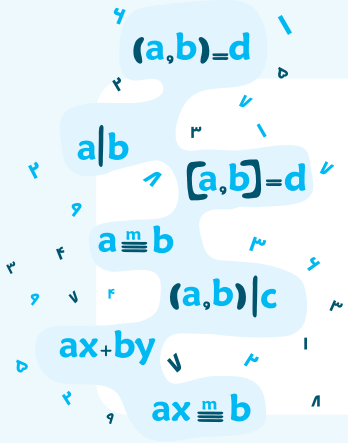
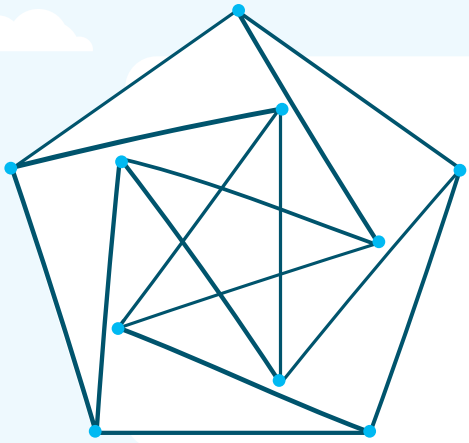
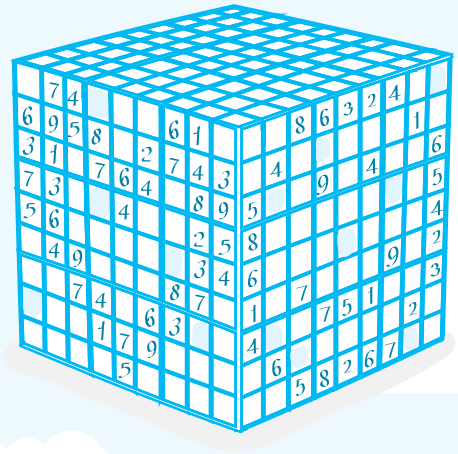
فهرست







فصل اول

آشنایی با نظریهٔ اعداد

$(a,b)=d$

$a|b$

$[a,b]=d$

$a \overset{m}{\equiv} b$

$(a,b)|c$

$ax+by$

$ax \overset{m}{\equiv} b$

هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

درس سوم

مفهوم هم‌نهشتی و ویژگی‌ها

۱۷۰- کدام دو عدد در هم‌نهشتی $a \overset{17}{\equiv} b$ صادق‌اند؟

۱) ۲ و ۳۲۱ ۲) ۱۲۶- و ۱۶۳ ۳) ۲۲۰ و ۸۷ ۴) ۷۸ و ۱۷

۱۷۱- اگر m یک عدد دورقمی و $73 \overset{m}{\equiv} 164$ باشد، چند مقدار برای m وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۷۲- به ازای چند مقدار صحیح a، رابطهٔ $a - 29 \overset{a+2}{\equiv} a + 5$ برقرار است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۷۳- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عددهای ۶۸ و ۱۴۵ بر عدد دورقمی m، دو عدد مساوی باشند، باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۶۰ بر m کدام است؟

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۱

۱۷۴- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد A بر ۳۷ برابر ۲۳ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $2A - 3$ بر ۳۷ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۷ ۳) ۲۰ ۴) ۲۶

۱۷۵- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۳ برابر ۱۲ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^3 - 2a + 1$ بر ۱۳ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۷۶- باقی‌ماندهٔ تقسیم a و b بر ۸، برابر ۳ و باقی‌ماندهٔ تقسیم c بر ۸، برابر ۴ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $ac + bc$ بر ۸ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۷۷- اگر $a - b \overset{5}{\equiv} 2$ و $ab \overset{5}{\equiv} 3$ باشند، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^2 + b^2$ بر ۵ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۷۸- باقی‌ماندهٔ تقسیم !۸ بر ۱۳ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۷۹- باقی‌ماندهٔ تقسیم !۱۰ بر ۱۱ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸۰- باقی‌ماندهٔ تقسیم $8! + 16! + 23! + 24!$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۱۸۱- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = 1! + 2! + 3! + \cdots + 100!$ بر ۱۲ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۹ ۴) ۱۴

۱۸۲- باقی‌ماندهٔ تقسیم $A = 1! + 3! + 5! + \cdots + 19!$ بر ۲۰ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

۱۸۳- اگر عدد طبیعی a و ۷ نسبت به هم اول باشند، باقی‌ماندهٔ تقسیم a^6 بر ۷ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۱ یا ۳

۱۸۴- یک عدد مربع کامل به کدام صورت، قابل نوشتن نیست؟

۱) $8k + 4$ ۲) $7k - 2$ ۳) $5k + 4$ ۴) $4k + 1$

۱۸۵- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۹۹ برابر ۲۵ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۹ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۴

۱۸۶- باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۸ برابر ۵ و باقی‌ماندهٔ تقسیم b بر ۲۴ برابر ۷ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^{10} - 3b^2$ بر ۶ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۸۷- در رابطهٔ هم‌نهشتی $R = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Z}, 7 \mid x-y\}$، عدد ۳۹ با کدام عدد داده‌شده در یک کلاس هم‌نهشتی قرار دارد؟

۱) ۹۵ ۲) ۹۶ ۳) ۹۷ ۴) ۹۸

۱۸۸- یک رابطهٔ هم‌نهشتی، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را به ۵ کلاس هم‌نهشتی افراز کرده است. کدام دو عدد در یک کلاس هم‌نهشتی قرار دارند؟

۱) ۲۵ و ۷ ۲) ۳۱ و ۳ ۳) ۳۷ و ۱ ۴) ۳۷ و ۱۲

۱۸۹- عدد ۲۰۹- به کدام دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۲ تعلق دارد؟

۱) $[9]$ ۲) $[7]$ ۳) $[-7]$ ۴) $[-9]$

۱۹۰- اگر p یک عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، در کدام پیمانه، همواره کلاس‌های هم‌نهشتی $[p^2]$ و $[1]$ برابر نیستند؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۱۹۱- مجموعهٔ اعداد طبیعی را به سه مجموعهٔ A، B و C افراز کرده‌ایم. اگر $A=\{n : n=7k+2 , k\in\mathbb{N}\}$ و $B=\{n : n=7k-3 , k\in\mathbb{N}\}$، کدام دو عدد به یک مجموعهٔ حاصل از این افراز، تعلق دارند؟

۱) ۱۳ و ۲۱ ۲) ۱۳ و ۲۳ ۳) ۲۱ و ۳۲ ۴) ۲۳ و ۳۲

۱۹۲- در هم‌نهشتی به پیمانهٔ m، سه عدد a، ۴۱ و ۱۳۲ در یک کلاس هم‌نهشتی قرار دارند. کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی a به طوری‌که مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به تعداد کم‌تری کلاس هم‌نهشتی افراز شود، کدام است؟

۱) ۱۰۲ ۲) ۱۰۳ ۳) ۱۰۴ ۴) ۱۰۶

۱۹۳- از رابطهٔ هم‌نهشتی (پیمانهٔ ۸۴) $36a \equiv 192$، کدام نتیجه‌گیری به پیمانهٔ ۷ نادرست است؟

۱) $a \equiv 3$ ۲) $a \equiv 4$ ۳) $2a \equiv -1$ ۴) $3a \equiv 2$

۱۹۴- از رابطهٔ هم‌نهشتی $15a \overset{30}{\equiv} 20b$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $3a \overset{30}{\equiv} 4b$ ۲) $3a \overset{6}{\equiv} 4b$ ۳) $b \overset{3}{\equiv} 0$ ۴) $a \overset{2}{\equiv} 0$

۱۹۵- از رابطهٔ هم‌نهشتی $9a \overset{18}{\equiv} 6b$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $a \overset{2}{\equiv} 0$ ۲) $b \overset{3}{\equiv} 0$ ۳) $a \overset{6}{\equiv} 2$ ۴) $3a \overset{6}{\equiv} 2b$

۱۹۶- اگر $a^3 - a^2 - a + 1 \overset{m}{\equiv} a^2 - 1$ و $(a^2-1, m) = 1$، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $m \mid a-2$ ۲) $m \mid a-1$ ۳) $m \mid a+1$ ۴) $m \mid a+2$

۱۹۷- از رابطهٔ هم‌نهشتی $12a \overset{9}{\equiv} 18b$، کدام نتیجه‌گیری به پیمانهٔ ۳ نادرست است؟

۱) $2a \equiv 3b$ ۲) $4a \equiv 6b$ ۳) $a \equiv 0$ ۴) $b \equiv 2$

۱۹۸- از رابطهٔ هم‌نهشتی (پیمانهٔ ۹) $18a \equiv 12b$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $a \equiv 0$ (پیمانهٔ ۲) ۲) $b \equiv 0$ (پیمانهٔ ۳) ۳) $3a \equiv b$ (پیمانهٔ ۳) ۴) $3a \equiv 2b$ (پیمانهٔ ۳)

۱۹۹- اگر سال نو با پنج‌شنبه آغاز شود، ۱۹ آذر در آن سال چه روزی است؟

۱) یک‌شنبه ۲) دوشنبه ۳) سه‌شنبه ۴) چهارشنبه

۲۰۰- بیست‌وهفتم اردیبهشت، روز سه‌شنبه است. سومین شنبه در ماه اردیبهشت، کدام روز این ماه است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

۲۰۱- اگر ۲۵ اردیبهشت‌ماه سالی شنبه باشد، آخرین شنبهٔ آبان‌ماه در آن سال، چندمین روز آبان است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۵ ۳) ۲۹ ۴) ۳۰

۲۰۲- اکنون ساعت ۲۳ روز سه‌شنبه، هفتم شهریور است. ۱۰۰۰ ساعت بعد، چه روزی و چه ساعتی است؟

۱) ساعت ۱۷ دوشنبه ۱۷ مهر ۲) ساعت ۱۷ سه‌شنبه ۲۵ مهر

۳) ساعت ۱۶ دوشنبه ۲۴ مهر ۴) ساعت ۱۵ سه‌شنبه ۱۸ مهر

۲۰۳- ۲۲ بهمن‌ماه سالی دوشنبه بود. ۲۰ شهریورماه در آن سال، چندشنبه بوده است؟

۱) یک‌شنبه ۲) دوشنبه ۳) سه‌شنبه ۴) چهارشنبه

۲۰۴- از انتهای کمان 305° در دایرهٔ مثلثاتی به اندازهٔ 3285° در خلاف جهت دایرهٔ مثلثاتی حرکت می‌کنیم. انتهای کمان حاصل، مربوط به کمان چند درجه است؟

۱) 270° ۲) 260° ۳) 350° ۴) 290°

۲۰۵- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر ۹ و ۷ به ترتیب ۵ و ۶ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۶۳ چگونه است؟

۱) عدد اول ۲) مضرب ۲ ۳) مضرب ۳ ۴) مضرب ۵

۲۰۶- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی a بر ۲۹، برابر ۱۲ و $a+17$ مضرب ۲۱ باشد، رقم وسط کوچک‌ترین عدد a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۲۰۷- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی A بر عدد ۲۳، برابر ۵ و باقی‌ماندهٔ تقسیم دوبرابر عدد A بر ۱۷ برابر ۹ می‌باشد. باقی‌ماندهٔ تقسیم بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی A بر عدد ۱۲ کدام است؟ داخل ۹۷

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۰۸- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی N بر ۳۱، برابر ۲۶ است. اگر این عدد را بر ۴۳ تقسیم کنیم، باقی‌مانده برابر خارج‌قسمت می‌شود. رقم یکان عدد بزرگ‌تر N کدام است؟ داخل ۹۵

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۰۹- اگر $6a \overset{84}{\equiv} 3b$ و $6b \overset{72}{\equiv} 18c$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $2a \overset{4}{\equiv} -c$ ۲) $2a \overset{28}{\equiv} b$ ۳) $a \overset{8}{\equiv} 2c$ ۴) $b \overset{12}{\equiv} 3c$

۲۱۰- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۱۲، ۱۵ و ۳۲ به‌ترتیب برابر ۵، ۸ و ۲۵ است. مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد a کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۲۱۱- باقی‌ماندهٔ تقسیم عددی بر اعداد ۱۱، ۱۴ و ۱۵ به‌ترتیب ۵، ۸ و ۹ می‌باشد. کوچک‌ترین مقدار ممکن برای این عدد، مضرب کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۸ ۳) ۴۲ ۴) ۴۵

۲۱۲- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی A بر اعداد ۵، ۷ و ۱۱ به‌ترتیب ۲، ۴ و ۸ می‌باشند. باقی‌ماندهٔ تقسیم بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی A بر عدد ۲۳ کدام است؟ خارج ۹۷

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۱۳- چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که مضرب ۱۱ بوده و باقی‌ماندهٔ تقسیم‌های آن بر دو عدد ۴ و ۵، برابر ۱ باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

معادلهٔ هم‌نهشتی

۲۱۴- معادلهٔ هم‌نهشتی $6x \overset{9}{\equiv} 2a+5$ در مجموعهٔ اعداد صحیح دارای جواب است. a کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳۷ ۲) ۳۹ ۳) ۴۱ ۴) ۴۳

۲۱۵- معادلهٔ هم‌نهشتی $42x \overset{15}{\equiv} 5a$ به ازای کدام مقدار a در مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

۲۱۶- به ازای چند عدد دورقمی n، معادلهٔ هم‌نهشتی $42x \overset{15}{\equiv} 5n-2$ در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب دارد؟

۱) ۲۷ ۲) ۳۰ ۳) ۱۸ ۴) ۱۵

۲۱۷- رقم یکان کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی a که در رابطهٔ هم‌نهشتی $13a \overset{9}{\equiv} 11$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱۸- معادلهٔ هم‌نهشتی $19x \overset{29}{\equiv} 1$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی دورقمی چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱۹- معادلهٔ هم‌نهشتی (پیمانهٔ ۳۱) $72x \equiv 1$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی سه‌رقمی چند جواب دارد؟

۱) ۲۹ ۲) ۳۰ ۳) ۳۲ ۴) ۳۳

۲۲۰- اگر $A = 1! + 3! + \cdots + 71!$ باشد، معادلهٔ $Ax \overset{7}{\equiv} 53$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی دورقمی چند جواب دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۲۲۱- در معادلهٔ هم‌نهشتی $(10!)x \overset{11}{\equiv} 3^{49}$، رقم یکان کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی x کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۶۴ ۳ **روش اول:** چون p یک عدد اول دورقمی است، پس مطمئناً ۲ و ۳ نیست و هم‌چنین مضرب ۲ و مضرب ۳ نیز نمی‌باشد، پس:

$$\begin{cases} p=2k+1 \Rightarrow p^2=8k+1 \Rightarrow p^2-1=8k \\ p=3k'\pm 1 \Rightarrow p^2=3k'+1 \Rightarrow p^2-1=3k' \end{cases} \xrightarrow{(3,8)=1} p^2-1=24q$$

واضح است که چون مضرب ۲۴ می‌باشد، پس می‌تواند مضرب ۱۲ و ۸ نیز باشد، اما مضرب ۱۶ نیست.

نتیجه اگر p یک عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، داریم:

$$\boxed{p>3 \Rightarrow p^2=24k+1}$$

اگر p یک عدد اول بزرگ‌تر از ۵ باشد، داریم:

$$\boxed{p>5 \Rightarrow p^4=240k+1}$$

روش دوم: فرض می‌کنیم $p=11$ باشد، پس $p^2-1=120$ می‌شود که مضرب ۸، ۱۲ و ۲۴ است ولی مضرب ۱۶ نیست.

۱۶۵ ۳ چون p و q اعداد اول بزرگ‌تر از ۵ هستند، پس $p^4=240k+1$ و $q^2=24k'+1$ است. بنابراین داریم:

$$p^4+5q^2-6=(240k+1)+5(24k'+1)-6=240k+120k'=120(2k+k')=120q$$

۱۶۶ ۴ کوچک‌ترین اعداد قابل پذیرش برای a و b، اعداد ۲ و ۶ هستند و اعداد قابل‌پذیرش بعدی اعداد ۲ و ۱۰ می‌باشند:

$$\begin{cases} \begin{cases} a=6 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow a^2-b^2=32 \\ \begin{cases} a=10 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow a^2-b^2=96 \end{cases} \Rightarrow (32,96)=32$$

۱۶۷ ۱ چون $(a,90)=1$ است، پس a نه مضرب ۲ است، نه مضرب ۳ و نه مضرب ۵، بنابراین اولین عدد قابل پذیرش که عبارت را صفر نکند عدد ۷ و عدد بعدی ۱۱ می‌باشد:

$$\begin{cases} a=7 \Rightarrow a^4-1=7^4-1=(49-1)(49+1)=2^5\times 3\times 5^2 \\ a=11 \Rightarrow a^4-1=11^4-1=(121-1)(121+1)=2^4\times 3\times 5\times 61 \end{cases} \Rightarrow d=2^4\times 3\times 5=240$$

۱۶۸ ۴ کوچک‌ترین عدد قابل پذیرش برای عبارت، $n=2$ و عدد قابل پذیرش بعدی $n=3$ است. بنابراین:

$$\begin{cases} n=2 \Rightarrow n^2(n^2-1)=12 \\ n=3 \Rightarrow n^2(n^2-1)=72 \end{cases} \Rightarrow (12,72)=12$$

۱۶۹ ۴

درسنامه

شناخت مربع کامل

۱- هیچ مربع کاملی به ارقام ۲، ۳، ۷، ۸ و یا تعداد فردی صفر ختم نمی‌شود.

۲- اگر رقم یکان مربع کاملی ۵ باشد، رقم دهگانش حتماً ۲ است.

۳- باقی‌ماندهٔ تقسیم هر مربع کاملی بر ۳ یا برابر صفر و یا برابر ۱ $(a^2=3k+1$ یا $a^2=3k)$ است.

۴- باقی‌ماندهٔ تقسیم هر مربع کاملی بر ۴ یا برابر صفر و یا برابر ۱ $(a^2=4k+1$ یا $a^2=4k)$ است.

⋮

توجه بعد از فراگیری هم‌نهشتی دلیل هر یک از نکات فوق را به راحتی می‌توانید بررسی کنید.

عدد ۶۳۹۶۲ به رقم ۲ ختم شده است، پس مربع کامل نیست. عدد ۵۳۴۷۵ رقم یکانش ۵ است ولی چون رقم دهگانش ۲ نیست، پس مربع کامل نمی‌باشد. عدد ۸۳۶۹۳ نیز به ۳ ختم شده است، پس مربع کامل نیست.

۱۷۰ ۲

درسنامه

هم‌نهشتی

دو عدد صحیح a و b را به پیمانهٔ عدد طبیعی m (یا به سنج m) هم‌نهشت می‌گوییم، هرگاه $m \mid a-b$. اگر a و b در پیمانهٔ m هم‌نهشت باشند، آن را به صورت $a \overset{m}{\equiv} b$ می‌نویسیم.

$$\boxed{a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m \mid a-b}$$

قضیهٔ تقسیم و هم‌نهشتی: در هر تقسیم، مقسوم با باقی‌مانده در پیمانهٔ مقسوم‌علیه، هم‌نهشت هستند.

$$\begin{matrix} a = bq + r \\ 0 \le r < b \end{matrix} \Rightarrow a - r = bq \xrightarrow{\text{تعریف بخش‌پذیری}} b \mid a - r \xrightarrow{\text{تعریف هم‌نهشتی}} a \overset{b}{\equiv} r$$

توجه ویژگی فوق به ما می‌گوید که هم‌نهشتی همان قضیهٔ تقسیم است، بدون حضور خارج‌قسمت و شرط تقسیم. بنابراین در تست‌های تقسیم که صحبت از خارج‌قسمت نشده است، به‌صرفه‌تر است که تست را به کمک هم‌نهشتی حل کنیم.

نکته با توجه به تعریف هم‌نهشتی و ویژگی فوق می‌توان گفت:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow a = mk + b$$

البته ممکن است b باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m نباشد. اگر b منفی یا بزرگ‌تر از m باشد، نمی‌تواند باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m باشد.

باید بررسی کنیم تفاضل کدام دو عدد بر ۱۷ بخش‌پذیر است. بنابراین تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $۳۲۱ - ۲ = ۳۱۹ \Rightarrow ۳۱۹ \neq ۱۷k$

۲) $۱۶۳ - (-۱۲۶) = ۲۸۹ \Rightarrow ۲۸۹ = ۱۷k$ ✓

البته می‌توانستیم این‌گونه هم بررسی کنیم که کدام دو عدد در تقسیم بر ۱۷ باقی‌ماندهٔ یکسانی دارند. که البته شاید کمی وقت‌گیر بود.

۱۷۱ ۳

نیم‌نگاه

اگر در یک هم‌نهشتی، پیمانه مجهول بود، باید به کمک تعریف هم‌نهشتی، آن را به بخش‌پذیری تبدیل کرد تا پیمانه معلوم شود.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a - b$$

رابطهٔ هم‌نهشتی را به یک رابطهٔ بخش‌پذیری تبدیل می‌کنیم و داریم:

$$۷۳ \overset{m}{\equiv} ۱۶۴ \Rightarrow m \mid ۱۶۴ - ۷۳ \Rightarrow m \mid \underset{۷\times۱۳}{۹۱} \xrightarrow{\text{دورقمی } m} m = ۱۳ \text{ یا } ۹۱$$

۱۷۲ ۴ باید رابطهٔ $a + ۲ \mid (۲۹ - a) - (a + ۵)$ برقرار باشد، پس:

$$a + ۲ \mid -۲a + ۲۴ \Rightarrow a + ۲ \mid -۲(-۲) + ۲۴ \Rightarrow a + ۲ \mid ۲۸ \Rightarrow a + ۲ = ۱ \text{ یا } ۲ \text{ یا } ۴ \text{ یا } ۷ \text{ یا } ۱۴ \text{ یا } ۲۸$$

دقت کنید $a + ۲$ (پیمانهٔ هم‌نهشتی) باید عددی طبیعی باشد. بنابراین a می‌تواند ۶ مقدار صحیح بپذیرد.

۱۷۳ ۲ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم عددهای ۶۸ و ۱۴۵ بر m مساوی هستند، پس ۶۸ و ۱۴۵ به پیمانهٔ m هم‌نهشت هستند. لذا داریم:

$$۶۸ \overset{m}{\equiv} ۱۴۵ \Rightarrow m \mid ۱۴۵ - ۶۸ \Rightarrow m \mid ۷۷ \xrightarrow{\text{دورقمی } m} m = ۱۱ \text{ یا } ۷۷$$

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۶۰ بر m خواسته شده، احتمالاً اگر m را ۱۱ یا ۷۷ در نظر بگیریم، باقی‌ماندهٔ یکسانی به ما می‌دهند. نگاه کنید:

$$\begin{array}{r|l} ۱۶۰ & ۱۱ \\ \hline -۱۵۴ & ۱۴ \\ \hline ۶ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۱۶۰ & ۷۷ \\ \hline -۱۵۴ & ۲ \\ \hline ۶ & \end{array}$$

همان‌طور که ملاحظه کردید باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۶۰ بر m، برابر ۶ است.

۱۷۴ ۱

درسنامه

ویژگی‌های هم‌نهشتی

۱) به دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$$

۲) دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

نکته عکس ویژگی فوق برقرار نیست، یعنی اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$، لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که $a \overset{m}{\equiv} b$. یعنی قانون حذف برای رابطهٔ هم‌نهشتی در حالت کلی برقرار نیست. نگاه کنید:

$$۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۶ \not\Rightarrow ۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۸$$

نکته اگر c عدد صحیح مثبت باشد، می‌توان پیمانه را نیز در c ضرب کرد:

$$a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{c>0} ac \overset{mc}{\equiv} bc$$

دقت کنید عکس رابطهٔ فوق برقرار است، یعنی داریم:

$$ac \overset{mc}{\equiv} bc \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$$

۳ دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند که n یک عدد طبیعی است.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

نکته عکس ویژگی فوق برقرار نیست. نگاه کنید:

$$۵^۲ \overset{۴}{\equiv} ۳^۲ \not\Rightarrow ۵ \overset{۴}{\equiv} ۳$$

توجه با توجه به ویژگی‌های فوق می‌توان گفت هر اتفاقی که برای یک طرف هم‌نهشتی بیفتد، برای طرف دیگر نیز می‌افتد:

$$x \overset{m}{\equiv} a \Rightarrow f(x) \overset{m}{\equiv} f(a)$$

۴ دو طرف دو رابطهٔ هم‌نهشتی را که پیمانه‌های یکسان داشته باشند می‌توان با هم جمع یا از هم منها و یا درهم ضرب کرد:

$$a \overset{m}{\equiv} b , c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bd \ , \ a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d$$

۵ می‌توان به دو طرف یا یک طرف رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد. این ویژگی برای کوچک کردن اعداد در طرفین هم‌نهشتی بسیار پرکاربرد است.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm mt \overset{m}{\equiv} b \pm mk$$

ابتدا تقسیم را به صورت $A \overset{۳۷}{\equiv} ۲۳$ می‌نویسیم. می‌دانیم هر اتفاقی که برای A می‌افتد برای ۲۳ نیز می‌افتد. بنابراین داریم:

$$A \overset{۳۷}{\equiv} ۲۳ \Rightarrow ۲A - ۳ \overset{۳۷}{\equiv} \underbrace{۲ \times ۲۳ - ۳}_{۴۳} \overset{۳۷}{\equiv} ۶$$

-۱×۳۷

۱۷۵ ۱ به کمک ویژگی‌های هم‌نهشتی داریم:

$$a \overset{۱۳}{\equiv} \underbrace{۱۲ \overset{۱۳}{\equiv} -۱}_{-۱ \times ۱۳} \Rightarrow a^۳ - ۲a + ۱ \overset{۱۳}{\equiv} (-۱)^۳ - ۲(-۱) + ۱ \overset{۱۳}{\equiv} ۲$$

۱۷۶ ۱ تقسیم‌ها را به زبان ریاضی می‌نویسیم و سپس به کمک ویژگی‌های هم‌نهشتی، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a \overset{۸}{\equiv} ۳ \\ b \overset{۸}{\equiv} ۳ \end{array}\right. \Rightarrow a + b \overset{۸}{\equiv} ۳ + ۳ \Rightarrow a + b \overset{۸}{\equiv} ۶ \\ c \overset{۸}{\equiv} ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow (a+b) \times c \overset{۸}{\equiv} ۶ \times ۴ \Rightarrow ac + bc \overset{۸}{\equiv} ۰$$

۱۷۷ ۱ می‌دانیم $a^۲ + b^۲ = (a-b)^۲ + ۲ab$ می‌باشد. پس:

$$\left\{\begin{array}{l} a - b \overset{۵}{\equiv} ۲ \Rightarrow (a-b)^۲ \overset{۵}{\equiv} ۴ \\ ab \overset{۵}{\equiv} ۳ \Rightarrow ۲ab \overset{۵}{\equiv} ۶ \end{array}\right. \Rightarrow (a-b)^۲ + ۲ab \overset{۵}{\equiv} ۴ + ۶ \overset{۵}{\equiv} ۰ \Rightarrow a^۲ + b^۲ \overset{۵}{\equiv} ۰$$

۱۷۸ ۴

نیم‌نگاه

در تمام مسائل هم‌نهشتی سعی ما این است که اعداد را در پیمانه کوچک کنیم. کافی است مضارب پیمانه را از آن عدد برداریم. مثلاً عدد ۱۷ به پیمانهٔ ۲۰ را بهتر است ۳- در نظر بگیریم یا عدد ۲۷ به پیمانهٔ ۲۳ را به ۴ تبدیل کنیم. چند مثال ببینید:

$$\underbrace{۱۷ \overset{۱۹}{\equiv} -۲}_{-۱ \times ۱۹} \ , \ \underbrace{۲۷ \overset{۱۲}{\equiv} ۳}_{-۲ \times ۱۲} \ , \ \underbrace{۱۸ \overset{۱۱}{\equiv} ۷}_{-۱ \times ۱۱} \ , \ \underbrace{۱۸ \overset{۲۱}{\equiv} -۳}_{-۱ \times ۲۱}$$

می‌دانیم $۸! = ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$ است. بنابراین داریم:

$$۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \overset{۱۳}{\equiv} \underbrace{(۸ \times ۵)}_{۴۰} \times \underbrace{(۶ \times ۲)}_{۱۲} \times \underbrace{(۴ \times ۳)}_{۱۲} \times ۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \times (-۱) \times (-۱) \times ۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۷$$

دقت کنید در محاسبات فوق، اعدادی را که کنار هم نوشته‌ایم به پیمانهٔ ۱۳ کوچک کرده‌ایم. سعی ما بر این است که اعداد را طوری انتخاب کنیم که وقتی به پیمانهٔ ۱۳ کوچک می‌شوند، اعداد کوچک‌تری شوند، ترجیحاً ۱ یا ۱-. شما می‌توانید انتخاب‌های متفاوتی داشته باشید. مثلاً یک نمونهٔ دیگر را ببینید:

$$\underbrace{(۸ \times ۴ \times ۲)}_{۶۴} \times \underbrace{(۶ \times ۵ \times ۳)}_{۹۰} \times ۷ \overset{۱۳}{\equiv} (-۱) \times (-۱) \times ۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۷$$

۱۷۹ **۲** ابتدا !۱۰ را باز کرده و اعداد را طوری انتخاب می‌کنیم که به پیمانهٔ ۱۱ کوچک شوند. مثلاً یکی از انتخاب‌ها به صورت زیر است:

$$۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\overset{۱۱}{\equiv}۱۰\times۹\times(۸\times۷)\times(۶\times۵)\times(۴\times۳)\times۲\overset{۱۱}{\equiv}(-۱)\times(-۲)\times۱\times(-۳)\times۱\times۲\overset{۱۱}{\equiv}\underbrace{-۱۲\overset{۱۱}{\equiv}۱۰}_{+۲\times۱۱}$$

نتیجه اگر p عددی اول باشد، همواره داریم:

$$\boxed{(p-۱)!\overset{p}{\equiv}-۱}$$

۱۸۰ **۳**

نیم‌نگاه

باقی‌ماندهٔ تقسیم !n بر عدد اول p در صورتی‌که $n\geq p$ باشد، برابر صفر است.

واضح است که باقی‌ماندهٔ تقسیم !۲۳ و !۲۴ بر ۱۷، برابر صفر است. از طرفی می‌دانیم $۱۶!\overset{۱۷}{\equiv}-۱$ است. پس فقط کافی است باقی‌ماندهٔ تقسیم !۸ بر ۱۷ را به دست آوریم:

$$۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\overset{۱۷}{\equiv}(۸\times۲)\times(۶\times۳)\times(۵\times۷)\times۴\overset{۱۷}{\equiv}(-۱)\times۱\times۱\times۴\overset{۱۷}{\equiv}-۴$$

بنابراین داریم:

$$۸!+۱۶!+۲۳!+۲۴!\overset{۱۷}{\equiv}(-۴)+(-۱)+۰+۰\overset{۱۷}{\equiv}۱۲$$

۱۸۱ **۳** باید هم‌نهشتی A به پیمانهٔ ۱۲ را به دست آوریم:

$$۱!+۲!+۳!+\underbrace{۴!+\cdots+۱۰۰!}_{\text{از این‌جا به بعد همگی بر ۱۲ بخش‌پذیرند.}}\overset{۱۲}{\equiv}۱!+۲!+۳!\overset{۱۲}{\equiv}۹$$

دقت کنید از !۴ به بعد همگی بر ۱۲ بخش‌پذیرند، زیرا $۱۲=۴\times۳$ و در اعداد !۴، !۵، ...، ۴×۳ وجود دارد.

۱۸۲ **۳** با توجه به تعریف فاکتوریل می‌توان گفت عدد !n به‌ازای $n\geq۵$ حتماً بر ۲۰ بخش‌پذیر است. پس باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۲۰، برابر صفر است:

$$۱!+۳!+\cancel{۵!}^{۰}+\cdots+\cancel{۱۹!}^{۰}\overset{۲۰}{\equiv}۱!+۳!\overset{۲۰}{\equiv}۷$$

۱۸۳ **۱** چون a و ۷ نسبت به هم اول هستند، پس حتماً a مضرب ۷ نیست. بنابراین داریم:

$$a\overset{۷}{\equiv}۱\text{ یا }۲\text{ یا }۳\text{ یا }\cancel{۴}^{-۳}\text{ یا }\cancel{۵}^{-۲}\text{ یا }\cancel{۶}^{-۱}\Rightarrow a\overset{۷}{\equiv}\pm۱\text{ یا }\pm۲\text{ یا }\pm۳\Rightarrow a^۲\overset{۷}{\equiv}۱\text{ یا }۴\text{ یا }\cancel{۹}^{۲}\Rightarrow a^۶\overset{۷}{\equiv}۱\text{ یا }\cancel{۶۴}^{۱}\text{ یا }\cancel{۸}^{۱}\Rightarrow a^۶\overset{۷}{\equiv}۱$$

نتیجه به طور کلی اگر p یک عدد اول و a مضرب p نباشد، همواره داریم:

$$\boxed{a^{p-۱}\overset{p}{\equiv}۱}$$

۱۸۴ **۲** تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $a\overset{۸}{\equiv}۰,\pm۱,\pm۲,\pm۳,۴\Rightarrow a^۲\overset{۸}{\equiv}۰,۱,۴,\cancel{۹}^{۱},\cancel{۱۶}^{۰}$

۲) $a\overset{۷}{\equiv}۰,\pm۱,\pm۲,\pm۳\Rightarrow a^۲\overset{۷}{\equiv}۰,۱,۴,\cancel{۹}^{۲}\Rightarrow$ $a^۲$ به فرم $۷k-۲$ نیست.

۳) $a\overset{۵}{\equiv}۰,\pm۱,\pm۲\Rightarrow a^۲\overset{۵}{\equiv}۰,۱,۴$

۴) $a\overset{۴}{\equiv}۰,\pm۱,۲\Rightarrow a^۲\overset{۴}{\equiv}۰,۱,\cancel{۴}^{۰}$

۱۸۵ **۱**

نیم‌نگاه

اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ و $n\mid m$، آن‌گاه $a\overset{n}{\equiv}b$، یعنی در یک هم‌نهشتی می‌توان به‌جای پیمانه، مقسوم‌علیه‌های پیمانه را قرار داد. به بیان خودمانی، می‌توان پیمانه را لاغر کرد.

روش اول: چون باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۹۹ برابر ۲۵ است، داریم:

$$a\overset{۹۹}{\equiv}۲۵\xrightarrow{۹\mid۹۹}a\overset{۹}{\equiv}۲۵$$

اما باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۹ نمی‌تواند ۲۵ باشد. پس مضرب مناسبی از پیمانه را از ۲۵ کم می‌کنیم تا باقی‌مانده بزرگ‌تر و یا مساوی صفر و کوچک‌تر از ۹ شود:

$$a\overset{۹}{\equiv}\underbrace{۲۵\overset{۹}{\equiv}۷}_{-۲\times۹}$$

روش دوم: فرض می‌کنیم $a=۲۵$ باشد. واضح است که باقی‌ماندهٔ تقسیم ۲۵ بر ۹ برابر ۷ است.

۱۸۶ ۳ می‌دانیم در هم‌نهشتی به‌جای پیمانه می‌توانیم مقسوم‌علیه‌های پیمانه را نیز قرار دهیم. پس:

$$\begin{cases} a \overset{18}{\equiv} 5 \xrightarrow{6|18} a \overset{6}{\equiv} 5 \underset{-1\times 6}{\overset{6}{\equiv}} -1 \\ b \overset{24}{\equiv} 7 \xrightarrow{6|24} b \overset{6}{\equiv} 7 \underset{-1\times 6}{\overset{6}{\equiv}} 1 \end{cases} \Rightarrow a^{10} - 3b^{2} \overset{6}{\equiv} \underbrace{(-1)^{10} - 3(1)^{2}}_{-2} \overset{6}{\equiv} 4 \quad (+1\times 6)$$

۱۸۷ ۱

درسنامه

کلاس یا دستهٔ هم‌نهشتی

مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی m، برابر r می‌باشد، یعنی $A_r = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r\}$ را کلاس یا دستهٔ هم‌نهشتی r به پیمانهٔ m می‌نامیم و با نماد $[r]_m$ نمایش می‌دهیم. مثلاً همهٔ اعداد صحیح که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۷ برابر ۲ باشد، در کلاس هم‌نهشتی $[2]_7$ قرار دارند و شامل بی‌شمار عدد صحیح است: $[2]_7 = \{\dots, -12, -5, 2, 9, 16, \dots\}$

نتیجه اگر $a \overset{m}{\equiv} b$، آن‌گاه a و b در یک دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m قرار دارند و برعکس، یعنی اگر دو عدد صحیح در یک دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m باشند، حتماً به پیمانهٔ m هم‌نهشت هستند.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow [a]_m = [b]_m$$

نکته هم‌نهشتی به پیمانهٔ m در مجموعهٔ اعداد صحیح m کلاس یا دستهٔ هم‌نهشتی ایجاد می‌کند، زیرا باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر m برابر ۰، ۱، ۲، ... و $m-1$ می‌باشد.

$$\mathbb{Z} = [0]_m \cup [1]_m \cup \dots \cup [m-1]_m$$

می‌دانیم $7 \mid x - y$ یعنی $x \overset{7}{\equiv} y$، حال چون دنبال عددی هستیم که با ۳۹ در یک کلاس هم‌نهشتی قرار دارد، پس باید دنبال عددی باشیم که با ۳۹ در پیمانهٔ ۷ هم‌نهشت باشد. تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $95 - 39 = 56 \Rightarrow 56 = 7k$ ✓

۲) $96 - 39 = 57 \Rightarrow 57 \neq 7k$ ✗

۳) $97 - 39 = 58 \Rightarrow 58 \neq 7k$ ✗

۴) $98 - 39 = 59 \Rightarrow 59 \neq 7k$ ✗

البته می‌توانستیم بگوییم چون باقی‌ماندهٔ تقسیم ۳۹ بر ۷ برابر ۴ می‌باشد، پس باید عددی پیدا کنیم که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن نیز بر ۷ برابر ۴ باشد که در گزینه‌ها فقط ۹۵ این‌چنین است.

۱۸۸ ۴ چون رابطهٔ هم‌نهشتی مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را به ۵ کلاس هم‌نهشتی افراز کرده است، پس پیمانه برابر ۵ می‌باشد. حال دنبال دو عددی هستیم که در یک کلاس هم‌نهشتی در این پیمانه باشند، پس باید دو عدد به پیمانهٔ ۵ هم‌نهشت باشند. تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $5 \nmid 25 - 7$ ✗ ۲) $5 \nmid 31 - 3$ ✗ ۳) $5 \nmid 37 - 1$ ✗ ۴) $5 \mid 37 - 12$ ✓

۱۸۹ ۲ باید ببینیم ۲۰۹- به پیمانهٔ ۱۲ با کدام عدد داده‌شده هم‌نهشت است. اما برای سرعت در کار کافی است مضربی از ۱۲ را که می‌شناسیم، مثلاً $20 \times 12 = 240$ را به ۲۰۹- اضافه کنیم، سپس با برداشتن مضرب مناسبی از ۱۲ از عدد حاصل به عدد گزینه‌ها برسیم:

$$-209 \underset{+20\times 12}{\overset{12}{\equiv}} 31 \underset{-2\times 12}{\overset{12}{\equiv}} 7$$

۱۹۰ ۳ می‌دانیم اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، $p^2 = 24k + 1$ است پس:

$$[p^2] = [1] \Rightarrow p^2 \overset{m}{\equiv} 1 \Rightarrow 24k + 1 \overset{m}{\equiv} 1 \Rightarrow m \mid (24k + 1) - 1 \Rightarrow m \mid 24k$$

با توجه به گزینه‌ها واضح است که m نمی‌تواند ۱۶ باشد.

۱۹۱ ۱ اعدادی که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۷ برابر ۲ می‌باشد، در کلاس هم‌نهشتی A قرار دارند و اعدادی که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۷ برابر ۴ است، در کلاس هم‌نهشتی B خواهند بود و اعدادی که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۷ برابر ۲ یا ۴ نیست در کلاس هم‌نهشتی C می‌باشند. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $\begin{cases} 21 \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow 21 \in C \\ 13 \overset{7}{\equiv} 6 \Rightarrow 13 \in C \end{cases}$ ✓

۲) $\begin{cases} 13 \overset{7}{\equiv} 6 \Rightarrow 13 \in C \\ 23 \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow 23 \in A \end{cases}$ ✗

۳) $\begin{cases} 21 \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow 21 \in C \\ 32 \overset{7}{\equiv} 4 \Rightarrow 32 \in B \end{cases}$ ✗

۴) $\begin{cases} 23 \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow 23 \in A \\ 32 \overset{7}{\equiv} 4 \Rightarrow 32 \in B \end{cases}$ ✗

۱۹۲ ۳ چون سه عدد a، ۴۱ و ۱۳۲ در یک کلاس هم‌نهشتی به پیمانهٔ m قرار دارند، پس سه عدد به پیمانهٔ m هم‌نهشت می‌باشند:

$$a \overset{m}{\equiv} 41 \overset{m}{\equiv} 132 \Rightarrow m \mid 132 - 41 \Rightarrow m \mid \underset{7\times 13}{91} \Rightarrow m = 7 \text{ یا } 13 \text{ یا } 91$$

چون در سؤال خواسته‌شده مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به تعداد کم‌تری کلاس هم‌نهشتی افراز شود، پس باید کوچک‌ترین m را انتخاب کنیم، یعنی m باید ۷ باشد. پس:

$$a \overset{۷}{\equiv} ۴۱ \overset{-۶\times۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow a = ۷k - ۱ \xrightarrow[k=۱۵]{\text{کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی } a} a = ۱۰۴$$

دقت کنید در این سؤال m نمی‌تواند ۱ باشد، چون در این صورت همهٔ اعداد صحیح در یک کلاس هم‌نهشتی قرار دارند که آن کلاس هم‌نهشتی $[۰]_۱$ است و در این صورت گزینه‌ها دیگر معنایی نداشتند.

۱۹۳ ۲

درسنامه

قانون حذف در هم‌نهشتی

اگر بخواهیم دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانهٔ آن هم‌نهشتی را بر ب.م.م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \ , \ (c,m) = d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

دقت کنید اکنون به راحتی دلیل درستی رابطهٔ زیر که قبلاً بیان شده بود قابل درک است:

$$ac \overset{mc}{\equiv} bc \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$$

نتیجه قانون حذف در هم‌نهشتی، برای هر عدد که نسبت به پیمانه اول باشد، برقرار است.

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \ , \ (c,m) = ۱ \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$$

نکته اگر در یک هم‌نهشتی هر دو طرف بر یک عدد بخش‌پذیر نباشند، می‌توان از مضارب پیمانه به طرفین اضافه و کم کرد تا طرفین، مضرب آن عدد بشوند، سپس هم‌نهشتی را ساده کرد.

روش اول: مشخص است که یکی از دو گزینهٔ (۱) یا (۲) جواب است، چون یک عدد در آنِ واحد، در پیمانهٔ ۷ دو باقی‌ماندهٔ مختلف ندارد.

$$۳۶a \overset{۸۴}{\equiv} ۱۹۲ \xrightarrow[(۱۲,۸۴)=۱۲]{\div ۱۲} ۳a \overset{۷}{\equiv} ۱۶ \xrightarrow{۱۶ \overset{۷}{\equiv} ۲} ۳a \overset{۷}{\equiv} ۲ \overset{۱\times۷}{\Rightarrow} ۳a \overset{۷}{\equiv} ۹ \xrightarrow[(۳,۷)=۱]{\div ۳} a \overset{۷}{\equiv} ۳ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) نادرست است.

و اما علت درستی گزینه‌های (۳) و (۴) به‌شرح زیر است:

$$a \overset{۷}{\equiv} ۳ \begin{cases} \xrightarrow{\times ۲} ۲a \overset{۷}{\equiv} ۶ \overset{۷}{\equiv} -۱ \\ \xrightarrow{\times ۳} ۳a \overset{۷}{\equiv} ۹ \overset{۷}{\equiv} ۲ \end{cases}$$

روش دوم: در این سؤال بعد از این‌که فهمیدید یا گزینهٔ (۱) غلط است یا گزینهٔ (۲)، می‌توانید به a عدد بدهید. مثلاً فرض کنید گزینهٔ (۱) درست است و $a = ۳$ می‌باشد. چون $a = ۳$ در گزینه‌های (۳) و (۴) هم صدق می‌کند، پس گزینهٔ (۱) واقعاً درست بوده و گزینهٔ (۲) حتماً نادرست است.

۱۹۴ ۱ گزینهٔ (۱) نادرست است، زیرا طرفین هم‌نهشتی بر ۵ تقسیم شده و $(۵,۳۰) = ۵$ می‌باشند، پس پیمانه باید $\frac{۳۰}{۵} = ۶$ شود. اما دلیل درستی بقیهٔ گزینه‌ها را ببینید:

$$۲)\ ۱۵a \overset{۳۰}{\equiv} ۲۰b \xrightarrow[(۵,۳۰)=۵]{\div ۵} ۳a \overset{\frac{۳۰}{۵}}{\equiv} ۴b \Rightarrow ۳a \overset{۶}{\equiv} ۴b$$

$$۳)\ ۳a \overset{۶}{\equiv} ۴b \xrightarrow{۳|۶} \cancel{۳}^{۰}a \overset{۳}{\equiv} \cancel{۴}^{۱}b \Rightarrow b \overset{۳}{\equiv} ۰$$

$$۴)\ ۳a \overset{۶}{\equiv} ۴b \xrightarrow{۲|۶} \cancel{۳}^{۱}a \overset{۲}{\equiv} \cancel{۴}^{۰}b \Rightarrow a \overset{۲}{\equiv} ۰$$

۱۹۵ ۳ ابتدا طرفین را بر ۳ تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$۹a \overset{۱۸}{\equiv} ۶b \xrightarrow[(۳,۱۸)=۳]{\div ۳} ۳a \overset{\frac{۱۸}{۳}}{\equiv} ۲b \Rightarrow ۳a \overset{۶}{\equiv} ۲b \Rightarrow$$ گزینهٔ (۴)

حال از روی $۳a \overset{۶}{\equiv} ۲b$ سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$۳a \overset{۶}{\equiv} ۲b \xrightarrow{۳|۶} \cancel{۳}^{۰}a \overset{۳}{\equiv} \cancel{۲}^{-۱}b \Rightarrow -b \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow b \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲)

$$۳a \overset{۶}{\equiv} ۲b \xrightarrow{۲|۶} \cancel{۳}^{۱}a \overset{۲}{\equiv} \cancel{۲}^{۰}b \Rightarrow a \overset{۲}{\equiv} ۰ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۱)

بنابراین نتیجه‌گیری $a \overset{۶}{\equiv} ۲$ در گزینهٔ (۳) نادرست است.

۱۹۶ **۱** از $(a^2-1, m)=1$ به شکل مبرهنی معلوم می‌شود که حتماً باید طرفین را بر a^2-1 تقسیم کرد. پس سعی می‌کنیم در طرف اول هم از a^2-1 فاکتور بگیریم:

$$(a^3-a)-(a^2-1)\overset{m}{\equiv}a^2-1\Rightarrow a(a^2-1)-(a^2-1)\overset{m}{\equiv}a^2-1\Rightarrow(a^2-1)(a-1)\overset{m}{\equiv}a^2-1\Rightarrow a-1\overset{m}{\equiv}1\Rightarrow a-2\overset{m}{\equiv}0\Rightarrow m\mid a-2$$

۱۹۷ **۴**

اگر در یک هم‌نهشتی، ضریب یکی از پارامترها به پیمانه بخش‌پذیر باشد، آن پارامتر قابل محاسبه از این هم‌نهشتی نیست.

b قابل محاسبه از این هم‌نهشتی نیست، چون $18\overset{9}{\equiv}0$ و b حذف می‌گردد، پس گزینهٔ (۴) نادرست است. اما دلیل درستی بقیهٔ گزینه‌ها:

$$1)\ 12a\overset{9}{\equiv}18b\xrightarrow[(6,9)=3]{\div 6}2a\overset{3}{\equiv}3b$$

$$2)\ 2a\overset{3}{\equiv}3b\xrightarrow{\times 2}4a\overset{3}{\equiv}6b$$

$$3)\ 2a\overset{3}{\equiv}3b\xrightarrow[2\overset{3}{\equiv}-1]{3\overset{3}{\equiv}0}-a\overset{3}{\equiv}0\Rightarrow a\overset{3}{\equiv}0$$

۱۹۸ **۱** واضح است گزینهٔ (۱) نادرست است، چون ضریب a به پیمانه بخش‌پذیر است، پس نمی‌توان مقدار a را به دست آورد. اما علت درستی سایر گزینه‌ها:

$$2)\ 3a\overset{3}{\equiv}2b\xrightarrow[2\overset{3}{\equiv}-1]{3\overset{3}{\equiv}0}0\overset{3}{\equiv}-1\times b\Rightarrow b\overset{3}{\equiv}0$$

$$3)\ \underbrace{b\overset{3}{\equiv}0}_{+3\times a}\Rightarrow b\overset{3}{\equiv}3a$$

$$4)\ 18a\overset{9}{\equiv}12b\xrightarrow[(6,9)=3]{\div 6}3a\overset{3}{\equiv}2b$$

۱۹۹ **۳**

درسنامه

تقویم‌نگاری

مسائلی که در مورد روزهای هفته، ساعت در شبانه‌روز، زاویه در دایرهٔ مثلثاتی و ... که حالت متناوب دارند، به هم‌نهشتی مربوط است. در هر مورد باید به پیمانهٔ دورهٔ تناوب، عدد را کوچک کنید. مثلاً در مورد روزهای هفته، باید ببینیم از تاریخ اعلام‌شده تا تاریخ خواسته‌شده چند روز مانده است. سپس تعداد روزهای مانده را به پیمانهٔ ۷ کوچک می‌کنیم و عدد حاصل را به روز صفرم (روزی که اعلام شده) اضافه می‌کنیم.

نکته اگر تاریخی را بدهند و آینده را بخواهند، تعداد روزهای باقی‌مانده را با علامت مثبت و اگر گذشته را بخواهند، فکر می‌کنیم تاریخ گذشته را داده‌اند و آینده را می‌خواهند. بعد از به دست آوردن تعداد روزها، آن را با علامت منفی در نظر می‌گیریم.

ابتدا باید روزهای باقی‌مانده از ۱ فروردین تا ۱۹ آذر را به دست آوریم، سپس عدد حاصل را به پیمانهٔ ۷ کوچک کنیم:

$$\overset{2}{\cancel{30}}+2\times\overset{3}{\cancel{31}}+3\times\overset{3}{\cancel{31}}+2\times\overset{2}{\cancel{30}}+\overset{-2}{\cancel{19}}\overset{7}{\equiv}\underbrace{2+2\times3+3\times3+2\times2-2}_{19}\overset{7}{\equiv}-2$$

-2 یعنی ۲ روز قبل از پنج‌شنبه، یعنی ۱۹ آذر، سه‌شنبه است.

۲۰۰ **۱** بیست‌وهفتم اردیبهشت سه‌شنبه است، پس بیست‌وچهارم اردیبهشت شنبه است. بنابراین تاریخ شنبه‌های اردیبهشت را به دست می‌آوریم:

$$24\overset{7}{\equiv}\underset{\text{سومین شنبه}}{17}\overset{7}{\equiv}\underset{\text{دومین شنبه}}{10}\overset{7}{\equiv}\underset{\text{اولین شنبه}}{3}$$

بنابراین سومین شنبهٔ اردیبهشت ماه، ۱۷ اردیبهشت است.

۲۰۱ **۳** فرض می‌کنیم آخرین شنبهٔ آبان‌ماه روز n اُم آبان باشد. پس برای آن‌که روز n اُم شنبه باشد، باید تعداد روزهای باقی‌مانده تا آن روز در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۷، برابر صفر شود:

$$6+31+3\times31+30+n\overset{7}{\equiv}0\Rightarrow\underbrace{-1+3+3\times3+2}_{13}+n\overset{7}{\equiv}0\Rightarrow-1+n\overset{7}{\equiv}0\Rightarrow n\overset{7}{\equiv}1$$

چون آخرین شنبه را می‌خواهیم، باید بزرگ‌ترین عددی که به پیمانهٔ ۷ برابر ۱ می‌شود را انتخاب کنیم که عدد ۲۹ می‌باشد.

۲۰۲ **۴** می‌دانیم هر روز ۲۴ ساعت است. بنابراین باید ببینیم ۱۰۰۰ ساعت بعد، شامل چند روز و چند ساعت است: $۱۰۰۰=۲۴\times۴۱+۱۶ \Rightarrow$ ۴۱ روز و ۱۶ ساعت

بنابراین ابتدا ببینیم ۴۱ روز بعد، چه روزی و چندشنبه است: $۴۱ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow$ یک روز قبل از سه‌شنبه، یعنی دوشنبه است.

اما ۱۶ ساعت بعد از ساعت ۲۳ روز دوشنبه ۱۷مهر، ساعت ۱۵ سه‌شنبه ۱۸ مهرماه است. $۴۱=۳۱+۱۰ \Rightarrow$ ۱۰ روز بعد از هفتم مهر $\Rightarrow$ ۱۷ مهر

۲۰۳ **۳** باید ببینیم ۲۰ شهریورماه چند روز قبل از ۲۲ بهمن است. پس: $-(۳۱-۲۰+۳\times۳۰+۳۰+۲۲) \overset{۷}{\equiv} -(-۳+۳\times۲+۲+۱) \overset{۷}{\equiv} -۶ \overset{۷}{\equiv} ۱$

یعنی یک روز بعد از دوشنبه است، پس ۲۰ شهریور سه‌شنبه می‌باشد.

۲۰۴ **۲** می‌دانیم در دایرهٔ مثلثاتی هر ۳۶۰ درجه که حرکت می‌کنیم، دوباره به نقطهٔ ابتدایی حرکت برمی‌گردیم. چون در خلاف جهت دایرهٔ مثلثاتی حرکت کرده‌ایم، پس ۳۲۸۵° را با علامت منفی در نظر می‌گیریم. در نتیجه:

$$-۳۲۸۵^\circ \overset{۳۶۰^\circ}{\equiv} -۴۵^\circ \Rightarrow ۳۰۵^\circ - ۴۵^\circ = ۲۶۰^\circ$$

۲۰۵ **۱**

درسنامه

ترکیب چند هم‌نهشتی

۱) اگر دو عدد در پیمانه‌های مختلف هم‌نهشت باشند، آن‌گاه آن دو عدد در پیمانهٔ ک.م.م پیمانه‌ها هم‌نهشت هستند:

$$a \overset{m}{\equiv} b \ , \ a \overset{n}{\equiv} b \Rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$$

نکته ایدهٔ فوق برای بیش از دو هم‌نهشتی نیز برقرار است، یعنی:

$$a \overset{m_۱}{\equiv} b \ , \ a \overset{m_۲}{\equiv} b, \dots, a \overset{m_k}{\equiv} b \Rightarrow a \overset{[m_۱, m_۲, \dots, m_k]}{\equiv} b$$

۲) می‌دانیم اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $b \overset{m}{\equiv} c$ باشند، آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} c$ می‌باشد. حال اگر پیمانه‌ها یکسان نباشند، داریم:

$$a \overset{m}{\equiv} b \ , \ b \overset{n}{\equiv} c \Rightarrow a \overset{(m,n)}{\equiv} c$$

می‌دانیم منظور از (m,n)، ب‌م‌م دو عدد m و n است.

روش اول: با توجه به صورت سؤال $a \overset{۹}{\equiv} ۵$ و $a \overset{۷}{\equiv} ۶$ است و ما باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۶۳ را می‌خواهیم. اگر طرف دوم روابط هم‌نهشتی فوق را یکسان کنیم، به راحتی می‌توانیم به کمک ک.م.م ۷ و ۹، عدد ۶۳ را ایجاد کنیم:

$$\begin{cases} a \overset{۹}{\equiv} ۵ \Rightarrow a \overset{۹}{\equiv} ۴۱ \quad (+۴\times۹) \\ a \overset{۷}{\equiv} ۶ \Rightarrow a \overset{۷}{\equiv} ۴۱ \quad (+۵\times۷) \end{cases} \Rightarrow a \overset{[۹,۷]}{\equiv} ۴۱ \Rightarrow a \overset{۶۳}{\equiv} ۴۱ \Rightarrow$$

باقی‌مانده یعنی ۴۱ عددی اول است.

روش دوم: ممکن است با خود بگویید پیدا کردن عدد مشترک طرف دوم سخت و وقت‌گیر است. برای این منظور می‌توانید به عدد ۵، ۹تا ۹تا و به عدد ۶، ۷تا ۷تا اضافه کنید تا به یک عدد برابر برسید. مطمئن هستیم این عدد برابر عددی کوچک‌تر از ۶۳ است، چون قرار است همین عدد برابر، باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۶۳ باشد:

$$\begin{cases} a \overset{۹}{\equiv} ۵ \to ۱۴ \to ۲۳ \to ۳۲ \to ۴۱ \to ۵۰ \to ۵۹ \\ a \overset{۷}{\equiv} ۶ \to ۱۳ \to ۲۰ \to ۲۷ \to ۳۴ \to ۴۱ \end{cases} \Rightarrow a \overset{۶۳}{\equiv} ۴۱$$

روش سوم: با توجه به خاصیت $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{c>۰} ac \overset{mc}{\equiv} bc$، داریم:

$$\begin{cases} a \overset{۹}{\equiv} ۵ \xrightarrow{\times۷} ۷a \overset{۶۳}{\equiv} ۳۵ \\ a \overset{۷}{\equiv} ۶ \xrightarrow{\times۹} ۹a \overset{۶۳}{\equiv} ۵۴ \end{cases} \xrightarrow{-} ۲a \overset{۶۳}{\equiv} ۱۹ \overset{۶۳}{\equiv} ۸۲ \ (+۱\times۶۳) \xrightarrow[(۲,۶۳)=۱]{\div۲} a \overset{۶۳}{\equiv} ۴۱$$

۲۰۶ **۴** تقسیم‌های داده‌شده را به صورت هم‌نهشتی می‌نویسیم و داریم:

$$\begin{cases} a \overset{۲۹}{\equiv} ۱۲ \overset{۲۹}{\equiv} -۱۷ \quad (-۱\times۲۹) \\ a+۱۷ \overset{۲۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow a \overset{۲۱}{\equiv} -۱۷ \end{cases} \Rightarrow a \overset{[۲۹,۲۱]}{\equiv} -۱۷ \Rightarrow a \overset{۶۰۹}{\equiv} -۱۷ \Rightarrow a = ۶۰۹k - ۱۷ \xrightarrow{k=۱} a = ۵۹۲ \Rightarrow \text{رقم وسط} = ۹$$

۲۰۷ **۱** تقسیم‌های سؤال به زبان ریاضی $A \overset{۲۳}{\equiv} ۵$ و $۲A \overset{۱۷}{\equiv} ۹$ می‌باشند. پس:

$$\begin{cases} ۲A \overset{۱۷}{\equiv} ۹ \overset{۱۷}{\equiv} ۲۶ \xrightarrow[(۲,۱۷)=۱]{\div۲} A \overset{۱۷}{\equiv} ۱۳ \xrightarrow{\times۲۳} ۲۳A \overset{۳۹۱}{\equiv} ۲۹۹ \\ A \overset{۲۳}{\equiv} ۵ \xrightarrow{\times۱۷} ۱۷A \overset{۳۹۱}{\equiv} ۸۵ \end{cases} \xrightarrow{-} ۶A \overset{۳۹۱}{\equiv} ۲۱۴ \xrightarrow[(۲,۳۹۱)=۱]{\div۲} ۳A \overset{۳۹۱}{\equiv} ۱۰۷ \overset{۳۹۱}{\equiv} ۴۹۸$$

$$\xrightarrow[(۳,۳۹۱)=۱]{\div۳} A \overset{۳۹۱}{\equiv} ۱۶۶ \Rightarrow A = ۳۹۱k + ۱۶۶ \xrightarrow[k=۲]{\text{بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی}} A = ۹۴۸$$

حال باید باقی‌ماندهٔ تقسیم ۹۴۸ بر ۱۲ را به دست آوریم. چون ۹۴۸ بر ۴ و هم‌چنین بر ۳ بخش‌پذیر است، پس بر ۱۲ نیز بخش‌پذیر می‌باشد، پس باقی‌ماندهٔ تقسیم، برابر صفر است.

۲۰۸ | ۱ در تقسیم عدد N بر ۳۱ که باقی‌مانده برابر ۲۶ می‌باشد، صحبت از خارج‌قسمت نشده است، پس داریم: $N \overset{۳۱}{\equiv} ۲۶$

اما در تقسیم بعدی صحبت از خارج‌قسمت می‌شود، پس: $N = ۴۳q + q \,،\, ۰ \le q < ۴۳ \Rightarrow N \le ۴۳(۴۲) + ۴۲ \Rightarrow N \le ۱۸۴۸$

یعنی بیان تقسیم دوم در صورت سؤال به این منظور است که بدانیم N هیچ‌گاه از ۱۸۴۸ بیشتر نمی‌شود. از طرفی داریم:

$$N = ۴۳q + q \Rightarrow N = ۴۴q \Rightarrow N \overset{۴۴}{\equiv} ۰$$

حال داریم:

$$\begin{cases} N \overset{۴۴}{\equiv} ۰ \overset{۴۴}{\equiv} ۸۸ \\ N \overset{۳۱}{\equiv} ۲۶ \overset{۳۱}{\equiv} ۸۸ \end{cases} \Rightarrow N \overset{[۴۴،۳۱]}{\equiv} ۸۸ \Rightarrow N \overset{۱۳۶۴}{\equiv} ۸۸ \Rightarrow N = ۱۳۶۴k + ۸۸ \xrightarrow[\text{بزرگ‌ترین N به ازای k=۱ به دست می‌آید.}]{N \le ۱۸۴۸} N = ۱۴۵۲ \Rightarrow \text{رقم یکان} = ۲$$

۲۰۹ | ۳ با توجه به گزینه‌ها، ابتدا به کمک قانون حذف داریم:

$$۶a \overset{۸۴}{\equiv} ۳b \xrightarrow[(۳،۸۴)=۳]{\div ۳} ۲a \overset{۲۸}{\equiv} b \Rightarrow \text{گزینهٔ (۲)}$$

$$۶b \overset{۷۲}{\equiv} ۱۸c \xrightarrow[(۶،۷۲)=۶]{\div ۶} b \overset{۱۲}{\equiv} ۳c \Rightarrow \text{گزینهٔ (۴)}$$

حال به کمک خاصیت $a \overset{m}{\equiv} b$ و $b \overset{n}{\equiv} c \Rightarrow a \overset{(m،n)}{\equiv} c$، داریم:

$$\begin{cases} ۲a \overset{۲۸}{\equiv} b \\ b \overset{۱۲}{\equiv} ۳c \end{cases} \Rightarrow ۲a \overset{(۲۸،۱۲)}{\equiv} ۳c \Rightarrow ۲a \overset{۴}{\equiv} \cancel{۳}^{-۱}c \Rightarrow ۲a \overset{۴}{\equiv} -c \Rightarrow \text{گزینهٔ (۱)}$$

۲۱۰ | ۳

تیم نگاه

اگر در تستی بیش از دو هم‌نهشتی وجود داشت، معمولاً برای یکسان‌کردن طرف دوم باید به سمت اعداد منفی برویم.

کافی است برای یکسان‌کردن طرف دوم به سمت اعداد منفی برویم:

$$\begin{cases} a \overset{۱۲}{\equiv} ۵ \underset{-۱\times۷}{\overset{۱۲}{\equiv}} -۷ \\ a \overset{۱۵}{\equiv} ۸ \underset{-۱\times۱۵}{\overset{۱۵}{\equiv}} -۷ \\ a \overset{۳۲}{\equiv} ۲۵ \underset{-۱\times۳۲}{\overset{۳۲}{\equiv}} -۷ \end{cases} \Rightarrow a \overset{[۱۲،۱۵،۳۲]}{\equiv} -۷ \Rightarrow a \overset{۴۸۰}{\equiv} -۷ \Rightarrow a = ۴۸۰k - ۷ \xrightarrow[k=۱]{\text{کوچک‌ترین a}} a = ۴۷۳ \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = ۴ + ۷ + ۳ = ۱۴$$

۲۱۱ | ۱ چون بیش از دو هم‌نهشتی داریم، به سمت اعداد منفی می‌رویم:

$$\begin{cases} a \overset{۱۱}{\equiv} ۵ \underset{-۱\times۱۱}{\overset{۱۱}{\equiv}} -۶ \\ a \overset{۱۴}{\equiv} ۸ \underset{-۱\times۱۴}{\overset{۱۴}{\equiv}} -۶ \\ a \overset{۱۵}{\equiv} ۹ \underset{-۱\times۱۵}{\overset{۱۵}{\equiv}} -۶ \end{cases} \Rightarrow a \overset{[۱۱،۱۴،۱۵]}{\equiv} -۶ \Rightarrow a \overset{۲۳۱۰}{\equiv} -۶ \Rightarrow a = ۲۳۱۰k - ۶ \xrightarrow[k=۱]{\text{کوچک‌ترین a}} a = ۲۳۰۴ \Rightarrow$$ مضرب ۴ و ۹ است، پس مضرب ۳۶ می‌باشد.

۲۱۲ | ۴ چون سه هم‌نهشتی داریم، باید به سمت اعداد منفی برویم:

$$\begin{cases} A \overset{۵}{\equiv} ۲ \overset{۵}{\equiv} -۳ \\ A \overset{۷}{\equiv} ۴ \overset{۷}{\equiv} -۳ \\ A \overset{۱۱}{\equiv} ۸ \overset{۱۱}{\equiv} -۳ \end{cases} \Rightarrow A \overset{[۵،۷،۱۱]}{\equiv} -۳ \Rightarrow A \overset{۳۸۵}{\equiv} -۳ \Rightarrow A = ۳۸۵k - ۳ \xrightarrow[k=۲]{\text{بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی A}} A = ۷۶۷$$

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم ۷۶۷ را بر ۲۳ به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{r|l} ۷۶۷ & ۲۳ \\ \hline -۶۹ & ۳۳ \\ \hline ۷۷ & \\ -۶۹ & \\ \hline ۸ & \end{array} \Rightarrow r = ۸$$

۲۱۳ | ۲

تیم نگاه

اگر بیش از دو هم‌نهشتی داشتیم و بتوان خیلی سریع دوتا از آن‌ها را یکی کرد، آن دو را یکی می‌کنیم و سپس هم‌نهشتی حاصل را با سومی در نظر می‌گیریم و ادامهٔ ماجرا ...

هم‌نهشتی‌های سؤال $x \overset{11}{\equiv} 0$ ، $x \overset{4}{\equiv} 1$ و $x \overset{5}{\equiv} 1$ می‌باشند. دو هم‌نهشتی آخر را به راحتی می‌توان به یک هم‌نهشتی تبدیل کرد:

$$\begin{cases} x \overset{4}{\equiv} 1 \\ x \overset{5}{\equiv} 1 \end{cases} \Rightarrow x \overset{[4,5]}{\equiv} 1 \Rightarrow x \overset{20}{\equiv} 1$$

حال با $x \overset{20}{\equiv} 1$ و $x \overset{11}{\equiv} 0$ کار را ادامه می‌دهیم:

$$\begin{cases} x \overset{20}{\equiv} 1 \overset{20}{\equiv} 121 \quad (+6\times 2) \\ x \overset{11}{\equiv} 0 \overset{11}{\equiv} 121 \quad (+11\times 11) \end{cases} \Rightarrow x \overset{[20,11]}{\equiv} 121 \Rightarrow x \overset{220}{\equiv} 121 \Rightarrow x = 220k + 121 \xrightarrow{\text{سه‌رقمی}} k = 0,1,2,3 \Rightarrow \text{جواب } 4$$

دقت کنید استدلال ما برای رسیدن سریع به ۱۲۱ می‌تواند این‌گونه باشد؛ بگوییم هر مضرب ۲۰ که به یک اضافه کنیم، رقم یکان عدد حاصل ۱ می‌شود. حال کدام مضرب ۱۱ است که رقم یکانش ۱ است؟ که به عدد ۱۲۱ می‌رسیم.

۲۱۴ ۳

درسنامه

معادلهٔ هم‌نهشتی

یک رابطهٔ هم‌نهشتی همراه با مجهولی چون x به فرم $ax \overset{m}{\equiv} b$ را یک معادلهٔ هم‌نهشتی می‌نامیم.

روش حل معادلهٔ هم‌نهشتی: منظور از حل معادلهٔ هم‌نهشتی، پیداکردن همهٔ جواب‌هایی چون $x_0 \in \mathbb{Z}$ است که در این معادله صدق می‌کنند، یعنی $ax_0 \overset{m}{\equiv} b$ می‌شود. اما هر معادلهٔ هم‌نهشتی دارای جواب نیست. معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a,m) \mid b$. در این صورت برای حل معادلهٔ هم‌نهشتی باید کاری کنیم که ضریب مجهول برابر یک شود. برای این منظور، هم ضریب مجهول و هم عدد ثابت طرف دوم را در پیمانهٔ داده‌شده و به کوچک‌ترین عدد مثبت یا منفی تبدیل می‌کنیم و سپس طرفین را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم. اگر طرف دوم بر ضریب مجهول بخش‌پذیر نبود، از مضارب پیمانه به آن اضافه یا کم می‌کنیم.

برای آن‌که معادلهٔ $6x \overset{9}{\equiv} 2a + 5$ دارای جواب باشد باید رابطهٔ $(6,9) \mid 2a + 5$ برقرار باشد، پس:

$$(6,9) = 3 \Rightarrow 3 \mid 2a + 5 \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} a = 41$$

۲۱۵ ۴ برای آن‌که معادلهٔ $42x \overset{15}{\equiv} 5a$ دارای جواب باشد باید رابطهٔ $(42,15) \mid 5a$ برقرار باشد. پس:

$$(42,15) = 3 \Rightarrow 3 \mid 5a \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} a = 9$$

۲۱۶ ۲ برای آن‌که معادلهٔ $42x \overset{15}{\equiv} 5n - 2$ جواب داشته باشد باید $(42,15) \mid 5n - 2$ برقرار باشد، پس:

$$(42,15) = 3 \Rightarrow 3 \mid 5n - 2 \Rightarrow 5n - 2 \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow 5n \overset{3}{\equiv} 2 \overset{3}{\equiv} 5 \Rightarrow n \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow n = 3k + 1$$

حال تعداد اعداد دورقمی n را می‌خواهیم:

$$10 \le n < 100 \Rightarrow 10 \le 3k + 1 < 100 \Rightarrow 9 \le 3k < 99 \Rightarrow 3 \le k < 33 \Rightarrow \text{تعداد } n\text{ها} = 30$$

۲۱۷ ۴ باید سعی کنیم a را تنها کنیم. ابتدا ۱۳ را با ۹ کوچک می‌کنیم:

$$13a \overset{9}{\equiv} 11 \xrightarrow{13 \overset{9}{\equiv} 4} 4a \overset{9}{\equiv} 11$$

حال اگر ۹ واحد به ۱۱ اضافه کنیم، طرفین هم‌نهشتی بر ۴ بخش‌پذیر می‌شود و داریم:

$$4a \overset{9}{\equiv} 11 \overset{9}{\equiv} 20 \quad (+1\times 9) \xrightarrow[(4,9)=1]{\div 4} a \overset{9}{\equiv} 5 \Rightarrow a = 9k + 5 \xrightarrow[k=11]{\text{کوچک‌ترین سه‌رقمی}} a = 104$$

۲۱۸ ۳ باید سعی کنیم x را تنها کنیم:

$$19x \overset{29}{\equiv} 1 \Rightarrow -10x \overset{29}{\equiv} 1 \overset{29}{\equiv} 30 \xrightarrow[(-10,29)=1]{\div(-10)} x \overset{29}{\equiv} -3 \Rightarrow x = 29k - 3 \xrightarrow{\text{x دورقمی است.}} k = 1,2,3$$

۲۱۹ ۱ باید سعی کنیم x را تنها کنیم:

$$72x \overset{31}{\equiv} 1 \Rightarrow 10x \overset{31}{\equiv} 1 \Rightarrow 10x \overset{31}{\equiv} -30 \xrightarrow[(10,31)=1]{\div 10} x \overset{31}{\equiv} -3 \Rightarrow x = 31k - 3$$

(-2×31) (-1×31)

حال می‌خواهیم x سه‌رقمی باشد. پس:

$$100 \le x < 1000 \Rightarrow 100 \le 31k - 3 < 1000 \Rightarrow 103 \le 31k < 1003 \Rightarrow 3/\ldots \le k < 32/\ldots \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} 4 \le k \le 32 \Rightarrow \text{تعداد } x\text{ها} = 29$$