵،۶)،(۶،۵)،(۶،۶)\}\Rightarrow P(A')=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow P(A)=۱-\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱۱}{۱۲}$$

۱۲ قانون جمع احتمالات

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، آن‌گاه احتمال آن که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد، $P(A\cup B)$ بوده و فرمول آن به‌صورت زیر است:

$$\boxed{\underbrace{P(A\cup B)}_{\text{احتمال رخداد A یا B}}=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{\text{احتمال رخداد A و B با هم}}}$$

دید ویژه: اکثر بچه‌ها نمی‌دانند چه زمانی از فرمول فوق باید استفاده کنند، باید به آن‌ها بگوییم یکی از نشانه‌ها این است که در صورت سؤال «یا» برای جدا کردن دو عمل مختلف می‌آید. **مثلاً** «چه‌قدر احتمال دارد علی **یا** حسن در کنکور قبول شوند؟» هم‌چنین، یکی دیگر از نشانه‌ها، وجود عبارت «**حداقل یکی از دو**» در صورت مسأله است.

دو پیشامد ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار گویند، هرگاه اشتراک آن‌ها تهی باشد. $(A\cap B=\varnothing)$ در این‌صورت داریم:

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$$

۳۰ احتمال آن که دانش‌آموزی در درس فیزیک قبول شود، ۰/۵۵ و در درس شیمی قبول شود، ۰/۶ است. اگر احتمال آن که حداقل در یکی از دو درس قبول شود، ۰/۷۵ باشد، با کدام احتمال در هر دو درس قبول می‌شود؟

مثال کتاب درسی | پاسخ: ۲

۱) ۰/۳۵ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۴۵ ۴) ۰/۵

حداقل در فیزیک یا شیمی قبول شود، یعنی $P(\text{فیزیک}\overset{\text{یا}}{\cup}\text{شیمی})$ و در هر دو درس قبول شود، یعنی $P(\text{فیزیک}\overset{\text{و}}{\cap}\text{شیمی})$. بنابراین با توجه به قانون جمع احتمالات داریم:

$$P(\text{فیزیک}\cup\text{شیمی})=P(\text{شیمی})+P(\text{فیزیک})-P(\text{فیزیک}\cap\text{شیمی})\Rightarrow ۰/۷۵=۰/۶+۰/۵۵-P(\text{فیزیک}\cap\text{شیمی})$$

$$\Rightarrow P(\text{فیزیک}\cap\text{شیمی})=۰/۶+۰/۵۵-۰/۷۵=۰/۴$$

۳۱ دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال آن‌که مجموع اعداد رو شده‌ی دو تاس ۸ یا اعداد رو شده‌ی هر دو تاس زوج باشد، کدام است؟

مثال کتاب درسی | پاسخ: ۱

۱) $\frac{۱۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۸}{۳۶}$ ۳) $\frac{۹}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱۰}{۳۶}$

می‌دانیم تعداد اعضای فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس $n(S)=۳۶$ است. حال اگر A پیشامد مجموع اعداد ۸ و B پیشامد زوج بودن اعداد باشد، خواسته‌ی مسأله به خاطر کلمه‌ی «یا» که در صورت سؤال آمده $P(A\cup B)$ است. حال ابتدا A و B را می‌یابیم:

$$\begin{cases} A=\{(۲،۶)،(۳،۵)،(۴،۴)،(۵،۳)،(۶،۲)\} \\ B=\{(۲،۲)،(۲،۴)،(۲،۶)،(۴،۲)،(۴،۴)،(۴،۶)،(۶،۲)،(۶،۴)،(۶،۶)\} \end{cases} \Rightarrow A\cap B=\{(۲،۶)،(۴،۴)،(۶،۲)\}$$

بنابراین با توجه به قانون جمع احتمالات داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۵}{۳۶}+\frac{۹}{۳۶}-\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱۱}{۳۶}$$

۱۳ مسائل پرتاب سکه یا فرزندان خانواده

۱ اگر یک سکه را n بار (یا n سکه را یک بار با هم) پرتاب کنیم، احتمال آمدن دقیقاً k بار «رو» (k بار «پشت») برابر $\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$ است.

۲ از آن‌جا که فرزندان هم مانند سکه‌ها دو حالت (دختر یا پسر) دارند، احتمال آن‌که خانواده‌ای n فرزندی، دقیقاً k پسر (k دختر) داشته باشد، مجدداً برابر $\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$ است.

۳۲ احتمال این‌که از چهار فرزند یک خانواده، دو فرزند پسر و دو فرزند دختر باشند، کدام است؟

داخل تجربی ۸۴ | پاسخ: ۳

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۷}{۱۶}$

منظور سؤال این است که در یک خانواده‌ی ۴ فرزندی با کدام احتمال دقیقاً دو فرزند پسر است. زیرا در این خانواده وقتی دقیقاً دو فرزند پسر است، قطعاً ۲ فرزند دیگر دختر هستند. بنابراین:

$$P(\text{دو فرزند پسر})=\frac{\binom{۴}{۲}}{۲^۴}=\frac{\frac{۴\times۳}{۲}}{۱۶}=\frac{۶}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$$

فرار از اشتباه: ذکر کردن لفظ دو پسر و دو دختر در صورت سؤال صرفاً جهت گمراه کردن دانش‌آموز است! بارها دیده شده که دانش‌آموز به اشتباه جواب را به‌صورت $\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۴}{۲}}{۲^۴}$ نوشته است!

۳۳ در یک خانواده‌ی ۴ فرزندی با کدام احتمال ۲ فرزند پسر یا ۳ فرزند دختر است؟

داخل تجربی ۹۰ | پاسخ: ۳

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

در یک خانواده‌ی ۴ فرزندی، پیشامد ۲ پسر (A) و پیشامد ۳ دختر (B) ناسازگارند. زیرا در این خانواده هم‌زمان ۲ پسر و ۳ دختر نمی‌تواند وجود داشته باشد. بنابراین:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{\overset{\text{۲ پسر}}{\binom{۴}{۲}}}{۲^۴}\overset{\text{یا}}{+}\frac{\overset{\text{۳ دختر}}{\binom{۴}{۳}}}{۲^۴}=\frac{\frac{۴\times۳}{۲}}{۱۶}+\frac{۴}{۱۶}=\frac{۶+۴}{۱۶}=\frac{۱۰}{۱۶}=\frac{۵}{۸}$$

۳۴ در پرتاب ۴ سکه‌ی سالم با هم، احتمال این‌که فقط سه سکه «رو» یا فقط سه سکه «پشت» بیاید، کدام است؟

برگرفته از کتاب درسی | پاسخ: ۴

۱) $\frac{۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۷}{۱۶}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

در پرتاب ۴ سکه‌ی سالم، پیشامد A، فقط سه سکه «رو» و پیشامد B، فقط سه سکه «پشت» ناسازگارند، بنابراین داریم:

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)=\frac{\overbrace{\binom{۴}{۳}}^{\text{۳ تا از ۴ سکه «رو»}}}{۲^۴}+\frac{\overbrace{\binom{۴}{۳}}^{\text{۳ تا از ۴ سکه «پشت»}}}{۲^۴}=\frac{۴}{۱۶}+\frac{۴}{۱۶}=\frac{۸}{۱۶}=\frac{۱}{۲}$$

۱۴ دو پیشامد مستقل

تعریف: دو پیشامد A و B را مستقل از هم گویند، هرگاه وقوع یکی از آن‌ها در وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. در این صورت داریم:

$$\boxed{P(A\bigcap B)=P(A)\times P(B)}$$

دیر ویژه: در اکثر مسائل قانون جمع احتمالات ، خودمان باید تشخیص دهیم دو پیشامد A و B مستقل هستند و به جای $P(A\bigcap B)$ در فرمول $P(A\bigcup B)$، عبارت $P(A)\times P(B)$ را قرار دهیم. از جمله پیشامدهای مستقل مهم که در کتاب درسی مطرح شده‌اند می‌توان به **قبولی افراد در دانشگاه، بهبود بیماری افراد پس از جراحی، تولد و وفات و پرتاب سکه و تاس** اشاره کرد.

نکته: اگر A و B مستقل باشند، آن‌گاه $(A$ و $B')$، $(B$ و $A')$ و $(A'$ و $B')$ نیز مستقل از هم هستند و احتمال اشتراک آن‌ها برابر حاصل‌ضرب احتمال‌هایشان است.

۳۵ در گروه زنان ساکن یک روستا ۶۰ درصد آنان تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد از آنان مهارت قالی‌بافی دارند. اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی‌بافی دارد؟

داخل تجربی ۹۰ | پاسخ: ۱

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۸۵

تحصیلات ابتدایی و مهارت قالی‌بافی مستقل از هم هستند. زیرا هیچ ربطی به هم ندارند. پس:

$$P(\text{تحصیلات}\overset{\text{و}}{\bigcap}\text{قالی‌بافی})=P(\text{تحصیلات})\times P(\text{قالی‌بافی})=۰/۶\times ۰/۲۵=۰/۱۵\quad (*)$$

از طرفی «یا» یکی از نشانه‌های قانون جمع احتمالات بود، پس احتمال تحصیلات ابتدایی **یا** مهارت قالی‌بافی، همان $P(\text{تحصیلات}\bigcup\text{قالی‌بافی})$ است. داریم:

$$P(\text{تحصیلات}\overset{\text{یا}}{\bigcup}\text{قالی‌بافی})=P(\text{تحصیلات})+P(\text{قالی‌بافی})-P(\text{تحصیلات}\overset{\text{و}}{\bigcap}\text{قالی‌بافی})\overset{(*)}{=}۰/۶+۰/۲۵-۰/۱۵=۰/۷$$

۳۶ در پرتاب دو سکه و یک تاس با هم، احتمال این‌که حداقل یک سکه رو و عدد تاس مضرب ۳ باشد، کدام است؟

خارج تجربی ۹۱ | پاسخ: ۳

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پرتاب دو سکه و یک تاس مستقل از هم هستند. پس کافی است احتمال هر کدام از آن‌ها را حساب کرده و سپس جواب‌ها را در هم ضرب کنیم.

احتمال حداقل یک سکه «رو» برابر $\frac{۳}{۴}$ است، زیرا:

$$S=\{(\text{پپ}),\overset{\checkmark}{(\text{پر})},\overset{\checkmark}{(\text{رپ})},\overset{\checkmark}{(\text{رر})}\}\Rightarrow P(A)=\frac{۳}{۴}$$

احتمال مضرب ۳ آمدن برابر $\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۶}$ است، زیرا:

$$S'=\{۱,۲,\overset{\checkmark}{۳},۴,۵,\overset{\checkmark}{۶}\}\Rightarrow P(B)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین احتمال موردنظر برابر $\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۳}=P(A)\times P(B)$ خواهد بود.

۳۷ تاس سالمی را سه بار می‌اندازیم. با کدام احتمال هیچ دو عدد رو شده‌ای مثل هم نمی‌باشند؟

مثال کتاب درسی | پاسخ: ۲

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱۷}{۱۸}$

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای در ۳ بار پرتاب تاس برابر $n(S)=۶\times ۶\times ۶$ است. می‌خواهیم هیچ دو عددی یکسان نباشد، پس عدد رو شده در بار اول یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ می‌تواند باشد (۶ حق انتخاب) ولی عدد رو شده در بار دوم هر عددی به جز عدد اول (۵ حق انتخاب) و عدد رو شده در بار سوم هر عددی به جز اعداد بار اول و دوم (۴ حق انتخاب) می‌تواند باشد. پس داریم:

$$\text{احتمال موردنظر}=\frac{۶}{۶}\times\frac{۵}{۶}\times\frac{۴}{۶}=\frac{۵}{۹}$$

۳۸ احتمال این که روز تولد سه نفر در روزهای مختلف هفته باشد، کدام است؟

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۳

۱) $\frac{۳۴}{۳۵}$ ۲) $\frac{۲۳}{۳۵}$ ۳) $\frac{۳۰}{۴۹}$ ۴) $\frac{۳۱}{۴۹}$

نفر اول می‌تواند در هر کدام از هفت روز هفته متولد شده باشد (۷ حالت)، نفر بعدی در هر روز به جز روز تولد نفر اول (۶ حالت) و نفر سوم در هر روزی به جز روز تولد نفرات اول و دوم (۵ حالت). پس داریم:

$$\text{احتمال موردنظر} = \frac{۷}{۷}\times\frac{۶}{۷}\times\frac{۵}{۷}=\frac{۳۰}{۴۹}$$

۳۹ چهار دانش‌آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آنان یکسان است؟

خارج تجربی ۹۲ | پاسخ: ۲

۱) $\frac{۱۹}{۴۸}$ ۲) $\frac{۴۱}{۹۶}$ ۳) $\frac{۲۳}{۴۸}$ ۴) $\frac{۵۵}{۹۶}$

حداقل ۲ نفر از ۴ نفر، یعنی ۲ نفر یا ۳ نفر یا ۴ نفر ماه تولدشان یکسان باشد. محاسبه‌ی این حالات طولانی و وقتگیر است. پس از متمم آن استفاده می‌کنیم که در آن ماه تولد هر ۴ نفر متفاوت است. در پیشامد متمم، نفر اول می‌تواند در هر یک از ۱۲ ماه متولد شده باشد، نفر دوم در هر ماه به جز ماه تولد نفر اول (یکی از ۱۱ ماه باقی‌مانده)، نفر سوم در هر ماه به جز ماه تولد دو نفر اول (یکی از ۱۰ ماه باقی‌مانده) و نفر چهارم در هر ماه به جز ماه تولد سه نفر اول (یکی از ۹ نفر باقی‌مانده). بنابراین:

$$P(A')=\frac{۱۲}{۱۲}\times\frac{۱۱}{۱۲}\times\frac{۱۰}{۱۲}\times\frac{۹}{۱۲}=\frac{۵۵}{۹۶}\Rightarrow P(A)=۱-\frac{۵۵}{۹۶}=\frac{۴۱}{۹۶}$$

۴۰ احتمال این که شخص A تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند، ۰/۶ و احتمال این که شخص B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند، ۰/۷ است. چه‌قدر احتمال دارد که حداقل یکی از آن‌ها تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا نکنند؟

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۴

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۴۲ ۴) ۰/۵۸

از روش متمم برای حل استفاده می‌کنیم. حداقل یکی ناراحتی قلبی پیدا نکند، یعنی یکی از آن‌ها ناراحتی پیدا نکند یا هر دو ناراحتی پیدا نکنند و متمم آن وقتی رخ می‌دهد که هر دو ناراحتی قلبی پیدا کنند. یعنی باید $P(A\cap B)$ را بیابیم. از طرفی A و B مستقل‌اند، پس داریم:

$$\text{متمم}:\ P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=۰/۶\times۰/۷=۰/۴۲\Rightarrow P(\text{خواسته‌ی مسأله})=۱-۰/۴۲=۰/۵۸$$

۴۱ می‌دانیم ۴۰ درصد ژن‌های تعیین‌کننده‌ی عامل RH خون منفی‌اند. با کدام احتمال در خانواده‌ای دو فرزند از لحاظ خونی دارای یک نوع RH هستند؟

تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۱

۱) ۰/۷۳۱۲ ۲) ۰/۵۲ ۳) ۰/۳۲ ۴) ۰/۷۰۵۶

از زیست‌شناسی می‌دانید، برای آن که فردی دارای RH منفی باشد لازم است دو ژن منفی داشته باشد که این ژن‌ها را از هر یک از والدین خود به ارث می‌برد. پس می‌توان منفی بودن هر یک از ژن‌ها را مستقل فرض کرد:

$$P(\text{منفی } RH)=P(\text{هر دو ژن منفی})=\frac{۴۰}{۱۰۰}\times\frac{۴۰}{۱۰۰}=۰/۱۶\Rightarrow P(\text{مثبت } RH)=۱-۰/۱۶=۰/۸۴$$

دو فرزند دارای یک نوع RH باشند، یعنی هر دو RH منفی یا هر دو RH مثبت داشته باشند. از طرفی RH فرزندان هم مستقل از هم است. پس داریم:

$$\text{احتمال موردنظر}=P(\text{فرزند اول RH منفی})\times P(\text{فرزند دوم RH منفی})\overset{\text{یا}}{+}P(\text{فرزند اول RH مثبت})\times P(\text{فرزند دوم RH مثبت})$$
$$=۰/۱۶\times۰/۱۶+۰/۸۴\times۰/۸۴=۰/۷۳۱۲$$

ورژن دیگر: احتمال آن که در خانواده‌ای اولین فرزند با RH منفی، فرزند سوم خانواده باشد، چه‌قدر است؟

پاسخ: اگر فرزند سوم، اولین فرزند با RH منفی باشد، نتیجه می‌گیریم که دو فرزند اول و دوم RH مثبت داشته‌اند. بنابراین داریم:

$$\text{احتمال موردنظر}=\underset{\text{فرزند اول RH مثبت}}{۰/۸۴}\times\underset{\text{فرزند دوم RH مثبت}}{۰/۸۴}\times\underset{\text{فرزند سوم RH منفی}}{۰/۱۶}\simeq۰/۱۱۲۹$$

۴۲ دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال حداکثر در سه پرتاب نتیجه حاصل می‌شود؟

داخل تجربی ۹۱ | پاسخ: ۲

۱) $\frac{۲۷}{۶۴}$ ۲) $\frac{۳۷}{۶۴}$ ۳) $\frac{۱۹}{۳۲}$ ۴) $\frac{۳۹}{۶۴}$

برای حل سؤال باید صورت سؤال را خوب معنی کنید. احتمال آن که در پرتاب دو تاس سالم هر دو عدد رو شده زوج باشد، برابر است با:

$$\underbrace{\frac{۳}{۶}}_{\text{زوج بودن تاس اول}} \times \underbrace{\frac{۳}{۶}}_{\text{زوج بودن تاس دوم}} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

پس احتمال آن که هر دو عدد رو شده زوج نباشد $\frac{۳}{۴} = ۱ - \frac{۱}{۴}$ است. حداکثر در ۳ پرتاب، یعنی یا بار اول هر دو زوج بیاید یا اگر بار اول نشد، بار دوم هر دو زوج بیاید یا اگر بار اول و دوم نشد، بار سوم حتماً هر دو زوج بیاید! بنابراین:

$$P = \underbrace{\frac{۱}{۴}}_{\text{بار اول ok}} \overset{\text{یا}}{+} \underbrace{\frac{۳}{۴}}_{\text{بار اول نشد}} \times \overbrace{\frac{۱}{۴}}^{\text{بار دوم ok}} \overset{\text{یا}}{+} \underbrace{\frac{۳}{۴} \times \frac{۳}{۴}}_{\text{بار اول و دوم نشد}} \times \overbrace{\frac{۱}{۴}}^{\text{بار سوم ok}} = \frac{۱}{۴} + \frac{۳}{۱۶} + \frac{۹}{۶۴} = \frac{۳۷}{۶۴}$$

ترفند ویژه: متمم این‌که حداکثر در سه پرتاب نتیجه حاصل شود، این است که در سه پرتاب اول نتیجه حاصل نشود، یعنی:

$$P(A') = \frac{۳}{۴} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۳}{۴} = \frac{۲۷}{۶۴} \Rightarrow P(A) = ۱ - \frac{۲۷}{۶۴} = \frac{۳۷}{۶۴}$$

۱۵ احتمال شرطی

دو پیشامد A و B را در نظر بگیرید. احتمال رخ دادن A به شرطی که B رخ داده باشد را به‌صورت $P(A|B)$ نمایش داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنند:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

دید ویژه: بارها شده دانش‌آموز پرسیده از کجا بفهمیم مسأله شرطی هست یا نه! باید بگوییم در مسائل شرطی همواره کلماتی مانند «**می‌دانیم که**»، «**فرض کنید**»، «**اگر**» می‌آید و در ادامه‌ی آن خبری درباره‌ی آزمایش می‌دهند، سپس از ما می‌خواهند با توجه به آن خبر، احتمال وقوع چیز دیگری را حساب کنیم. **مثلاً**: می‌گویند «اگر عدد رو شده‌ی تاس، عددی اول باشد، احتمال فرد بودن آن چه‌قدر است؟» ($\underbrace{\text{اگر عدد رو شده‌ی تاس، عددی اول باشد}}_{\text{خبر}}$)

◀ ***روش:*** خوب دقت کنید! برای حل مسائل شرطی اکثر مواقع از فرمول فوق استفاده نمی‌کنیم، بلکه ابتدا شرط مسأله را روی فضای نمونه‌ای اعمال می‌کنیم و سپس در **فضای نمونه‌ای جدید** به دنبال خواسته‌ی مسأله می‌گردیم. **مثلاً**: در پرتاب یک تاس اگر بگویند می‌دانیم عددی زوج آمده است، این شرط باعث می‌شود فضای نمونه‌ای جدید $S = \{۲،۴،۶\}$ شود. حال اگر بخواهند احتمال ۲ آمدن را بگوییم، با توجه به فضای نمونه‌ای جدید پاسخ می‌دهیم: $\frac{۱}{۳}$.

◀ ***نکته:*** اگر A و B ناسازگار باشند (یعنی $P(A \cap B) = ۰$)، آن‌گاه $P(A|B) = P(B|A) = ۰$ و اگر A و B مستقل باشند $P(A|B) = P(A)$ و $P(B|A) = P(B)$.

۴۳ در یک خانواده‌ی سه فرزندی می‌دانیم فرزند اول آن‌ها دختر است. با کدام احتمال، لااقل یکی از فرزندان پسر است؟

داخل تجربی ۸۷ | پاسخ: ۴

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

فرزند اول دختر است، پس وضعیت فرزند اول مشخص است. لذا فضای نمونه‌ای جدید را جنسیت دو فرزند دیگر در نظر می‌گیریم. حال می‌خواهیم لااقل یکی از فرزندان پسر باشد، پس احتمال آن با توجه به فضای نمونه‌ای جدید، $\frac{۳}{۴}$ است:

$$S_{\text{جدید}} = \{\underbrace{(پ،پ)✓ ، (د،پ)✓ ، (پ،د)✓}_{\text{لااقل ۱ پسر (۱ یا ۲ پسر)}} ، (د،د)\}$$

۴۴ خانواده‌ای دارای چهار فرزند است. می‌دانیم که دو فرزند اول آن‌ها پسر است. احتمال آن‌که دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشد، کدام است؟

داخل تجربی ۸۲ | پاسخ: ۲

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

دو فرزند اول پسر می‌باشد، پس وضعیت دو فرزند اول مشخص است. لذا فضای نمونه‌ای جدید را جنسیت دو فرزند دیگر در نظر می‌گیریم. حال می‌خواهیم هر دو دختر باشند، پس احتمال آن $\frac{۱}{۴}$ است:

$$S_{\text{جدید}} = \{(\text{د}, \text{د}), (\text{پ}, \text{د}), (\text{د}, \text{پ}), (\text{پ}, \text{پ})\}$$

۴۵ در یک خانواده‌ی سه فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال دو فرزند دیگر، دختر است؟

خارج تجربی ۸۹ و مشابه خارج تجربی ۸۵ | پاسخ: ۲

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$

۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

در یک خانواده‌ی ۳ فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. پس این خانواده نمی‌تواند سه دختر داشته باشد و فضای نمونه‌ای به‌صورت زیر در می‌آید:

$$S_{\text{جدید}} = \{(\text{پپپ}), (\text{ددپ}), (\text{دپد}), (\text{پدد}), (\text{دپپ}), (\text{پدپ}), (\text{پپد})\} \Rightarrow P(\text{دختر بودن دو فرزند دیگر}) = \frac{۳}{۷}$$

۴۶ یک خانواده‌ی سه فرزندی با کدام احتمال، حداقل دو فرزند دختر دارد، در صورتی که می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان، دختر است؟

خارج تجربی ۸۷ | پاسخ: ۴

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

کلمه‌ی «می‌دانیم» به همراه جمله‌ی خبری بعد از آن، به ما می‌گوید که با احتمال شرطی روبه‌رو هستیم. می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان، دختر است. پس این خانواده سه پسر نمی‌تواند داشته باشد و فضای نمونه‌ای جدید را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم. حال با توجه به این فضای نمونه‌ای، احتمال داشتن حداقل ۲ دختر (۲ یا ۳ دختر) برابر است با:

$$S_{\text{جدید}} = \{(\text{ددد}), (\text{ددپ}), (\text{دپد}), (\text{پدد}), (\text{دپپ}), (\text{پدپ}), (\text{پپد})\} \Rightarrow P(A) = \frac{۴}{۷}$$

۴۷ در پرتاب دو تاس با هم، هر دو عدد فرد ظاهر شده‌اند. با کدام احتمال مجموع این دو عدد کم‌تر از ۱۰ می‌باشد؟

برگرفته از کتاب درسی | پاسخ: ۴

۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۷}{۸}$ ۳) $\frac{۷}{۹}$ ۴) $\frac{۸}{۹}$

خبری در مورد پرتاب دو تاس در صورت مسأله بیان شده است، پس احتمال شرطی می‌باشد. با توجه به آن‌که دو عدد فرد ظاهر شده است، فضای نمونه‌ای جدید را می‌نویسیم.

$$S_{\text{جدید}} = \{(۱,۱),(۱,۳),(۱,۵),(۳,۱),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۱),(۵,۳),(۵,۵)\} \Rightarrow n(S_{\text{جدید}}) = ۹$$

حال در این فضای نمونه‌ای جدید دنبال زوج مرتب‌هایی می‌گردیم که جمع دو مؤلفه‌ی آن‌ها کم‌تر از ۱۰ باشد که از ۹ زوج مرتب فوق، ۸ تا این ویژگی را دارند (همه به جز (۵,۵)). پس داریم:

$$P(A) = \frac{۸}{۹}$$

۱۶ انتخاب مهره یا کارت یا ... بدون جایگذاری و با جایگذاری

۱ فرض کنید انتخاب مهره از کیسه به‌صورت پی‌درپی (یکی پس از دیگری، پشت سرهم) و بدون جایگذاری باشد.

روش: در هر مرحله از تعداد کل مهره‌ها و از تعداد مهره‌هایی که همرنگ مهره‌ی خروجی‌اند، یکی کم می‌شود و جواب احتمال‌ها را در هم‌ضرب می‌کنیم. **مثلاً**: در کیسه‌ای شامل سه مهره‌ی سفید و چهار مهره‌ی سیاه، اگر سه مهره به طور متوالی خارج کنیم، احتمال این که اولی سفید، دومی سیاه و سومی سفید باشند، برابر است با:

$$\text{احتمال موردنظر} = \underbrace{\frac{۳}{۷}}_{\text{اولی سفید}} \times \underbrace{\frac{۴}{۶}}_{\text{دومی سیاه}} \times \underbrace{\frac{۲}{۵}}_{\text{سومی سفید}}$$

۲ فرض کنید انتخاب مهره از کیسه به‌صورت پی‌درپی و با جایگذاری باشد.

روش: در هر مرحله تعداد کل مهره‌ها ثابت می‌ماند. در حقیقت برداشتن مهره‌ها تأثیری در تعداد کل آن‌ها ندارد. حال مثال بیان شده را با جایگذاری حل می‌کنیم:

$$\text{احتمال موردنظر} = \underbrace{\frac{3}{7}}_{\text{اولی سفید}} \times \underbrace{\frac{4}{7}}_{\text{دومی سیاه}} \times \underbrace{\frac{3}{7}}_{\text{سومی سفید}}$$

ترفند ویژه: اگر در مسأله از برخی مهره‌های خارج شده اصلاً صحبت نشود، فرض می‌کنیم آن مهره‌ها اصلاً انتخاب نشده‌اند. (مصداق عبارت معروف: کان لم یکن!)

۴۸ از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان به تصادف یک کارت بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم، سپس کارت دوم را خارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو کارت هم‌رنگ هستند؟ داخل تجربی ۹۱ | پاسخ: ۳

۱) $\frac{2}{7}$ ۲) $\frac{5}{14}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $\frac{4}{7}$

هر دو کارت هم‌رنگ، یعنی هر دو سبز یا هر دو سفید باشند. داریم:

$$P = \underbrace{\frac{4}{7}}_{\text{کارت اول سبز}} \times \underbrace{\frac{3}{6}}_{\text{کارت دوم سبز}} + \underbrace{\frac{3}{7}}_{\text{کارت اول سفید}} \times \underbrace{\frac{2}{6}}_{\text{کارت دوم سفید}} = \frac{12}{42} + \frac{6}{42} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

۴۹ در جعبه‌ای ۶ مهره‌ی سفید و ۹ مهره‌ی سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جای‌گذاری از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره‌ی خارج‌شده سفید است؟ داخل تجربی ۹۲ | پاسخ: ۴

۱) $\frac{5}{14}$ ۲) $\frac{3}{7}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{2}{5}$

طبق ترفند ویژه‌ی درسنامه چون به رنگ اولین مهره اشاره نشده، آن را کنار گذاشته و فکر می‌کنیم مهره‌ی اول از ابتدا انتخاب نشده است. پس داریم:

$$P\,(\text{دومین مهره سفید باشد}) = P\,(\text{اولین مهره سفید باشد}) = \frac{6}{9+6} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

۵۰ در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می‌شوند. به تصادف متوالیاً سه موش از بین آن‌ها انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟ داخل تجربی ۸۸ | پاسخ: ۴

۱) $\frac{11}{56}$ ۲) $\frac{17}{56}$ ۳) $\frac{13}{56}$ ۴) $\frac{15}{56}$

طبق ترفند ویژه‌ی درسنامه چون به رنگ موش دوم اشاره نشده است. پس فرض می‌کنیم موش دوم انتخاب نشده است. انگار فقط دو موش انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم اولی سفید و بعدی سیاه باشد:

$$P\,(\text{اولی سفید}) \times P\,(\text{بعدی سیاه}) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

۵۱ در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به‌طور تصادفی پی‌درپی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره‌ی فرد متوالیاً خارج <u>نمی‌شود</u>؟ داخل تجربی ۹۲ | پاسخ: ۱

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۲

برای آن که بتوانید از پس حل این سؤال برآیید، باید مفهوم سؤال را خوب درک کنید. می‌خواهیم دو مهره با شماره‌ی فرد متوالیاً خارج <u>نشود</u>، پس باید ترتیب خارج شدن مهره‌ها با شماره‌های فرد و زوج یکی در میان و به‌صورت زیر باشد:

$$\text{احتمال} = P\,(\text{اولی فرد}) \times P\,(\text{دومی زوج}) \times P\,(\text{سومی فرد}) \times P\,(\text{چهارمی زوج}) \times P\,(\text{پنجمی فرد}) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{10} = 0/1$$

در هر مرحله از تعداد کل مهره‌ها یکی کم می‌شود.

۱۷ قاعده‌ی احتمال کل (نمودار درختی)

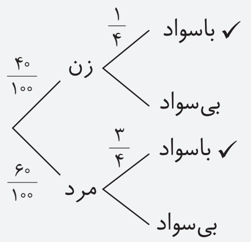
مسائلی که از چند قسمت مختلف تشکیل شده و احتمال هر قسمت در مسأله داده می‌شود و احتمال کل را می‌خواهند، به مسائل قاعـده‌ی احتمال کل معروف‌اند.

دید ویژه: راه شناخت این مسائل که در کنکور اهمیت زیادی داشته‌اند، این است که در اکثر این مسائل کلماتی به‌کار مـی‌رود کـه متضاد هم هستند، مانند: زن ـ مرد، باسواد ـ بی‌سواد، سالم ـ بیمار و ... . هم‌چنین در برخی از این نوع مسائل مجبـوریم بـرای حـل، مسـأله را بـه چنـد قسمت مختلف تفکیک کنیم. **مثلاً:** انتخاب مهره از چند ظرف داده شده که باید انتخاب مهره از هرکدام از ظرف‌ها را جداگانه انجام دهیم و ... .

◀ ***روش:*** ابتدا احتمال‌های هر مورد را روی شاخه‌های درخت رسم شده می‌نویسیم، سپس احتمال‌های قسـمت بعـدی را روی شـاخه‌هـای بعدی، مطابق خواسته‌ی مسأله، مشخص می‌کنیم. در انتها اعداد روی شاخه‌های موردنظر را در هم ضرب کرده و سپس جواب‌های حاصـل را با هم جمع می‌کنیم.

◀ ***مثال:*** **جامعه‌ای شامل ٪۴۰ زن و ٪۶۰ مرد می‌باشد. $\frac{۱}{۴}$ زنان و $\frac{۳}{۴}$ مردان باسوادند. با چه احتمالی فرد انتخابی از این جامعه باسواد است؟**

پاسخ:



$$\Rightarrow P=\frac{۴}{۱۰۰}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۶۰}{۱۰۰}\times\frac{۳}{۴}=۰/۴۶$$

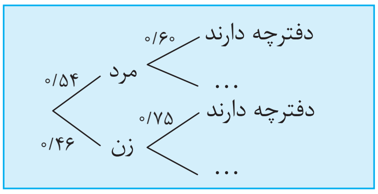
ترفند ویژه: خیلی وقت‌ها بچه‌ها نمی‌دانند چه چیزی را در کدام شاخه بیاورند. باید بگوییم معمـولاً در ایـن مسـائل، چیـزی کـه در انتهای مسأله پرسیده شده است را در شاخه‌ی دوم می‌آوریم. **مثلاً:** در مثال قبل باسواد بودن در شاخه‌ی دوم آمد.

۵۲ در یک روستا ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشـکیل می‌دهنـد. اگـر ۶۰ درصـد مـردان و ۷۵ درصـد زنـان دفترچه‌ی سلامت داشته باشند، با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آن‌ها، دفترچه‌ی سلامت دارد؟

خارج تجربی ۹۰ و مشابه خارج تجربی ۸۸ | پاسخ: ۲

۱) ۰/۶۵۸ ۲) ۰/۶۶۹ ۳) ۰/۶۸۵ ۴) ۰/۶۹۶

چون در انتها در مورد دفترچه داشتن پرسیده شده است، شاخه‌ی دوم را داشتن دفترچه می‌گیریم:



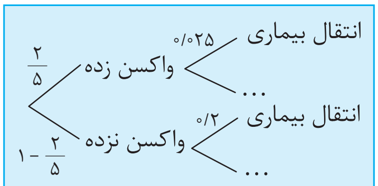
$$\Rightarrow P=\frac{۵۴}{۱۰۰}\times\frac{۶}{۱۰}+\frac{۴۶}{۱۰۰}\times\frac{۷۵}{۱۰۰}=\frac{۳۲۴}{۱۰۰۰}+\frac{۳۴۵}{۱۰۰۰}=\frac{۶۶۹}{۱۰۰۰}=۰/۶۶۹$$

Save time: برای بالا بردن سرعت در این‌گونه مسائل عمداً در کسرهای $\frac{۵۴}{۱۰۰}$ و $\frac{۶}{۱۰}$ و ... صورت و مخرج را با هم ساده نکردیم. زیرا معمولاً در تست‌های کنکور، گزینه‌ها به‌صورت اعشاری داده می‌شوند و لذا بهتر است در کسرها، مخرج توان‌های ۱۰ مثل ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ و ... باشد.

۵۳ احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند، ۰/۰۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰/۲ است. $\frac{۲}{۵}$ کارگران یک کارگـاه واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری به تصادف با یکی از کارگران ملاقات کند، با کدام احتمال، این بیماری منتقل می‌شود؟

داخل تجربی ۸۹ | پاسخ: ۱

۱) ۰/۱۳ ۲) ۰/۱۴ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۱۶



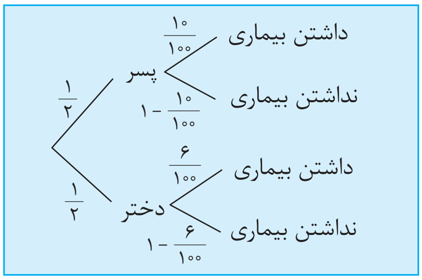
$$\Rightarrow P=\frac{۲}{۵}\times\frac{۲۵}{۱۰۰۰}+\left(۱-\frac{۲}{۵}\right)\times\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۱۰۰}+\frac{۶}{۵۰}=\frac{۱}{۱۰۰}+\frac{۱۲}{۱۰۰}=\frac{۱۳}{۱۰۰}=۰/۱۳$$

۵۴ **انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۱۰ درصد و به فرزند دختر ۶ درصد است. با کدام احتمال فرزندی که به دنیا می‌آید این نوع بیماری را ندارد؟** (داخل تجربی ۸۳ | پاسخ: ۲)

۱) ۰/۹۱　　۲) ۰/۹۲　　۳) ۰/۹۳　　۴) ۰/۹۴

برای آن که فرزند بیماری را نداشته باشد، باید بیماری به صورت ارثی به وی منتقل نشده باشد، بنابراین داریم:

$$\Rightarrow P=\frac{1}{2}\times\underbrace{\left(1-\frac{10}{100}\right)}_{\frac{90}{100}}+\frac{1}{2}\times\underbrace{\left(1-\frac{6}{100}\right)}_{\frac{94}{100}}=\frac{1}{2}\left(\frac{90}{100}+\frac{94}{100}\right)=\frac{92}{100}=0/92$$

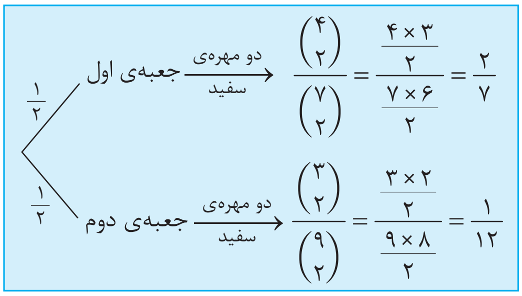


۵۵ **در جعبه‌ی اول ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه، در جعبه‌ی دوم ۳ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟** (خارج تجربی ۹۲ | پاسخ: ۱)

۱) $\frac{31}{168}$　　۲) $\frac{11}{56}$　　۳) $\frac{17}{84}$　　۴) $\frac{13}{56}$

برای حل مجبوریم مسأله را به دو قسمت مختلف تفکیک کنیم (انتخاب مهره از جعبه‌ی اول یا انتخاب از جعبه‌ی دوم). پس از نمودار درختی استفاده می‌کنیم:

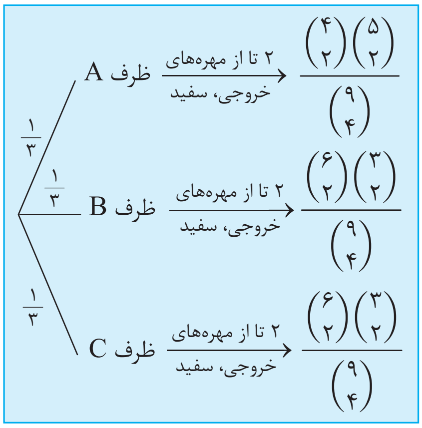
$$\Rightarrow P=\frac{1}{2}\times\frac{2}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{2}\overbrace{\left(\frac{2}{7}+\frac{1}{12}\right)}^{\frac{31}{84}}=\frac{1}{2}\times\frac{31}{84}=\frac{31}{168}$$



۵۶ **ظرف A دارای ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره‌های خارج شده، سفید است؟** (داخل تجربی ۹۳ | پاسخ: ۱)

۱) $\frac{25}{63}$　　۲) $\frac{26}{63}$　　۳) $\frac{10}{21}$　　۴) $\frac{11}{21}$

برای حل مجبوریم مسأله را به سه قسمت مختلف تفکیک کنیم (انتخاب از ظرف A یا B یا C) پس از نمودار درختی استفاده می‌کنیم که شاخه‌ی دوم در آن خارج شدن مهره‌ی سفید می‌باشد. دقت کنید شانس انتخاب هر کدام از ظروف یکسان و برابر $\frac{1}{3}$ است. پس داریم:



$$P=\frac{1}{3}\times\frac{\binom{4}{2}\binom{5}{2}}{\binom{9}{4}}+\frac{1}{3}\times\frac{\binom{6}{2}\binom{3}{2}}{\binom{9}{4}}+\frac{1}{3}\times\frac{\binom{6}{2}\binom{3}{2}}{\binom{9}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{\frac{4\times3}{2}\times\frac{5\times4}{2}+\frac{6\times5}{2}\times\frac{3\times2}{2}+\frac{6\times5}{2}\times\frac{3\times2}{2}}{\frac{9!}{4!5!}}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{60+45+45}{\frac{9\times8\times7\times6\times\cancel{5!}}{24\times\cancel{5!}}}=\frac{1}{3}\times\frac{150}{126}=\frac{25}{63}$$

۱۸ متغیر تصادفی

متغیر تصادفی (X) عددی است که در یک آزمایش به هر نتیجه‌ی آزمایش داده می‌شود. **مثلاً:** در پرتاب دو سکه، اگر متغیر تصادفی را تعداد «رو» آمدن‌ها فرض کنیم، آن‌گاه X می‌تواند ۰، ۱ یا ۲ باشد. زیرا در پرتاب دو سکه یا ۰ بار «رو» یا ۱ بار «رو» و یا ۲ بار «رو» ظاهر می‌شود.

جدول توزیع احتمال: فرض کنید بخواهیم جدول توزیع احتمال پرتاب دو سکه را رسم کنیم که در آن X تعداد «رو» آمدن‌ها است. X می‌تواند ۰، ۱ و ۲ باشد. حال احتمال مربوط به X های مختلف را یافته و در جدول، زیر آن می‌نویسیم:

X	۰	۱	۲
$P(X)$	$\frac{\binom{۲}{۰}}{۲^۲}$	$\frac{\binom{۲}{۱}}{۲^۲}$	$\frac{\binom{۲}{۲}}{۲^۲}$

$\Rightarrow$

X	۰	۱	۲
$P(X)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۲}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$
	$P(X=۰)$	$P(X=۱)$	$P(X=۲)$

◀ ***نکته:*** جمع تمام احتمال‌ها در جدول توزیع احتمال همواره برابر **یک** است. یعنی اگر مقادیر X در جدول توزیع احتمال $n, \dots, ۲, ۱, ۰$ باشد، داریم:

$$\mathbf{P(۰ \le X \le n) = P(X=۰) + P(X=۱) + \cdots + P(X=n) = ۱}$$

مثلاً: در جدول فوق، X برابر ۰، ۱ و ۲ بود و دیدیم که:

$$P(۰ \le X \le ۲) = P(X=۰) + P(X=۱) + P(X=۲) = \frac{۱}{۴} + \frac{۲}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۴}{۴} = ۱$$

دید ویژه: از جدول توزیع احتمال هنوز تست‌های طرح نشده‌ی مختلفی وجود دارد. سرعت، فاکتور مهمی در حل تست‌های این بخش است. برای بالا بردن سرعت در سؤالات این بخش بهتر است، ابتدا متغیر X مربوط به سؤال را خوب معنی کرده و سپس به سرعت احتمال‌های مختلف جدول را به‌دست آورید.

۵۷ **در آزمایشگاهی ۶ موش سیاه و ۴ موش سفید موجود است. به طور تصادفی ۲ موش از بین آن‌ها خارج می‌کنیم. X تعداد موش‌های سفید خارج شده است. بیشترین مقدار در توزیع احتمال آن کدام است؟** داخل تجربی ۹۱ | پاسخ: ۳

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۷}{۱۵}$ ۳) $\frac{۸}{۱۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

این تست، تنها سؤالی بود که در کنکور سراسری مستقیماً جدول توزیع احتمال را هدف گرفته بود و سؤال هم اصلاً آسان نبود! طبق مسأله ۲ موش خارج کرده‌ایم و X تعداد موش‌های سفید خروجی است. پس X می‌تواند ۰، ۱ یا ۲ باشد. حال در جدول توزیع احتمال زیر، حالت‌های مختلف بیرون آمدن موش‌های سفید را بررسی می‌کنیم:

	۰ موش سفید و ۲ موش سیاه	۱ موش سفید و ۱ موش سیاه	۲ موش سفید و ۰ موش سیاه
X	۰	۱	۲
P	$\frac{\binom{۴}{۰}\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}$	$\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}}$	$\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۶}{۰}}{\binom{۱۰}{۲}}$

فضای نمونه‌ای انتخاب ۲ موش از ۱۰=۴+۶ موش موجود است.

$\xrightarrow{\text{پس از محاسبه و ساده‌سازی احتمال‌ها}}$

X	۰	۱	۲
P	$\frac{۵}{۱۵}$	$\frac{۸}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$

بیشترین مقدار

۵۸ **جدول توزیع احتمال یک متغیر تصادفی به‌صورت زیر است. مقدار $P(X<۲)$ کدام است؟** برگرفته از کتاب درسی | پاسخ: ۴

X	۰	۱	۲	۳
$P(X=x)$	$\frac{a}{۴}$	$\frac{a}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{a}{۲}$

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

می‌دانیم مجموع مقادیر احتمال در جدول توزیع احتمال برابر یک است. پس:

$$\frac{a}{۴} + \frac{a}{۴} + \frac{۱}{۲} + \frac{a}{۲} = ۱ \xRightarrow{\times ۴} a + a + ۲ + ۲a = ۴ \Rightarrow ۴a + ۲ = ۴ \Rightarrow ۴a = ۲ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲} \quad (*)$$

از طرفی $P(X<۲)$ یعنی $P(X=۰) + P(X=۱)$. با توجه به جدول داریم:

$$P(X<۲) = P(X=۰) + P(X=۱) = \frac{a}{۴} + \frac{a}{۴} = \frac{a}{۲} \overset{(*)}{=} \frac{\frac{۱}{۲}}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

۱۹ توزیع دوجمله‌ای

برخی از آزمایش‌ها مثل پرتاب سکه دو حالت دارند. برای حل این مسائل یکی از دو حالت را پیروزی و دیگری را شکست فرض می‌کنیم. حال اگر p را احتمال پیروزی و $1-p$ را احتمال شکست در نظر بگیریم و این آزمایش را n بار تکرار کنیم، آن‌گاه احتمال k بار پیروزی از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$P(\text{بار پیروزی } k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

دید ویژه: مسائل این قسمت از پایه ثابت‌های کنکور سراسری محسوب می‌شوند و به راحتی می‌توان بسیاری از آن‌ها را حل نمود. البته آن‌قدر تست‌های مربوط به این مسائل در کنکور تکراری شده بود که جدیداً طراحان کنکور به فکر ترکیب این تست‌ها با سایر بخش‌ها افتاده‌اند. سند این حرف، تست بسیار مهم کنکور خارج از کشور ۹۳ است که در انتهای این فصل آن را آورده‌ایم.

ترفند ویژه: یک نکته‌ی جالب هم که می‌توانید از آن برای شناسایی تست‌های توزیع دوجمله‌ای استفاده کنید این است که این مسائل تاکنون همواره به عنوان آخرین تست بخش احتمال در دفترچه‌ی سؤالات کنکور آمده‌اند. از این نکته می‌توانید برای یافتن تست مربوط به توزیع دوجمله‌ای کمک بگیرید. دیگر چه می‌خواهید!

ورژن سفت‌تر: اگر بخواهند این مسائل را سخت کنند، در صورت مسأله از کلمات «حداقل»، «حداکثر» نیز استفاده می‌کنند که در این صورت باید چند بار از فرمول فوق استفاده کنید یا روش متمم را به کار بگیرید.

۵۹ احتمال انتقال نوعی بیماری مسری به افراد مستعد برابر ۰/۲ است. اگر ۵ نفر مستعد، با فردی که حامل این بیماری است ملاقات کنند، با کدام احتمال ۳ نفر آنان مبتلا می‌شوند؟

داخل تجربی ۹۳ و مشابه خارج تجربی ۹۱ | پاسخ: ۲

۱) ۰/۰۲۵۶ ۲) ۰/۰۵۱۲ ۳) ۰/۱۰۲۴ ۴) ۰/۲۰۴۸

انتقال بیماری را «پیروزی» در نظر می‌گیریم. پس $p=\frac{2}{10}$. بنابراین احتمال آن که ۳ نفر از ۵ نفر مستعد مبتلا شوند برابر می‌شود با:

$$P(\text{ابتلای ۳ نفر از ۵ نفر}) = \binom{5}{3}\left(\frac{2}{10}\right)^3\left(1-\frac{2}{10}\right)^2 = \frac{5!}{3!2!}\times\frac{8}{1000}\times\frac{64}{100} = 10\times\frac{512}{100000} = \frac{512}{10000} = 0/0512$$

دید ویژه: تست خارج از کشور ۹۱ دقیقاً شبیه این تست بود! باز هم اهمیت کنکورهای خارج از کشور سال‌های قبل!!

۶۰ به‌طور متوسط از هر ۱۰ مشتری مراجعه کننده به فروشگاهی ۶ نفر خرید می‌کنند. در فاصله‌ی زمانی معین ۴ مشتری به این فروشگاه مراجعه می‌کنند، با کدام احتمال فقط ۳ نفر از آن‌ها خرید می‌کنند؟

خارج تجربی ۹۰ | پاسخ: ۳

۱) ۰/۳۱۷۲ ۲) ۰/۳۲۸۲ ۳) ۰/۳۴۵۶ ۴) ۰/۳۶۵۴

خرید هر مشتری را «پیروزی» در نظر می‌گیریم. پس $p=\frac{6}{10}$. بنابراین احتمال آن که فقط ۳ نفر خرید کنند، برابر می‌شود با:

$$P(\text{خرید ۳ نفر از ۴ نفر}) = \binom{4}{3}\left(\frac{6}{10}\right)^3\left(1-\frac{6}{10}\right)^1 = 4\times\frac{216}{1000}\times\frac{4}{10} = \frac{3456}{10000} = 0/3456$$

۶۱ دانش‌آموزی به هر یک از ۵ پرسش پنج گزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌دهد. با کدام احتمال فقط به ۳ پرسش، پاسخ صحیح داده است؟

داخل تجربی ۹۲ و مشابه داخل ۸۸ و خارج ۹۲ | پاسخ: ۲

۱) ۰/۰۲۵۶ ۲) ۰/۰۵۱۲ ۳) ۰/۰۷۶۸ ۴) ۰/۰۶۲۵

درست پاسخ دادن به هر تست ۵ گزینه‌ای را «پیروزی» در نظر می‌گیریم. چون هر تستی ۵ گزینه دارد و فقط یکی از آن گزینه‌ها جواب است، پس احتمال پیروزی $p=\frac{1}{5}$ است. بنابراین احتمال درست پاسخ دادن فقط به ۳ پرسش از ۵ پرسش برابر می‌شود با:

$$P = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(1-\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{5!}{3!2!}\times\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^2 \xrightarrow[\frac{4}{5}=\frac{8}{10}]{\frac{1}{5}=\frac{2}{10}} 10\times\left(\frac{2}{10}\right)^3\left(\frac{8}{10}\right)^2 = 10\times\frac{8}{1000}\times\frac{64}{100} = \frac{512}{10000} = 0/0512$$

Save time: چون گزینه‌ها اعداد اعشاری هستند، کسرهای موجود در پاسخ را به گونه‌ای تغییر دادیم تا در مخرج کسرها مضرب‌های ۱۰ (یعنی ۱۰، ۱۰۰، ...) قرار بگیرند.

۶۲ احتمال انتقال ویروس از فرد بیمار به افراد مستعد ۰/۱ است. اگر این بیمار با ۴ فرد مستعد ملاقات کند، با کدام احتمال ۲ یا ۳ نفر از آنان مبتلا می‌شوند؟

داخل تجربی ۸۷ | پاسخ: ۲

۱) ۰/۰۴۸۲ ۲) ۰/۰۵۲۲ ۳) ۰/۰۵۶۴ ۴) ۰/۰۵۹۴

ابتلا به بیماری (انتقال ویروس) را «پیروزی» در نظر می‌گیریم. پس $p=\frac{۱}{۱۰}$. بنابراین احتمال آن که ۲ یا ۳ نفر از ۴ نفر به بیماری مبتلا شوند برابر است با:

$$P=\underbrace{\binom{۴}{۲}\left(\frac{۱}{۱۰}\right)^{۲}\left(۱-\frac{۱}{۱۰}\right)^{۲}}_{\text{۲ پیروزی}}+\underbrace{\binom{۴}{۳}\left(\frac{۱}{۱۰}\right)^{۳}\left(۱-\frac{۱}{۱۰}\right)^{۱}}_{\text{۳ پیروزی}}=\frac{۴\times۳}{۲}\times\frac{۱}{۱۰۰}\times\frac{۸۱}{۱۰۰}+۴\times\frac{۱}{۱۰۰۰}\times\frac{۹}{۱۰}$$

$$=\frac{۴۸۶}{۱۰۰۰۰}+\frac{۳۶}{۱۰۰۰۰}=\frac{۵۲۲}{۱۰۰۰۰}=۰/۰۵۲۲$$

۶۳ از نوعی بذر که ۸۰ درصد آنان جوانه می‌زنند، ۵ عدد کاشته شده است. با کدام احتمال، حداقل دو عدد از آن‌ها جوانه می‌زند؟

داخل تجربی ۸۹ و مشابه داخل تجربی ۸۲ | پاسخ: ۱

۱) ۰/۹۹۳۲۸ ۲) ۰/۹۹۳۶۰ ۳) ۰/۹۴۲۰۸ ۴) ۰/۹۵۱۲۰

جوانه زدن بذر را «پیروزی» در نظر می‌گیریم، پس $p=\frac{۸}{۱۰}$. از طرفی حداقل ۲ تا از ۵ بذر، یعنی ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ بذر جوانه بزنند که محاسبه‌ی آن وقت‌گیر است. پس از متمم استفاده می‌کنیم که در آن یک بذر جوانه زده یا هیچ بذری جوانه نزده است:

$$\text{احتمال متمم}=\binom{۵}{۰}\left(\frac{۸}{۱۰}\right)^{۰}\left(۱-\frac{۸}{۱۰}\right)^{۵}+\binom{۵}{۱}\left(\frac{۸}{۱۰}\right)^{۱}\left(۱-\frac{۸}{۱۰}\right)^{۴}=۱\times۱\times\left(\frac{۲}{۱۰}\right)^{۵}+۵\times\frac{۸}{۱۰}\times\left(\frac{۲}{۱۰}\right)^{۴}=\frac{۳۲}{۱۰^{۵}}+\frac{۶۴۰}{۱۰^{۵}}=\frac{۶۷۲}{۱۰^{۵}}$$

$$\Rightarrow \text{احتمال موردنظر}=۱-\frac{۶۷۲}{۱۰^{۵}}=۱-۰/۰۰۶۷۲=۰/۹۹۳۲۸$$

۶۴ پدر و مادری هر یک دارای یک ژن رنگ چشم مغلوب (b) و یک ژن رنگ چشم غالب (B) اند. اگر این پدر و مادر دارای سه فرزند باشند، با کدام احتمال فقط یکی از فرزندان دارای رنگ چشم مغلوب است؟

خارج تجربی ۸۶ با تغییر | پاسخ: ۳

۱) $\frac{۹}{۶۴}$ ۲) $\frac{۹}{۳۲}$ ۳) $\frac{۲۷}{۶۴}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

از زیست‌شناسی می‌دانیم که برای به‌دست آوردن رنگ چشم مغلوب یا غالب حالات مقابل را داریم:

مغلوب	bb	bB	غالب
غالب	Bb	BB	
		غالب	

$$\Rightarrow P(\text{رنگ چشم مغلوب})=P(bb)=\frac{۱}{۴}$$

در حقیقت، فضای نمونه‌ای ۴ حالت bb، bB، Bb و BB دارد که فقط در حالت bb رنگ چشم مغلوب خواهد شد. پس احتمال آن $\frac{۱}{۴}$ است. حال اگر مغلوب بودن رنگ چشم را «پیروزی» فرض کنیم، احتمال آن که فقط یکی از ۳ فرزند رنگ چشم مغلوب داشته باشد، برابر است با:

$$P=\binom{۳}{۱}\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۱}\left(۱-\frac{۱}{۴}\right)^{۲}=۳\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۹}{۱۶}=\frac{۲۷}{۶۴}$$

یک توضیح کوتاه: صورت اصلی تست از دید اساتید زیست‌شناسی اشتباه بود!! به‌همین خاطر ما آن را کمی تغییر داده‌ایم.

۶۵ آزمایشی فقط دو نتیجه‌ی شکست و پیروزی دارد. احتمال پیروزی $\frac{۳}{۴}$ است و X تعداد پیروزی‌ها در ۱۶ بار تکرار این آزمایش است. $P(۰\le X\le ۱۶)$ کدام است؟

داخل تجربی ۸۵ | پاسخ: ۴

۱) $\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۱۶}$ ۲) $۱-\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۱۶}$ ۳) $۲\binom{۱۶}{۸}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۸}$ ۴) ۱

X در جدول توزیع احتمال می‌تواند ۰، ۱، ۲، ...، ۱۶ باشد. از طرفی می‌دانیم جمع تمام احتمال‌ها در این جدول برابر یک است. بنابراین:

$$P(X=۰)+P(X=۱)+P(X=۲)+\cdots+P(X=۱۶)=۱\Rightarrow P(۰\le X\le ۱۶)=۱$$

ورژن پیشرفته: **آزمایشی مشابه، ۱۶ بار انجام شده است. اگر احتمال پیروزی برابر $\frac{۳}{۴}$ و X تعداد پیروزی‌ها باشد، در این صورت $P(۰ < X \le ۱۶)$ را بیابید.**

پاسخ: با توجه به پاسخ داده شده : $P(۰ \le X \le ۱۶) = ۱ \Rightarrow P(X=۰) + \underbrace{P(X=۱)+\dots+P(X=۱۶)}_{P(۰<X\le۱۶)} = ۱$

$$\Rightarrow P(۰ < X \le ۱۶) = ۱ - P(X=۰)$$

از طرفی $P(X=۰)$ یعنی در ۱۶ بار آزمایش، صفر بار پیروز شویم. احتمال پیروزی $\frac{۳}{۴}$ است، پس احتمال شکست $۱-\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۴}$ بوده و داریم:

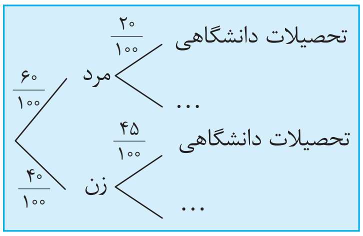
$$P(۰ < X \le ۱۶) = ۱ - \binom{۱۶}{۰}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۰}\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۱۶} = ۱ - ۱\times۱\times\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۱۶} = ۱ - \left(\frac{۱}{۴}\right)^{۱۶}$$

۶۶ **شصت درصد از کارکنان سازمانی مرد و چهل درصد آنان زن هستند. می‌دانیم که ۲۰ درصد از مردان و ۴۵ درصد از زنان تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر به تصادف ۳ نفر از بین آنان انتخاب شود، با کدام احتمال ۲ نفر آنان، تحصیلات دانشگاهی دارند؟**

خارج تجربی ۹۳ | پاسخ: ۱

۱) ۰/۱۸۹ ۲) ۰/۱۹۲ ۳) ۰/۱۹۶ ۴) ۰/۱۹۸

ابتدا به کمک نمودار درختی احتمال این که از بین افراد بیان شده، فردی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد را می‌یابیم:



$$\Rightarrow P(\text{داشتن تحصیلات دانشگاهی}) = \frac{۶۰}{۱۰۰}\times\frac{۲۰}{۱۰۰}+\frac{۴۰}{۱۰۰}\times\frac{۴۵}{۱۰۰} = \frac{۱۲}{۱۰۰}+\frac{۱۸}{۱۰۰} = \frac{۳۰}{۱۰۰} = \frac{۳}{۱۰}$$

حال اگر داشتن تحصیلات دانشگاهی را «پیروزی» فرض کنیم، آن‌گاه $p=\frac{۳}{۱۰}$ است. بنابراین احتمال آن که ۲ نفر از ۳ نفر تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، برابر می‌شود با:

$$P(\text{داشتن تحصیلات دانشگاهی ۲ نفر از ۳ نفر}) = \binom{۳}{۲}\left(\frac{۳}{۱۰}\right)^{۲}\left(۱-\frac{۳}{۱۰}\right)^{۱} = ۳\times\frac{۹}{۱۰۰}\times\frac{۷}{۱۰} = \frac{۱۸۹}{۱۰۰۰} = ۰/۱۸۹$$

دید ویژه: یک ترکیب عالی و جالب! برای اولین بار بود که در کنکور، نمودار درختی (احتمال کل) و توزیع دوجمله‌ای با هم ترکیب شده بودند! به زودی احتمالاً شاهد تست‌های ترکیبی (مانند این سؤال) در سؤالات احتمال کنکور خواهیم بود.

یادداشت

آزمون جمع‌بندی ۱

زمان پیشنهادی: ۲۵ دقیقه

۱- هشت نقطه بر روی دایره مفروض‌اند. تعداد چهارضلعی‌های محاطی که رأس‌های آن نقاط مفروض بوده و همگی در یک رأس A مشترک می‌باشند. کدام است؟ سنجش تجربی ۹۳

۱) ۳۵ ۲) ۴۲ ۳) ۵۶ ۴) ۷۰

۲- در یک خانواده‌ی دو فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال این خانواده فرزند دختر دارد؟ خارج تجربی ۸۵

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۳- دانش‌آموزی به ۵ پرسش ۵ گزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌دهد. با کدام احتمال فقط به یک پرسش پاسخ صحیح داده است؟

۱) ۰/۲۰۴۸ ۲) ۰/۴۰۹۶ ۳) ۰/۵۱۲ ۴) ۰/۷۱۴۴ خارج تجربی ۹۲

۴- اگر $f(x)=x^۲+x-۲$ و $g(x)=\frac{۱}{۲}(x-۳)$، مجموعه‌ی طول نقاطی از منحنی تابع fog که در زیر محور x ها قرار می‌گیرند، برابر کدام بازه است؟ خارج تجربی ۹۱

۱) $(-۵,۱)$ ۲) $(-۱,۵)$ ۳) $(-۲,۱)$ ۴) $(۱,۵)$

۵- مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $x+|x|\leq\frac{۱}{۲}x+۳$ به کدام صورت است؟ خارج تجربی ۸۴

۱) $[-۴,۲]$ ۲) $[-۶,۱]$ ۳) $[-۶,۲]$ ۴) $[-۲,۶]$

۶- اعداد ۲^a، $۴\sqrt{۲}$ و ۲^b سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی‌اند و اعداد a، c و b به ترتیب جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی‌اند. c کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۱/۵ ۴) $\sqrt{۲}$

۷- از تساوی $\log_x(۳x+۸)=۲-\log_x(x-۶)$، مقدار لگاریتم x در پایه‌ی ۴، کدام است؟ خارج تجربی ۹۳

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۸- در یک نوع کشت، تعداد باکتری‌ها پس از گذشت t دقیقه برابر $f(t)$ است که $f(t)=۲۰۰۰e^{۰/۰۱۲t}$. پس از چه مدت تعداد باکتری‌ها ۱۰۰۰۰ می‌شود؟ $(\ln ۵ = ۱/۶۸)$ خارج تجربی ۹۱

۱) ۲ ساعت و ۱۰ دقیقه ۲) ۲ ساعت و ۲۰ دقیقه

۳) ۲ ساعت و ۲۵ دقیقه ۴) ۲ ساعت و ۳۵ دقیقه

۹- در مثلث ABC داریم $A=۶۰^\circ$، $B=۴۵^\circ$ و $BC=۱۲$. طول ضلع AB کدام است؟ سنجش تجربی ۹۳

۱) $۴\sqrt{۲}+۳\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}+۳\sqrt{۶}$ ۳) $۳\sqrt{۲}+۴\sqrt{۶}$ ۴) $۶\sqrt{۲}+۲\sqrt{۶}$

۱۰- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $(\sin x-\tan x)\tan(\frac{۳\pi}{۲}-x)=\cos\frac{۴\pi}{۳}$، کدام است؟ خارج تجربی ۹۰

۱) $k\pi-\frac{\pi}{۶}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$

۱۱- در تابع $f(x)=\frac{۲x-\sqrt{x^۲+۶x}}{ax-۲}$، اگر $\lim_{x\to-\infty}f(x)=۳$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to۲}f(x)$ کدام است؟ خارج تجربی ۸۹

۱) صفر ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۲- اگر محور y ها تنها مجانب قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۳+ax-۲}{x^۲-x}$ باشد، آن‌گاه معادله‌ی مجانب مایل آن کدام است؟ خارج تجربی ۹۱

۱) $y=x-۲$ ۲) $y=x-۱$ ۳) $y=x+۱$ ۴) $y=x+۲$

۱۳- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع از نقطه‌ی $x=۴$ تا $x=۶/۲۵$، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه‌ی $x=۴$، چه‌قدر کم‌تر است؟ خارج تجربی ۹۳

۱) $\frac{۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۵}{۷۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۱۴- مقدار مشتق تابع $y=\cos^{۲}\frac{\pi}{۳x}$ به ازای $x=۴$ کدام است؟ خارج تجربی ۹۰

۱) $\frac{\pi}{۹۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۷۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۴۸}$ ۴) $\frac{\pi}{۳۲}$

۱۵- خط قائم بر منحنی به معادله‌ی $e^{۲y}+\ln x+\frac{y}{x}=۱$ در نقطه‌ی $(۱،۰)$، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ خارج تجربی ۸۶

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۱

آزمون جمع‌بندی ۲

زمان پیشنهادی: ۲۵ دقیقه

۱- ۵۵ درصد دانشجویان سال اول، دختر و بقیه پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران، تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند. چند درصد کل دانشجویان، تمام واحدهای درسی را گذرانده‌اند؟ خارج تجربی ۸۸

۱) ۶۱/۴ ۲) ۶۱/۸ ۳) ۶۲/۴ ۴) ۶۲/۸

۲- احتمال انتقال نوعی بیماری از فرد بیمار به افراد مستعد ۰/۲ است. اگر ۶ نفر مستعد با این بیمار ملاقات کنند، با کدام احتمال ۴ نفر آن‌ها به این بیماری مبتلا می‌شوند؟ خارج تجربی ۹۱

۱) ۰/۰۱۴۲۸ ۲) ۰/۰۱۵۳۶ ۳) ۰/۰۱۵۴۸ ۴) ۰/۰۱۵۹۶

۳- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۳}+ax+b$ و خط به معادله‌ی $y+۲x=b$، در نقطه‌ای به طول ۱ روی محور xها متقاطع‌اند. طول‌های دو نقطه‌ی تقاطع دیگر این منحنی و خط، کدام است؟ داخل تجربی ۸۹

۱) ۲ و ۱- ۲) ۳ و ۱- ۳) ۱- و ۰ ۴) ۲ و ۰

۴- اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^{۲}+۲x+۱$ باشد، حاصل $(fog)(۱-\sqrt{۲})-(gof)(۱-\sqrt{۲})$ کدام است؟ داخل تجربی ۸۹

۱) $۴(۱-\sqrt{۲})$ ۲) $۴(\sqrt{۲}-۱)$ ۳) ۴ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۵- ریشه‌های معادله‌ی $۳x^{۲}+ax+b=۰$ از ریشه‌های معادله‌ی $۳x^{۲}-۴x-۱=۰$ یک واحد بیشتر است. b کدام است؟ خارج تجربی ۸۶

۱) -۵ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۶- اعداد ۱، b و a تشکیل دنباله‌ی عددی و اعداد ۱، a و b تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند. به شرط آن که جملات دنباله مساوی نباشند، $a+b$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) صفر

۷- اگر $\log ۶=a$ و $\log ۳=b$ باشد، حاصل $\log ۲۵$ کدام است؟

۱) $۲(۱+a-b)$ ۲) $۲(۱+a+b)$ ۳) $۲(۱-a+b)$ ۴) $۲(۱-a-b)$

۸- اگر $\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\frac{۲}{۳}$، آن‌گاه $\tan(\frac{\pi}{۴}-\alpha)$ کدام است؟ خارج تجربی ۸۸

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۹- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^{۲}x-\cos^{۲}x=\sin(\frac{۳\pi}{۲}+x)$، به کدام صورت است؟ داخل تجربی ۹۱

۱) $\frac{k\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi+\frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$

۱۰- دنباله‌ی $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$:

۱) صعودی ـ کران‌دار ۲) نزولی ـ کران‌دار ۳) غیریکنوا ـ کران‌دار ۴) غیریکنوا ـ بی‌کران

۱۱- فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو خط مجانب نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{x^۲}{x+۱}$ از مبدأ مختصات، کدام است؟ خارج تجربی ۸۴

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۵}$

۱۲- حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{۱-\sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x}$ کدام است؟ خارج تجربی ۸۴

۱) ∞ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۳- به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} a+\sin^۲ x & ; ۰ \le x < \frac{\pi}{۴} \\ \sqrt{۲}\cos ۳x & ; \frac{\pi}{۴} \le x \le ۲\pi \end{cases}$، روی بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ پیوسته است؟ خارج تجربی ۸۸

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) هیچ مقدار a

۱۴- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{۳۶}{x^۲}$، آهنگ متوسط تغییر تابع از $x_۱ = ۲$ تا $x_۲ = ۳$ چه‌قدر از آهنگ لحظه‌ای آن در $x = \sqrt[۳]{۱۲}$ بیشتر است؟ داخل تجربی ۹۰

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

۱۵- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ax-a \; ; \; x<۱ \\ x^۲ - x \; ; \; x \ge ۱ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در نقطه‌ی $x = ۱$ مشتق‌پذیر است؟ داخل تجربی ۸۶

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) هر مقدار a ۴) هیچ مقدار a

یادداشت

آزمون ۱ — جمع‌بندی

۱ ۱

یکی از ۴ رأس مورد نیاز برای تشکیل چهارضلعی، رأس (نقطه‌ی) A است. پس باید سه نقطه‌ی دیگر از هفت نقطه‌ی باقی‌مانده را به $۳۵ = \frac{۷!}{۳!۴!} = \binom{۷}{۳}$ طریق ممکن انتخاب کنیم.

۲ ۳

می‌دانیم در یک خانواده‌ی دو فرزندی یکی از فرزندان پسر است، پس احتمال شرطی است. حال فضای نمونه‌ای جدید را نوشته و احتمال موردنظر را می‌یابیم:

$$S_{\text{جدید}} = \{(\text{پ پ}) , \overset{\checkmark}{(\text{پ د})} , \overset{\checkmark}{(\text{د پ})}\} \Rightarrow P(A) = \frac{۲}{۳}$$

۳ ۲

احتمال پیروزی $p = \frac{۱}{۵}$ و احتمال شکست $۱ - p = \frac{۴}{۵}$ است. بنابراین احتمال آن‌که دانش‌آموز فقط به یک پرسش پاسخ صحیح داده باشد، برابر است با:

$$\text{احتمال موردنظر} = \binom{۵}{۱}\left(\frac{۱}{۵}\right)^۱\left(\frac{۴}{۵}\right)^۴ \xlongequal{\frac{۴}{۵}=\frac{۸}{۱۰}} \cancel{۵} \times \frac{۱}{\cancel{۵}} \times \left(\frac{۸}{۱۰}\right)^۴ = \left(\frac{۸}{۱۰}\right)^۴ = \frac{۴۰۹۶}{۱۰۰۰۰} = ۰/۴۰۹۶$$

۴ ۲

$$\begin{cases} f(x)=x^۲+x-۲=(x+۲)(x-۱) \\ g(x)=\frac{۱}{۲}(x-۳)=\frac{x}{۲}-\frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow f(g(x))=(g(x)+۲)(g(x)-۱)=\left(\frac{x}{۲}-\frac{۳}{۲}+۲\right)\left(\frac{x}{۲}-\frac{۳}{۲}-۱\right)=\left(\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{x}{۲}-\frac{۵}{۲}\right)$$

حال برای تعیین مجموعه‌ی طول نقاطی از منحنی تابع fog که در زیر محور xها قرار می‌گیرند، کافی است نامساوی $fog(x) < ۰$ را حل کنیم. داریم:

$$f(g(x)) < ۰ \Rightarrow \left(\frac{x+۱}{۲}\right)\left(\frac{x-۵}{۲}\right) < ۰ \Rightarrow x \in (-۱,۵)$$

۵ ۳

$$x+|x| \le \frac{۱}{۲}x+۳ \Rightarrow \begin{cases} x \ge ۰ : x+x \le \frac{۱}{۲}x+۳ \Rightarrow \frac{۳}{۲}x \le ۳ \Rightarrow x \le ۲ \xRightarrow[\text{با } x\ge۰]{\text{اشتراک}} ۰ \le x \le ۲ \quad (۱) \\ \text{یا} \\ x < ۰ : x+(-x) \le \frac{۱}{۲}x+۳ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x \ge -۳ \Rightarrow x \ge -۶ \xRightarrow[\text{با } x<۰]{\text{اشتراک}} -۶ \le x < ۰ \quad (۲) \end{cases} \xRightarrow{(۱)\cup(۲)} -۶ \le x \le ۲$$

۶ ۱

$$۲^b , ۴\sqrt{۲} , ۲^a : \text{دنباله‌ی هندسی} \Rightarrow (۴\sqrt{۲})^۲ = ۲^a \times ۲^b \Rightarrow ۳۲ = ۲^{a+b} \Rightarrow a+b = ۵ \quad (*)$$

$$b , c , a : \text{دنباله‌ی حسابی} \Rightarrow ۲c = a+b \xRightarrow{(*)} ۲c = ۵ \Rightarrow c = ۲/۵$$

۷ ۳

$$\log_x(۳x+۸) = ۲ - \log_x(x-۶) \Rightarrow \log_x(۳x+۸) + \log_x(x-۶) = ۲ \Rightarrow \log_x(۳x+۸)(x-۶) = ۲$$

$$\Rightarrow \log_x(۳x^۲-۱۰x-۴۸) = ۲ \Rightarrow ۳x^۲-۱۰x-۴۸ = x^۲ \Rightarrow ۲x^۲-۱۰x-۴۸=۰ \xRightarrow{\div۲} x^۲-۵x-۲۴=۰ \Rightarrow (x-۸)(x+۳)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۸ \ \text{قق} \Rightarrow \log_۴ x \xlongequal{x=۸} \log_۴ ۸ = \log_{۲^۲} ۲^۳ = \frac{۳}{۲}\log_۲ ۲ = \frac{۳}{۲} \\ x = -۳ \ \text{غقق} \end{cases}$$

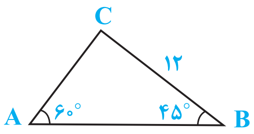
۸ ۲

با توجه به فرمول رشد و زوال، داریم:

$$f(t) = ۲۰۰۰e^{۰/۰۱۲t} \xRightarrow{f(t)=۱۰۰۰۰} ۱۰۰۰۰ = ۲۰۰۰e^{۰/۰۱۲t} \Rightarrow ۵ = e^{\frac{۱۲}{۱۰۰۰}t} \xRightarrow{\text{از طرفین تساوی ln می‌گیریم}} \ln ۵ = \ln e^{\frac{۱۲}{۱۰۰۰}t}$$

$$\xRightarrow{\ln ۵=۱/۶۸} ۱/۶۸ = \frac{۱۲}{۱۰۰۰}t \Rightarrow t = \frac{۱/۶۸ \times ۱۰۰۰}{۱۲} = \frac{۱۶۸۰}{۱۲} \Rightarrow t = ۱۴۰ \ \text{دقیقه} = \text{۲ ساعت و ۲۰ دقیقه}$$

۹ ۴



$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}\Rightarrow \frac{AC}{\sin ۴۵}=\frac{۱۲}{\sin ۶۰}\Rightarrow \frac{AC}{\frac{\sqrt{۲}}{\cancel{۲}}}=\frac{۱۲}{\frac{\sqrt{۳}}{\cancel{۲}}}\Rightarrow AC=\frac{۱۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}=۴\sqrt{۶}$$

حال ساده‌ترین راه برای محاسبه‌ی طول ضلع AB، استفاده از نتیجه‌ی فرعی قانون کسینوس‌ها است.

$$AB=AC\times\cos ۶۰+BC\times\cos ۴۵\Rightarrow AB=۴\sqrt{۶}\times\frac{۱}{۲}+۱۲\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۲\sqrt{۶}+۶\sqrt{۲}$$

---

۱۰ ۳

$$(\sin x-\tan x)\tan(\overbrace{\frac{۳\pi}{۲}-x}^{\text{ربع سوم، tan منفی و تبدیل به cot}})=\cos\frac{۴\pi}{۳}\Rightarrow(\sin x-\tan x)\cot x=\cos(\pi+\frac{\pi}{۳})$$

$$\Rightarrow \sin x\cot x-\tan x\cot x=-\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\cos x-۱=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos x=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

---

۱۱ ۳

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=۳\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-\sqrt{x^۲+۶x}}{ax-۲}\xlongequal[\text{پرتوان}]{\text{ابهام } \frac{\infty}{\infty}}\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-|x|}{ax}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-(-x)}{ax}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x}{ax}=\frac{۳}{a}=۳\Rightarrow a=۱$$

$$\lim_{x\to۲}f(x)=\lim_{x\to۲}\frac{۲x-\sqrt{x^۲+۶x}}{x-۲}\xlongequal[HOP]{\text{ابهام } \frac{۰}{۰}}\lim_{x\to۲}\frac{۲-\frac{۲x+۶}{۲\sqrt{x^۲+۶x}}}{۱}=\frac{۲-\frac{۵}{۴}}{۱}=\frac{۳}{۴}$$

---

۱۲ ۳

چون محور yها، یعنی خط $x=۰$، تنها مجانب قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۳+ax-۲}{x^۲-x}$ است، نتیجه می‌گیریم که ریشه‌ی دیگر مخرج کسر، یعنی $x=۱$، ریشه‌ی صورت کسر نیز می‌باشد که به عنوان مجانب قائم معرفی نشده است. پس داریم:

ریشه‌ی صورت کسر است: $x=۱\Rightarrow ۱^۳+a(۱)-۲=۰\Rightarrow a=۱$

حال با معلوم بودن $a=۱$، ضابطه‌ی تابع f را به‌صورت معلوم نوشته و برای تعیین معادله‌ی خط مجانب مایل آن، صورت را بر مخرج کسر تقسیم کرده و خارج قسمت تقسیم را به عنوان مجانب مایل معرفی می‌نماییم. داریم:

$$\begin{array}{l|l} x^۳+x-۲ & x^۲-x \\ \cline{2-2} -(x^۳-x^۲) & x+۱ \\ \hline x^۲+x-۲ & \\ \vdots & \end{array}\ \xlongequal{\text{معادله‌ی مجانب مایل}}\ y=x+۱$$

---

۱۳ ۱

آهنگ متوسط تغییر تابع از $x_۱=۴$ تا $x_۲=۶/۲۵$ $=\dfrac{f(۶/۲۵)-f(۴)}{۶/۲۵-۴}=\dfrac{\sqrt{\frac{۶۲۵}{۱۰۰}}-\sqrt{۴}}{\frac{۲۲۵}{۱۰۰}}=\dfrac{\frac{۲۵}{۱۰}-۲}{\frac{۲۲۵}{۱۰۰}}=\dfrac{\frac{۵}{\cancel{۱۰}}}{\frac{۲۲۵}{\cancel{۱۰۰}_{۱۰}}}=\dfrac{۵۰}{۲۲۵}=\dfrac{۲}{۹}$

آهنگ لحظه‌ای تابع در نقطه‌ای به طول $x=۴$ $=f'(۴)\xlongequal{f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}\dfrac{۱}{۲\sqrt{۴}}=\dfrac{۱}{۴}$

$\Rightarrow$ آهنگ لحظه‌ای - آهنگ متوسط $=\dfrac{۱}{۴}-\dfrac{۲}{۹}=\dfrac{۹-۸}{۳۶}=\dfrac{۱}{۳۶}$

---

۱۴ ۱

$$y=\cos^۲\frac{\pi}{۳x}=(\overbrace{\cos\frac{\pi}{۳x}}^{u})^۲\xrightarrow{y'=۲uu'}y'=۲\cos\frac{\pi}{۳x}(\frac{\pi}{۳x^۲}\sin\frac{\pi}{۳x})\Rightarrow y'=\frac{\pi}{۳x^۲}(۲\cos\frac{\pi}{۳x}\sin\frac{\pi}{۳x})$$

$$\xrightarrow{۲\cos\alpha\sin\alpha=\sin۲\alpha}y'=\frac{\pi}{۳x^۲}\sin\frac{۲\pi}{۳x}\Rightarrow y'(۴)=\frac{\pi}{۳\times۱۶}\sin\frac{۲\pi}{۱۲}\Rightarrow y'(۴)=\frac{\pi}{۴۸}\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{\pi}{۴۸}\times\frac{۱}{۲}=\frac{\pi}{۹۶}$$

۱۵ | **۱**

ابتدا با قاعده‌ی مشتق تابع ضمنی، شیب خط قائم بر منحنی را در نقطه‌ی $(1,0)$ به دست می‌آوریم:

$$2y'e^{2y}+\frac{1}{x}+\frac{y'x-y}{x^2}=0 \xrightarrow{(1,0)} 2\times y'\times e^{0}+\frac{1}{1}+\frac{y'-0}{1}=0\Rightarrow 3y'+1=0\Rightarrow y'=-\frac{1}{3}\xrightarrow[\text{معکوس}]{\text{قرینه}}\text{شیب قائم}=3$$

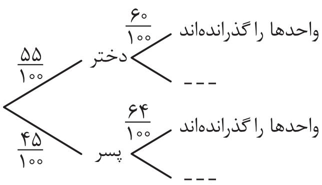
بنابراین:

$$y-0=3(x-1)\Rightarrow y=3x-3\xrightarrow[x=0]{\text{برخورد با محور y ها}} y=-3$$

آزمون ۲ — جمع‌بندی

۱ | **۲**

با توجه به قانون جمع احتمال‌ها، داریم:



$$\Rightarrow \text{احتمال موردنظر}=\frac{55}{100}\times\frac{6}{10}+\frac{45}{100}\times\frac{64}{100}$$

$$=\frac{330}{1000}+\frac{2880}{10000}=\frac{330+288}{1000}=\frac{618}{1000}=0/618\Rightarrow 61/8\ \text{درصد}$$

۲ | **۲**

اگر انتقال بیماری را «پیروزی» در نظر بگیریم، پس $p=\frac{2}{10}$. حال با توجه به فرمول توزیع احتمال دوجمله‌ای، داریم:

$$P(\text{۴ نفر از ۶ نفر مبتلا به بیماری شوند})=\binom{6}{4}\left(\frac{2}{10}\right)^4\left(1-\frac{2}{10}\right)^2=15\times\frac{16}{10000}\times\frac{64}{100}=\frac{15360}{1000000}=0/015360$$

۳ | **۳**

مختصات نقطه‌ی تقاطع به صورت $(1,0)$ بوده و مختصات این نقطه در ضابطه‌ی تابع و معادله‌ی خط، صدق می‌کند:

$$\begin{cases} f(x)=x^3+ax+b\xrightarrow{(1,0)}0=1+a+b \\ y=-2x+b\xrightarrow{(1,0)}0=-2+b\Rightarrow b=2\end{cases}\Rightarrow a=-3$$

حال برای تعیین طول‌های دو نقطه‌ی تقاطع دیگر، معادله‌ی تقاطع آن‌ها را ساخته و ریشه‌های دیگر این معادله را می‌یابیم:

$$x^3+ax+b=-2x+b\xrightarrow[b=2]{a=-3}x^3-3x+\cancel{2}=-2x+\cancel{2}\Rightarrow x^3-x=0\Rightarrow x(x^2-1)=0\Rightarrow x(x-1)(x+1)=0\Rightarrow x=0,1,-1$$

بنابراین طول‌های نقاط تقاطع دیگر $x=0$ و $x=-1$ است.

۴ | **۱**

$$f(x)=|x|\ ,\ g(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$$

$$\begin{cases} f(g(x))=|g(x)|=|\underbrace{(x+1)^2}_{\text{همواره نامنفی}}|=(x+1)^2\Rightarrow(fog)(1-\sqrt{2})=(\underbrace{1-\sqrt{2}+1}_{2-\sqrt{2}})^2=4-4\sqrt{2}+2=6-4\sqrt{2} \\ g(f(x))=(f(x)+1)^2=(|x|+1)^2\Rightarrow(gof)(1-\sqrt{2})=(|\underbrace{1-\sqrt{2}}_{\text{منفی}}|+1)^2=(\sqrt{2}-\cancel{1}+\cancel{1})^2=(\sqrt{2})^2=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow(fog)(1-\sqrt{2})-(gof)(1-\sqrt{2})=(6-4\sqrt{2})-2=4-4\sqrt{2}=4(1-\sqrt{2})$$

۵ | **۴**

جواب‌های معادله‌ی بدون مجهول $3x^2-4x-1=0$ را با x و جواب‌های معادله‌ی $3x^2+ax+b=0$ را با x' نمایش دهیم، داریم:

$$x'=x+1\Rightarrow x=x'-1\xrightarrow[\text{معادله‌ی بدون مجهول}]{\text{جایگذاری در}}3(x'-1)^2-4(x'-1)-1=0\Rightarrow 3x'^2-10x'+6=0\xrightarrow[3x^2+ax+b=0]{\text{مقایسه با}}a=-10,b=6$$

۶ | **۳**

$$\begin{cases} a,b,1:\ \text{دنباله‌ی عددی (حسابی)}\Rightarrow 2b=a+1\quad(*) \\ b,a,1:\ \text{دنباله‌ی هندسی}\Rightarrow a^2=b\times 1\quad(**)\end{cases}\xrightarrow[\text{در }(*)]{\text{جایگذاری }(**)}2a^2=a+1\Rightarrow 2a^2-a-1=0\Rightarrow a=1\ ,\ -\frac{1}{2}$$

چون جملات دنباله مساوی نمی‌باشند. پس $a\neq 1$ و لذا $a=-\frac{1}{2}$ و با جایگذاری a در رابطه‌ی $(**)$ مقدار $b=\frac{1}{4}$ می‌شود. در نتیجه $a+b=-\frac{1}{4}$.

۷ ۳

$$\log 6=\log(2\times 3)=\log 2+\log 3\Rightarrow a=\log 2+b\Rightarrow \log 2=a-b \quad (*)$$

$$\log 25=\log 5^2=2\log 5=2(1-\log 2)\overset{(*)}{=\!=}2(1-(a-b))=2(1-a+b)$$

---

۸ ۲

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\frac{2}{3}\Rightarrow \cot\alpha=\frac{2}{3}\Rightarrow \tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}=\frac{3}{2}$$

$$\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1-\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}}=-\frac{1}{5}$$

---

۹ ۲

$$\sin^2x-\cos^2x=\sin(\frac{3\pi}{2}+x)\Rightarrow \cancel{-}\cos 2x=\cancel{-}\cos x$$

$$\Rightarrow \cos 2x=\cos x\Rightarrow 2x=2k\pi\pm x\Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi \\ \text{یا} \\ x=\frac{2k\pi}{3}\end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} x=\frac{2k\pi}{3}$$

---

۱۰ ۱

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})=\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})\times\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\overbrace{n-(n+1)}^{-1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{n\to+\infty}\frac{-1}{2\sqrt{n}}=\frac{-1}{+\infty}=0$$

حد دنباله عدد صفر شد، پس دنباله کران‌دار است. حال برای بررسی یکنوایی، مشتق a_n را می‌یابیم:

$$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\Rightarrow a'_n=\frac{1}{2\sqrt{n}}-\frac{1}{2\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\underbrace{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}_{+}}\xrightarrow[\Rightarrow\sqrt{n+1}-\sqrt{n}>0]{n+1>n\overset{\sqrt{}}{\Longrightarrow}\sqrt{n+1}>\sqrt{n}} a'_n>0\Rightarrow \text{صعودی } a_n$$

---

۱۱ ۴

تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{x^2}{x+1}$ دارای یک مجانب قائم به معادله‌ی $x=-1$ و یک مجانب مایل است که معادله‌اش با تقسیم صورت کسر بر مخرج آن مشخص می‌شود. داریم:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & x+1 \\ \underline{-(x^2+x)} & x-1 \\ -x & \\ \vdots & \end{array} \xrightarrow{\text{معادله‌ی مجانب مایل}} y=x-1 \xrightarrow{x=-1\ \text{تقاطع با خط}} y=-2\Rightarrow A(-1,-2)\Rightarrow OA=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$

---

۱۲ ۴

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^2x}\xrightarrow[\text{مزدوج صورت}]{\text{ضرب و تقسیم در}}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{\cos x})(1+\sqrt{\cos x})}{\sin^2x(1+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos^2x)(1+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{(1-\cos x)}}{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)(1+\sqrt{\cos x})}=\frac{1}{(1+\cos 0)(1+\sqrt{\cos 0})}=\frac{1}{(1+1)(1+\sqrt{1})}=\frac{1}{2\times 2}=\frac{1}{4}$$

---

۱۳ ۱

شرط پیوستگی تابع را در $x=\frac{\pi}{4}$ اعمال کنیم.

$$\begin{cases} \text{حد راست}=\text{مقدار}=f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}=\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2})=-1 \\ \text{حد چپ}:\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}(a+\sin^2x)=a+\sin^2\frac{\pi}{4}=a+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=a+\frac{1}{2}\end{cases} \xrightarrow{\text{مقدار = حد چپ = حد راست}} a+\frac{1}{2}=-1\Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

۱۴ ۱

آهنگ متوسط تغییر تابع از $x_1=۲$ تا $x_2=۳$ $= \dfrac{f(۳)-f(۲)}{۳-۲} = \dfrac{\frac{۳۶}{۹}-\frac{۳۶}{۴}}{۱} = ۴-۹ = -۵$

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x=\sqrt[۳]{۱۲}$ $= f'(\sqrt[۳]{۱۲}) \xRightarrow{f(x)=\frac{۳۶}{x^۲}\Rightarrow f'(x)=-\frac{۷۲}{x^۳}} -\dfrac{۷۲}{(\sqrt[۳]{۱۲})^۳} = -\dfrac{۷۲}{۱۲} = -۶$

آهنگ متوسط - آهنگ لحظه‌ای $= -۵-(-۶) = ۱$

---

۱۵ ۲

حد چپ در ۱ $=$ حد راست در ۱ $=$ مقدار در ۱ $\Rightarrow a(۱)-a = ۱^۲-۱ \Rightarrow ۰=۰$ همواره برقرار است. $\boxed{۱}$

مشتق چپ در ۱ $=$ مشتق راست در ۱ $\xRightarrow[\text{و قرار دادن ۱ به‌جای x}]{\text{مشتق گرفتن از دو ضابطه و}} a=۲x-۱ \xRightarrow{x=۱} a=۲(۱)-۱=۱$ $\boxed{۲}$

یادداشت