ریاضی دهم
(دوّم متوسطه)

حسین انصاری

بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمه

سپاس بیکران خداوندی را که انسان را آفرید و او را به زیور علم آراست. به دنبال انتشار کتاب‌های پنجم، ششم، هفتم، هشتم و نهم و استقبال زایدالوصفی که دانش‌آموزان هوشمند و معلمان فرهیخته از آن‌ها به عمل آوردند، کتاب ریاضیات دهم را به رشتهٔ تحریر درآوردیم و آن را به جوانان تیزهوش و دانش‌آموزان سرآمد که آینده‌سازان این مرزوبوم می‌باشند تقدیم می‌کنیم.

در این کتاب ابتدا مفاهیم ریاضیات دهم را آموزش داده و با مثال‌های فراوان و هدفمند به تعمیق مفاهیم همت گمارده‌ایم. در پایان هر فصل نیز تمرینات متنوع در سطوح مختلف قرار داده‌ایم تا همهٔ دانش‌آموزان با توانایی‌های مختلف با حل آن‌ها به پشتوانهٔ علمی خود بیفزایند.

از همکاران فرهیخته و دانشمند تقاضا دارم که کاستی‌ها و نقایص کتاب را به سمع بندهٔ حقیر برسانند تا در چاپ‌های بعدی مرتفع گردد.

در پایان از مدیریت محترم انتشارات مبتکران آقای دهقانی و دیگر کارکنان آن مؤسسهٔ وزین که کار آماده‌سازی کتاب را برعهده داشته‌اند، علی‌الخصوص آقایان مبین، انصاری و خانم‌ها نوروزی، خدامی و مرادی تشکر می‌کنم.

حسین انصاری

تابستان ۹۵

فهرست

فصل ۱

مجموعه، الگو و دنباله

۱ مجموعه، الگو و دنباله

بخش اول: مجموعه

دربارهٔ مفهوم مجموعه، صورت‌های مختلف نمایش مجموعه و اعمال روی مجموعه در کتاب نهم به تفصیل سخن گفته‌ایم. در این بخش ضمن یادآوری اجمالی مطالب فوق به تکمیل این مبحث می‌پردازیم.

مجموعه: دسته‌ای از اشیاء کاملاً مشخص را مجموعه می‌نامند. مانند اعداد طبیعی کوچکتر از ۲۰، مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۲، اعداد اول دورقمی.

مثال ۱: کدام‌یک از موارد زیر مجموعه نیست؟

الف) اعداد طبیعی بزرگتر از 10^{100}

ب) اعداد اول بزرگتر از ۱۰۰۰

ج) چهار عدد طبیعی متوالی

د) مضارب طبیعی عدد ۱۰

هـ) اعداد خیلی بزرگ

حل: موارد (الف)، (ب) و (د) یک مجموعه را مشخص می‌کنند. اما موارد (ج) و (هـ) مجموعه نیستند.

مجموعهٔ تهی: مجموعه‌ای که عضو نداشته باشد مجموعهٔ تهی نامیده می‌شود که آن را به صورت $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نشان می دهند.
مانند مجموعه اعداد طبیعی بین ۸ و ۹ یا مجموعهٔ اعداد اول دورقمی زوج.

مثال ۲: مجموعهٔ اعداد صحیح زوج بین -17 و ۲۵ را با عضوها و علائم ریاضی مشخص کنید.

حل:

$$A=\{-16,-14,-12,\cdots,24\}=\{2x \mid x\in\mathbb{Z}, -8\le x\le 12\}$$

مثال ۳: مجموعهٔ مضارب صحیح عدد ۵ را با عضوها و علائم ریاضی مشخص کنید.

حل:

$$B=\{\cdots,-15,-10,-5,0,5,10,15,\cdots\}=\{5x \mid x\in\mathbb{Z}\}$$

مثال ۴: مجموعهٔ اعداد طبیعی که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۷ برابر ۲ می‌باشد را با عضوها و علائم ریاضی مشخص کنید.

حل:

$$C=\{2,9,16,23,\cdots\}=\{7x+2 \mid x\in\mathbb{W}\}$$
$$=\{7x-5 \mid x\in\mathbb{N}\}$$

مثال ۵: مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صحیح عدد ۸ را با عضوها و علائم ریاضی بنویسید.

حل:

$$D=\{-8,-4,-2,-1,1,2,4,8\}=\left\{x \mid x\in\mathbb{Z}, \frac{8}{x}\in\mathbb{Z}\right\}$$

زیرمجموعه: مجموعهٔ A را زیرمجموعهٔ B گویند در صورتیکه تمام عضوهای A در B نیز باشد.

مثال ۶: اگر A مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های ۱۸ و B مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های ۵۴ باشد کدام‌یک از این دو مجموعه زیرمجموعهٔ دیگری است؟

حل: با توجه به اینکه ۵۴ بر ۱۸ بخش‌پذیر است، می‌توان گفت هر مقسوم‌علیه ۱۸ مقسوم‌علیه ۵۴ نیز می‌باشد. پس $A \subseteq B$.

مثال ۷: اگر C مجموعهٔ مضارب عدد ۶ و D مجموعهٔ مضارب عدد ۲۴ باشد کدام‌یک از این دو مجموعه زیرمجموعهٔ دیگری است؟

حل: با توجه به اینکه ۲۴ بر ۶ بخشپذیر می‌باشد می‌توان گفت هر مضرب ۲۴ مضرب ۶ نیز می‌باشد. پس $D \subseteq C$.

نکته: مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه ها است.

نکته: هر مجموعه‌ای زیرمجموعهٔ خودش است.

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه: مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳\}$ را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم B زیرمجموعه‌ای از A باشد، حالت های زیر را می‌توان برای عضوهای B در نظر گرفت.

- $۱ \in B$
  - $۲ \in B$
    - $۳ \in B \longrightarrow B_۱=\{۱,۲,۳\}$
    - $۳ \notin B \longrightarrow B_۲=\{۱,۲\}$
  - $۲ \notin B$
    - $۳ \in B \longrightarrow B_۳=\{۱,۳\}$
    - $۳ \notin B \longrightarrow B_۴=\{۱\}$
- $۱ \notin B$
  - $۲ \in B$
    - $۳ \in B \longrightarrow B_۵=\{۲,۳\}$
    - $۳ \notin B \longrightarrow B_۶=\{۲\}$
  - $۲ \notin B$
    - $۳ \in B \longrightarrow B_۷=\{۳\}$
    - $۳ \notin B \longrightarrow B_۸=\phi$

عدد ۱ در B باشد یا نباشد ۲ حالت دارد، عدد ۲ در B باشد یا نباشد هم دو حالت دارد، عدد ۳ در B باشد یا نباشد نیز دو حالت دارد. لذا تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$۲\times۲\times۲=۲^{۳}=۸$$

اگر A یک مجموعهٔ n عضوی باشد تعداد زیرمجموعه‌های A برابر است با:

$$\underbrace{۲\times۲\times۲\times\cdots\times۲}_{n\ \text{بار}}=۲^{n}$$

مثال ۸: همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A=\{۵,\{۵\},\{۶\}\}$ را بنویسید.

حل: $\varnothing,\{۵\},\{\{۵\}\},\{\{۶\}\},\{۵,\{۵\}\},\{۵,\{۶\}\},\{\{۵\},\{۶\}\},A$

مثال ۹: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $۲n-۴$ عضوی هشت برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $n-۱$ عضوی است. مقدار n چقدر است؟

حل:

$$۲^{۲n-۴}=۸\times ۲^{n-۱}\Rightarrow ۲^{۲n-۴}=۲^{۳}\times ۲^{n-۱}\Rightarrow ۲^{۲n-۴}=۲^{n+۲}$$

$$۲n-۴=n+۲\Rightarrow n=۶$$

مثال ۱۰: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $n+۳$ عضوی از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $n+۱$ عضوی ۱۹۲ واحد بیشتر است. مقدار n چقدر است؟

حل:

$$۲^{n+۳}=۲^{n+۱}+۱۹۲\Rightarrow ۲^{n+۳}-۲^{n+۱}=۱۹۲\Rightarrow ۲^{n}(۲^{۳}-۲^{۱})=۱۹۲$$

$$۲^{n}\times ۶=۱۹۲\Rightarrow ۲^{n}=۳۲\Rightarrow n=۵$$

زیرمجموعهٔ محض: همهٔ زیرمجموعه‌های یک مجموعه به جز خود مجموعه را زیرمجموعه‌های محض آن مجموعه می‌نامند. تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با $۲^{n}-۱$.

قضیه: اگر $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$، آنگاه $A\subseteq C$.

برهان: فرض می‌کنیم x عضو دلخواهی از A باشد. با توجه به اینکه $A\subseteq B$ می‌توان گفت x عضوی از B نیز هست و چون $B\subseteq C$ پس x عضو C نیز می‌باشد. بنابراین هر عضو مجموعهٔ A در مجموعهٔ C نیز وجود دارد پس $A\subseteq C$.

مجموعهٔ توانِ یک مجموعه: مجموعهٔ متشکل از همهٔ زیرمجموعه‌های یک مجموعه را مجموعهٔ توان آن مجموعه می‌نامند. مجموعهٔ توان A را با $P(A)$ نشان می‌دهند.

مثال ۱۱: اگر $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ باشد، $P(A)$ را مشخص کنید.

حل:

$$P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$$

تساوی دو مجموعه: دو مجموعهٔ A و B را مساوی گویند در صورتیکه $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$.

به عنوان مثال دو مجموعهٔ $A=\{۶,۷,۸\}$ و $B=\{۸,۷,۷,۶,۶,۶\}$ مساویند.

مثال ۱۲: اگر $A=\{\{۵\},\{۵,۵\},\{۵,۵\}\}$ باشد، $P(P(A))$ را مشخص کنید.

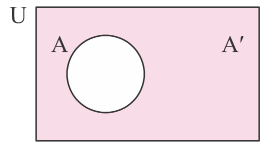
حل:

$$A=\{\{۵\},\{۵\},\{۵\}\}=\{\{۵\}\} \qquad P(A)=\{\varnothing,\{\{۵\}\}\}$$

$$P(P(A))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\{۵\}\}\},\{\varnothing,\{\{۵\}\}\}\}$$

مجموعهٔ مرجع (مجموعهٔ جهانی): مجموعه‌ای که حاوی تمام مجموعه‌های دیگر باشد، به عبارت دیگر همهٔ مجموعه‌های مورد بحث زیرمجموعهٔ آن باشند، مجموعهٔ مرجع (جهانی) نامیده می‌شود که آن را با M یا U نشان می‌دهند.

متمم یک مجموعه: متمم مجموعهٔ A که آن را با A' نشان می‌دهیم، مجموعه‌ای است که عضوهای آن در مجموعهٔ مرجع باشد ولی در A نباشد.



$A'=\{x \mid x\in U\ ,\ x\notin A\}$

مثال ۱۳: اگر $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $A=\{۲,۳,۴\}$ باشند، A' را مشخص کنید.

حل: $A'=\{۱,۵,۶\}$

مثال ۱۴: اگر $U=\mathbb{Z}$ و $B=\{۲x \mid x\in\mathbb{Z}\}$ باشند B' را مشخص کنید.

حل: $B'=\{۲x+۱ \mid x\in\mathbb{Z}\}$

مثال ۱۵: اگر $U=\{۳x \mid x\in\mathbb{Z}\}$ و $A=\{۶x \mid x\in\mathbb{Z}\}$ باشند A' را مشخص کنید.

حل: عضوهای A' مضرب ۳ هستند ولی مضرب ۶ نیستند. $A'=\{\cdots,-۱۵,-۹,-۳,۳,۹,۱۵,\cdots\}=\{۶x-۳ \mid x\in\mathbb{Z}\}$

مثال ۱۶: اگر $U=\{x \mid -۱۷<x<۹\}$ و $B=\{x \mid -۴<x<۹\}$ باشند B' را مشخص کنید.

حل: $B'=\{x \mid -۱۷<x\le -۴\}$

مثال ۱۷: اگر $U=\{x \mid x\ge -۱۲\}$ و $C=\{x \mid x\ge ۳۵\}$ باشند C' را مشخص کنید.

حل: $C'=\{x \mid -۱۲\le x<۳۵\}$

قضیه: اگر $A\subseteq B$ باشد، ثابت کنید $B'\subseteq A'$.

برهان: فرض می‌کنیم x عضو دلخواهی از B' باشد. بنابراین می‌توان گفت x عضو مجموعهٔ B نیست. با توجه به فرض نتیجه می‌شود x عضو A هم نیست پس عضو A' است. در واقع نشان دادیم هر عضو B' عضو A' نیز هست پس $B'\subseteq A'$.

$$x\in B'\Rightarrow x\notin B\overset{ف}{\Rightarrow} x\notin A\Rightarrow x\in A'$$

قضیه: ثابت کنید اگر دو مجموعه مساوی باشند متمم‌های آن دو مجموعه نیز مساویند.

برهان: فرض می‌کنیم $A=B$ و نشان می‌دهیم $A'=B'$.

$$A=B\Rightarrow (A\subseteq B\ ,\ B\subseteq A)\Rightarrow (B'\subseteq A'\ ,\ A'\subseteq B')\Rightarrow A'=B'$$

قضیه: ثابت کنید متمم متمم هر مجموعه با خودش مساوی است.

برهان: $(A')'=\{x \mid x\in U\ ,\ x\notin A'\}=\{x \mid x\in U\ ,\ x\in A\}=A$

روش دوم: $x\in (A')'\Leftrightarrow x\notin A'\Leftrightarrow x\in A$

در این روش نشان دادیم هر عضو $(A')'$ عضو A هست و بالعکس پس $(A')'=A$.

قضیه: ثابت کنید متمم مجموعهٔ مرجع مجموعهٔ تهی است.

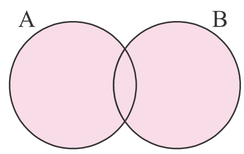
برهان: $U'=\{x \mid x\in U\ ,\ x\notin U\}=\varnothing$

قضیه: ثابت کنید $\varnothing'=U$.

برهان: $U'=\varnothing \Rightarrow (U')'=\varnothing' \Rightarrow U=\varnothing'$

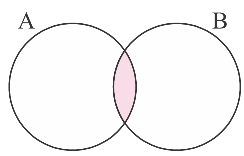
اعمال بر مجموعه‌ها

اجتماع:



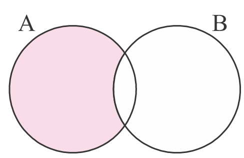
$A\bigcup B=\{x \mid x\in A \text{ یا } x\in B\}$

اشتراک:



$A\bigcap B=\{x \mid x\in A \text{ و } x\in B\}$

تفاضل:



$A-B=\{x \mid x\in A \text{ و } x\notin B\}$

مثال ۱۸: اگر $A=\{۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴\}$ و $B=\{۱۲,۱۳,۱۴,۱۵,۱۶\}$ باشند مجموعه‌های $A\bigcup B$، $A\bigcap B$ و $A-B$ را مشخص کنید.

حل:

$A\bigcup B=[۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۱۵,۱۶]$

$A\bigcap B=\{۱۲,۱۳,۱۴\}$ $\qquad$ $A-B=\{۱۰,۱۱\}$

مثال ۱۹: اگر $A=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, -۲۰<x<۱۵\}$ و $B=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, -۱۴\le x<۲۵\}$ باشند، $A\bigcup B$، $A\bigcap B$ و $A-B$ را مشخص کنید.

حل:

$A\bigcup B=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, -۲۰<x<۲۵\}$

$A\bigcap B=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, -۱۴\le x<۱۵\}$

$A-B=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, -۲۰<x<-۱۴\}$

نکته:

$A\subseteq A\bigcup B \qquad B\subseteq A\bigcup B$

$A\bigcap B\subseteq A \qquad A\bigcap B\subseteq B$

قضیه: اگر $A\subseteq B$ آنگاه $A\bigcup B=B$ و $A\bigcap B=A$.

نکته:

$A\cup A=A$ $\quad$ $A\cap A=A$

$A\cup\varnothing=A$ $\quad$ $A\cap\varnothing=\varnothing$

$A\cup U=U$ $\quad$ $A\cap U=A$

مثال ۲۰: اگر $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ و $A=\{۵,۶,۷\}$ باشد، نشان دهید $A\cup A'=U$ و $A\cap A'=\varnothing$.

حل:

$A'=\{۱,۲,۳,۴\}$

$A\cup A'=\{۵,۶,۷\}\cup\{۱,۲,۳,۴\}=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$

$A\cap A'=\{۵,۶,۷\}\cap\{۱,۲,۳,۴\}=\varnothing$

به طور کلی $A\cup A'=U$ و $A\cap A'=\varnothing$ می‌باشد.

مثال ۲۱: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $(A\cap U')'\cap(\varnothing'\cup A)'$ $\qquad$ ب) $(A\cup A')'\cup(A\cap A')'$

حل:

الف) $(A\cap U')'\cap(\varnothing'\cup A)'=(A\cap\varnothing)'\cap(U\cup A)'=\varnothing'\cap U'=U\cap\varnothing=\varnothing$

ب) $(A\cup A')'\cup(A\cap A')'=U'\cup\varnothing'=\varnothing\cup U=U$

دو مجموعهٔ جدا از هم: دو مجموعه که هیچ عضو مشترکی نداشته باشد، دو مجموعهٔ جدا از هم نامیده می‌شود. مانند مجموعهٔ اعداد فرد و مجموعهٔ اعداد زوج.

خواص اجتماع و اشتراک

۱- خاصیت جابجایی: $A\cap B=B\cap A$ $\qquad$ $A\cup B=B\cup A$

۲- خاصیت شرکت‌پذیری: $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ $\qquad$ $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

۳- خاصیت پخشی (توزیع‌پذیری): $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ $\qquad$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

۴- قوانین دمرگان: $(A\cap B)'=A'\cup B'$ $\qquad$ $(A\cup B)'=A'\cap B'$

۵- قوانین جذب: $A\cap(A\cup B)=A$ $\qquad$ $A\cup(A\cap B)=A$

اثبات:

$A\cup(A\cap B)=(A\cap U)\cup(A\cap B)=A\cap(U\cup B)=A\cap U=A$

مثال ۲۲: اگر $U=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ و $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{b,c,d,e\}$ باشد، درستی قوانین دمرگان را نشان دهید.

حل:

$A'=\{d,e,f,g\}$ $\qquad$ $B'=\{a,f,g\}$

$A\cup B=\{a,b,c,d,e\}\Rightarrow(A\cup B)'=\{f,g\}$

$A'\cap B'=\{f,g\}$

ملاحظه می‌شود $(A\bigcup B)'=A'\bigcap B'$.

$$A\bigcap B=\{b,c\}\Rightarrow (A\bigcap B)'=\{a,d,e,f,g\}$$
$$A'\bigcup B'=\{a,d,e,f,g\}$$

ملاحظه می‌شود $(A\bigcap B)'=A'\bigcup B'$.

مثال ۲۳: اگر $U=\{x\,|\,x>-۹\}$ و $A'\bigcup B=\{x\,|\,x>۱۳\}$ باشند، مجموعهٔ $A\bigcap B'$ را مشخص کنید.

حل:

$$A\bigcap B'=(A'\bigcup B)'=\{x\,|\,-۹<x\le ۱۳\}$$

مثال ۲۴: ثابت کنید $(A'\bigcap B)\bigcap(A\bigcap B')=\varnothing$.

حل:

$$(A'\bigcap B)\bigcap(A\bigcap B')=(A'\bigcap A)\bigcap(B\bigcap B')=\varnothing\bigcap\varnothing=\varnothing$$

مثال ۲۵: ثابت کنید $B\bigcup(A\bigcup B')'=B$.

حل:

$$B\bigcup(A\bigcup B')'=B\bigcup(A'\bigcap B)=B$$

نکته: اگر $A=B$ آنگاه $A\bigcup C=B\bigcup C$ و $A\bigcap C=B\bigcap C$.

مثال ۲۶: اگر $A\bigcap C=B\bigcap C$ باشد آیا می‌توان گفت $A=B$؟ چرا؟

حل: خیر.

$A=\{a,b,c,d\}$ $\quad B=\{c,d,e\}$ $\quad C=\{c,d,f\}$

$A\bigcap C=\{c,d\}$ $\quad B\bigcap C=\{c,d\}$

ملاحظه می‌شود $A\bigcap C=B\bigcap C$ ولی $A\neq B$.

مثال ۲۷: اگر A و B دو مجموعهٔ جدا از هم باشند، ثابت کنید $A\subset B'$.

حل:

$$A\bigcap B=\varnothing\Rightarrow (A\bigcap B)\bigcup B'=\varnothing\bigcup B'\Rightarrow (A\bigcup B')\bigcap(B\bigcup B')=B'$$
$$(A\bigcup B')\bigcap U=B'\Rightarrow A\bigcup B'=B'\Rightarrow A\subset B'$$

نکته: $A-B\subseteq A$ و $B-A\subseteq B$.

قضیه: ثابت کنید $A-B=A\bigcap B'$.

برهان:

$$A-B=\{x\,|\,x\in A,x\notin B\}=\{x\,|\,x\in A,x\in B'\}=A\bigcap B'$$

مثال ۲۸: درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $A-A=\varnothing$

ب) $A-\varnothing=A$

ج) $\varnothing-A=\varnothing$

د) $U-A=A'$

هـ) $A-U=\varnothing$

و) $A-A'=A$

حل:

الف) $A-A=A\cap A'=\varnothing$
ب) $A-\varnothing=A\cap\varnothing'=A\cap U=A$
ج) $\varnothing-A=\varnothing\cap A'=\varnothing$
د) $U-A=U\cap A'=A'$
هـ) $A-U=A\cap U'=A\cap\varnothing=\varnothing$
و) $A-A'=A\cap(A')'=A\cap A=A$

مثال ۲۹: درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $A-(A\cap B)=A-B$
ب) $A-(B-A)=A$

حل:

الف) $A-(A\cap B)=A\cap(A\cap B)'=A\cap(A'\cup B')=(A\cap A')\cup(A\cap B')=\varnothing\cup(A\cap B')$
$=A\cap B'=A-B$

ب) $A-(B-A)=A-(B\cap A')=A\cap(B\cap A')'=A\cap(B'\cup A)=A$

مثال ۳۰: ثابت کنید اگر $A\subseteq B$ آنگاه $A-B=\varnothing$ و بالعکس.

حل:

$$A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=A\Rightarrow(A\cap B)\cap B'=A\cap B'\Rightarrow A\cap(B\cap B')=A-B$$
$$A\cap\varnothing=A-B\Rightarrow\varnothing=A-B$$

بالعکس:

$$A-B=\varnothing\Rightarrow A\cap B'=\varnothing\Rightarrow B\cup(A\cap B')=B\cup\varnothing\Rightarrow(B\cup A)\cap(B\cup B')=B$$
$$(A\cup B)\cap U=B\Rightarrow A\cup B=B\Rightarrow A\subseteq B$$

مثال ۳۱: ثابت کنید اگر A و B دو مجموعهٔ جدا از هم باشند آنگاه $A-B=A$ و بالعکس.

حل: فرض می‌کنیم $A\cap B=\varnothing$.

$$A-B=(A-B)\cup\varnothing=(A\cap B')\cup(A\cap B)=A\cap(B\cup B')=A\cap U=A$$

بالعکس:

$$A-B=A\Rightarrow B\cap(A-B)=B\cap A\Rightarrow B\cap(A\cap B')=A\cap B\Rightarrow(B\cap B')\cap A=A\cap B$$
$$\varnothing\cap A=A\cap B\Rightarrow\varnothing=A\cap B$$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی: مجموعه‌ای که تعداد عضوهای آن یک عدد حسابی باشد مجموعهٔ متناهی نامیده می‌شود.

مجموعه‌ای که بیشمار عضو داشته باشد مجموعه‌ای نامتناهی نامیده می‌شود.

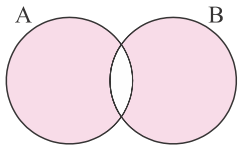
مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های عدد ۲۴، مجموعه اعداد زوج سه‌رقمی و مجموعهٔ درختان روی زمین مثال‌هایی از مجموعهٔ متناهی می‌باشند. همچنین مجموعه اعداد طبیعی زوج، مجموعه اعداد حقیقی بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ و مجموعهٔ مضارب عدد ۷ مثال‌هایی از مجموعهٔ نامتناهی می‌باشند.

مثال ۳۲: کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

$B=\left\{۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\cdots\right\}$
$A=\left\{۱,۲,۳,\cdots,۱۰^{۱۰۰۰}\right\}$
$D=\left(\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۵}\right)$
$C=(-\infty,۸]$

حل: مجموعهٔ A متناهی و سه مجموعهٔ دیگر نامتناهی است.

تفاضل متقارن: تفاضل متقارن دو مجموعهٔ A و B را که به صورت $A\Delta B$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:



$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$$

مثال ۳۳: درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $A\Delta A=\varnothing$

ب) $A\Delta\varnothing=A$

ج) $A\Delta U=A'$

د) $A\Delta A'=U$

حل:

الف) $A\Delta A=(A-A)\cup(A-A)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$

ب) $A\Delta\varnothing=(A-\varnothing)\cup(\varnothing-A)=A\cup\varnothing=A$

ج) $A\Delta U=(A-U)\cup(U-A)=\varnothing\cup A'=A'$

د) $A\Delta A'=(A-A')\cup(A'-A)=A\cup A'=U$

مجموعه‌های اعداد: با مجموعه‌های اعداد در سال‌های گذشته آشنا شده‌اید که در این بخش به معرفی آن‌ها اکتفا می‌کنیم.

مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,\cdots\}$

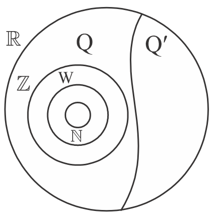
مجموعهٔ اعداد حسابی $\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,\cdots\}$

مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}=\{\cdots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\cdots\}$

مجموعهٔ اعداد گویا $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{Z},b\neq ۰\right\}$

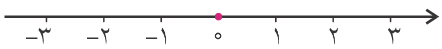
مجموعهٔ اعداد گنگ $\mathbb{Q}'=\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\{x\mid x\in\mathbb{R},x\notin\mathbb{Q}\}$

مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

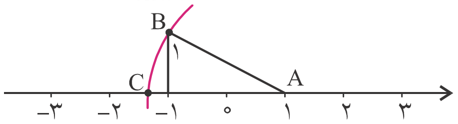


$$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$$
$$\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}$$
$$\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\varnothing$$

مجموعهٔ اعداد حقیقی را می‌توان با نقاط واقع بر روی یک محور متناظر دانست یعنی هر نقطهٔ واقع بر محور اعداد حقیقی متناظر یک عدد حقیقی است و هر عدد حقیقی نیز جایگاهی روی محور دارد.



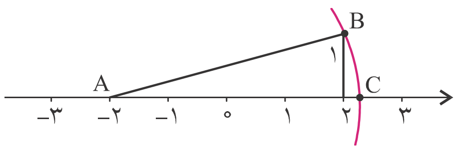
مثال ۳۴: نقطهٔ نظیر عدد $۱-\sqrt{۵}$ را روی محور اعداد حقیقی مشخص کنید.



حل: $AB=\sqrt{۲^۲+۱^۲}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$

نقطهٔ C نمایش عدد $۱-\sqrt{۵}$ است.

مثال ۳۵: در شکل زیر نقطهٔ C نمایش کدام عدد حقیقی است؟



حل:

$AB=\sqrt{۴^۲+۱^۲}=\sqrt{۱۶+۱}=\sqrt{۱۷}\Rightarrow AC=\sqrt{۱۷}$

نقطهٔ C جایگاه عدد $-۲+\sqrt{۱۷}$ یا $\sqrt{۱۷}-۲$ روی محور است.

مثال ۳۶: اگر a عددی گویا و b عددی گنگ باشد ثابت کنید $a+b$ گنگ است.

حل: فرض می کنیم $a+b=c$ و $c\in\mathbb{Q}$.

$a+b=c\Rightarrow b=c-a$

در این تساوی c و a گویا می‌باشند پس $c-a$ گویا، در نتیجه b هم گویا است که خلاف فرض است. پس فرض $a+b$ گویاست نادرست است لذا $a+b$ گنگ است.

مثال ۳۷: اگر $a\neq ۰$ و a عددی گویا و b عددی گنگ باشد ثابت کنید ab گنگ است.

حل: فرض می‌کنیم $ab=c$ عددی گویا باشد.

$ab=c\Rightarrow b=\frac{c}{a}$

با توجه به اینکه $a\neq ۰$ است پس $\frac{c}{a}$ گویا در نتیجه b نیز گویا است. بنابراین فرض اینکه ab گویاست باطل و ab گنگ است.

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد قرینهٔ هر عدد گنگ، گنگ است. همچنین معکوس هر عدد گنگ، گنگ است.

مثال ۳۸: به ازای چه مقداری از k عدد $\frac{\sqrt{۵}+۳}{۳\sqrt{۵}+k}$ عددی گویا است؟

حل: در صورتی عبارت فوق گویا می‌شود که عبارت‌های رادیکالی حذف شوند. اگر به جای k عدد ۹ را قرار دهیم مخرج سه برابر صورت می‌شود.

$$\frac{\sqrt{۵}+۳}{۳\sqrt{۵}+۹}=\frac{\sqrt{۵}+۳}{۳(\sqrt{۵}+۳)}=\frac{۱}{۳}\in\mathbb{Q}$$

مثال ۳۹: اعداد $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{\sqrt{۱۰}}$ و $\sqrt{\sqrt{\sqrt{۸۰}}}$ را به صورت صعودی مرتب کنید.

حل:

$$(\sqrt{\sqrt{\sqrt{۸۰}}})^۴=(\sqrt{\sqrt{۸۰}})^۲=\sqrt{۸۰} \qquad (\sqrt{\sqrt{۱۰}})^۴=(\sqrt{۱۰})^۲=۱۰ \qquad (\sqrt{۳})^۴=۳^۲=۹$$

$$\sqrt{۸۰}<۹<۱۰\Rightarrow\sqrt{\sqrt{\sqrt{۸۰}}}<\sqrt{۳}<\sqrt{\sqrt{۱۰}}$$

مثال ۴۰: به ازای چند مقدار صحیح x عبارت $\sqrt{۱۲۵-\sqrt{x}}$ عددی صحیح می‌شود؟

حل:

$$۱۲۵-\sqrt{x}=k^۲ \qquad k\in\mathbb{Z}$$

$$۱۲۵-k^۲=\sqrt{x}\Rightarrow ۱۲۵-k^۲\geq ۰\Rightarrow ۱۲۵\geq k^۲$$

به جای k اعداد ۰ تا ۱۱ را می‌توان قرار داد که تعداد آن‌ها ۱۲ تا می‌شود.

بازه: زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص باشد را بازه یا فاصله می‌نامند. مانند اعداد حقیقی بین ۵− و ۳.

$$A=\{x\mid x\in\mathbb{R},-۵<x<۳\}$$

اگر بازه شامل اعداد ابتدا و انتهایش باشد، بازه را بازهٔ بسته می‌نامند و اگر شامل اعداد ابتدا و انتهایش نباشد، بازهٔ باز نامیده می‌شود.

بازهٔ بسته 

$A=\{x\mid x\in\mathbb{R},-۴\leq x\leq ۳\}=[-۴,۳]$

بازهٔ باز 

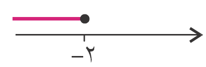
$B=\{x\mid x\in\mathbb{R},-۴<x<۳\}=(-۴,۳)$

بازهٔ نیم‌باز 

$C=\{x\mid x\in\mathbb{R},-۴\leq x<۳\}=[-۴,۳)$

بازهٔ باز 

$D=\{x\mid x\in\mathbb{R},x>-۲\}=(-۲,+\infty)$

بازهٔ نیم‌باز 

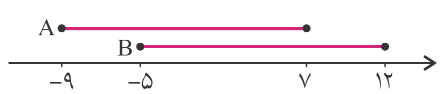
$E=\{x\mid x\in\mathbb{R},x\leq -۲\}=(-\infty,-۲]$

مثال ۱۱: بازهٔ $[-\sqrt{۱۸},\sqrt{۱۸}]$ چند عضو صحیح دارد؟

حل: اعداد صحیح از ۴− تا ۴+ عضو بازه می‌باشند که تعداد آن‌ها برابر ۹ می‌باشد.

مثال ۱۲: اگر $A=[-۹,۷]$ و $B=[-۵,۱۲]$ باشد، $A\cup B$ و $A\cap B$ و $A-B$ را مشخص کنید.

حل:



$A\cup B=[-۹,۱۲]$

$A\cap B=[-۵,۷]$

$A-B=[-۹,-۵)$

مثال ۱۳: اگر $A=[-۱۳,۱۹]$ و $B=(-۸,۱۲)$ باشد، مجموعه‌های $A\cup B$، $A\cap B$، $A-B$ و $B-A$ را مشخص کنید.

حل:

$A\cup B=[-۱۳,۱۹]=A$

$A\cap B=(-۸,۱۲)=B$

$A-B=[-۱۳,-۸]\cup[۱۲,۱۹]$

$B-A=\varnothing$

مثال ۱۴: مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی به جز عدد ۵ را به صورت بازه بنویسید.

حل:

$(-\infty,۵)\cup(۵,+\infty)$

مثال ۱۵: مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی به جز اعداد ۷− و ۲ را به صورت بازه بنویسید.

حل:

$(-\infty,-۷)\cup(-۷,۲)\cup(۲,+\infty)$

مثال ۱۴۶: اگر $A=[-۱۵,+\infty)$ و $B=(-\infty,۸)$ باشد مجموعه‌های $A\cup B$ ، $A\cap B$ ، $A-B$ و $B-A$ را مشخص کنید.

حل:

$A\cup B=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

$A\cap B=[-۱۵,۸)$

$A-B=[۸,+\infty)$

$B-A=(-\infty,-۱۵)$

مثال ۱۴۷: اگر $A_۱=(۱,+\infty)$ و $A_۲=(۲,+\infty)$ و $\cdots$ و $A_n=(n,+\infty)$ ، مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $A_۱\cup A_۲\cup\cdots\cup A_{۲۰}$ ب) $A_۱\cap A_۲\cap\cdots\cap A_{۲۰}$

حل:

$A_n\subset\cdots\subset A_۳\subset A_۲\subset A_۱$

الف) $A_۱\cup A_۲\cup\cdots\cup A_{۲۰}=A_۱$

ب) $A_۱\cap A_۲\cap\cdots\cap A_{۲۰}=A_{۲۰}$

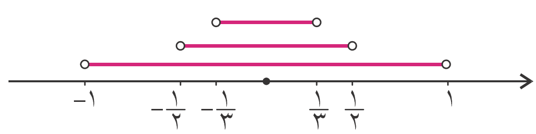
مثال ۱۴۸: اگر $A_n=\left(-\frac{۱}{n},\frac{۱}{n}\right)$ و n عددی طبیعی باشد، حاصل $\bigcap_{k=۱}^{۲۰}A_k$ را به دست آورید.

حل:

$A_۱=(-۱,۱)\quad,\quad A_۲=\left(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$

$A_۳=\left(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳}\right)\quad,\quad A_{۲۰}=\left(-\frac{۱}{۲۰},\frac{۱}{۲۰}\right)$

$\bigcap_{k=۱}^{۲۰}A_k=A_۱\cap A_۲\cap A_۳\cap\cdots\cap A_{۲۰}=(-۱,۱)=A_۱$



عدد اصلی یک مجموعه: در یک مجموعهٔ متناهی تعداد عضوهای مجموعه را عدد اصلی مجموعه می‌نامند. عدد اصلی مجموعهٔ A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم.

عدد اصلی اجتماع دو مجموعه

دو مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۵,۶,۷\}$ را در نظر بگیرید.

$n(A)=۴ \qquad n(B)=۳$

$A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}\Rightarrow n(A\cup B)=۷$

ملاحظه می‌کنیم $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$.

آیا این تساوی همواره درست است؟ برای پاسخ به سؤال دو مجموعهٔ C و D را در نظر بگیرید.

$C=\{۵,۶,۷,۸\} \qquad D=\{۷,۸,۹\}$

$n(C)=۴ \qquad n(D)=۳$

$C\cup D=\{۵,۶,۷,۸,۹\}\Rightarrow n(C\cup D)=۵$

$n(C\cup D)=۵\neq ۴+۳$

بنابراین جواب پرسش قبلی منفی است اما با توجه به اینکه دو مجموعهٔ C و D، ۲ عضو مشترک دارند می‌توان گفت:

$$\boxed{n(C\cup D)=n(C)+n(D)-n(C\cap D)}$$
$$۵ \quad = \quad ۴ \quad + \quad ۳ \quad - \quad ۲$$

مثال ۴۹: در یک کلاس ۳۰ نفره ۲۴ نفر به فوتبال و ۱۶ نفر به والیبال علاقه‌مندند. در صورتی که هر دانش‌آموز کلاس لااقل به یکی از این دو ورزش علاقه‌مند باشد، چند نفر به هر دو ورزش علاقه‌مندند؟ چند نفر فقط به فوتبال علاقه دارند؟

حل:

$n(F\cup V)=۳۰ \qquad n(F)=۲۴ \qquad n(V)=۱۶$

$n(F\cup V)=n(F)+n(V)-n(F\cap V)$

$۳۰=۲۴+۱۶-n(F\cap V)\Rightarrow n(F\cap V)=۲۴+۱۶-۳۰=۱۰$

فقط به فوتبال علاقه‌مندند $۲۴-۱۰=۱۴$

مثال ۵۰: در میان اعداد ۱ تا ۲۰۰ چند عدد بر ۲ یا بر ۳ بخش‌پذیرند؟

حل: مجموعهٔ اعدادی را که بر ۲ بخش‌پذیرند را A و مجموعهٔ اعدادی که بر ۳ بخش‌پذیرند را B می‌نامیم.

$$\begin{array}{r|l} ۲۰۰ & ۶ \\ \cline{2-2} \underline{۱۸} & ۳۳ \\ ۲۰ & \\ \underline{۱۸} & \\ ۲ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۲۰۰ & ۲ \\ \cline{2-2} \underline{۲۰۰} & ۱۰۰ \\ ۰ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۲۰۰ & ۳ \\ \cline{2-2} \underline{۱۸} & ۶۶ \\ ۲۰ & \\ \underline{۱۸} & \\ ۲ & \end{array}$$

$n(A)=۱۰۰ \qquad n(B)=۶۶ \qquad n(A\cap B)=۳۳$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=۱۰۰+۶۶-۳۳=۱۳۳$

مثال ۵۱: اگر A و B و C سه مجموعهٔ دلخواه باشند ثابت کنید:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

حل:

$n(A\cup B\cup C)=n[A\cup(B\cup C)]=n(A)+n(B\cup C)-n[A\cap(B\cup C)]$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(B\cap C)-n[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(B\cap C)-[n(A\cap B)+n(A\cap C)-n(A\cap B\cap C)]$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(B\cap C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

مثال ۵۲: در یک کلاس ۳۵ نفره همهٔ دانش‌آموزان به یکی از دروس ریاضی، فیزیک یا شیمی علاقه‌مندند. برای مسابقات علمی ۱۶ نفر ریاضی، ۱۵ نفر فیزیک و ۱۲ نفر شیمی را انتخاب کردند. اگر ۶ نفر ریاضی و فیزیک، ۷ نفر ریاضی و شیمی و ۴ نفر فیزیک و شیمی را انتخاب کرده باشند چند نفر هر سه رشته را انتخاب کرده‌اند؟ چند نفر فقط ریاضی را انتخاب کرده‌اند؟