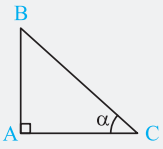
درسنامهٔ ۱

نسبت‌های مثلثاتی

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC زیر، چهار نسبت مثلثاتی زیر را تعریف می‌کنیم:



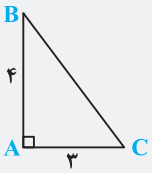
$$\text{کسینوس آلفا} = \cos\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویهٔ } \alpha}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC} \quad , \quad \text{سینوس آلفا} = \sin\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویهٔ } \alpha}{\text{وتر}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{کتانژانت آلفا} = \cot\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویهٔ } \alpha}{\text{ضلع مقابل به زاویهٔ } \alpha} = \frac{AC}{AB} \quad , \quad \text{تانژانت آلفا} = \tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویهٔ } \alpha}{\text{ضلع مجاور به زاویهٔ } \alpha} = \frac{AB}{AC}$$

سؤال دانش‌پژوه (نرا کشتکار): **آقا ببخشید اگه مثلث قائم‌الزاویه نبود چی؟**

پاسخ: *درود بر شما و مثلث قائم‌الزاویه! ببین این بحث‌ها و تعاریفی که گفتیم فقط در مثلث قائم‌الزاویه انجام میشه. پس اگه مثلث قائم‌الزاویه نبود دیگه اون تعاریف بی‌معنی‌اند.*

مثال **در شکل مقابل، مقدار عبارت $\frac{\tan\hat{B}+\cot\hat{C}}{\sin\hat{B}\times\sin\hat{C}}$ را به‌دست آورید.**



پاسخ: قبل از هر کاری به کمک قضیهٔ فیثاغورس، طول وتر BC را می‌یابیم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

حال طبق تعریف‌های گفته شده در بالا حاصل کسر داده شده را می‌یابیم:

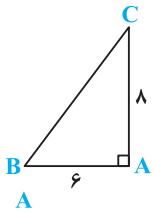
$$\frac{\tan\hat{B}+\cot\hat{C}}{\sin\hat{B}\times\sin\hat{C}} = \frac{\frac{AC}{AB}+\frac{AC}{AB}}{\frac{AC}{BC}\times\frac{AB}{BC}} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}{\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}} = \frac{\frac{6}{4}}{\frac{12}{25}} = \frac{6\times 25}{4\times 12} = \frac{25}{8}$$

سؤال دانش‌پژوه (ناصر افته‌پاری): **آقا به‌جز این نسبت‌ها، باز هم چیزی داریم؟**

پاسخ: *درود بر شما! بله ولی حداقل امسال نمی‌خونین و واجب هم نیست بدونید. ضمناً اگر جناب‌عالی همین نسبت‌ها رو هم حفظ کنید و بلد باشین، من ده هزار مرتبه می‌گم درود بر شما!*

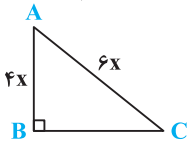
برگرفته از کتاب درسی

۱- در شکل مقابل، حاصل $\sin\hat{B}+\cos\hat{C}$ کدام است؟



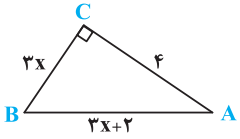
۱) ۱/۶
۲) ۱/۸
۳) ۱/۴
۴) ۱/۲

۲- در شکل مقابل، حاصل $\tan\hat{A}+\cot\hat{C}$ کدام است؟



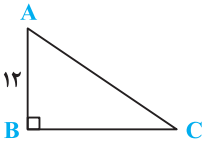
۱) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
۲) $\sqrt{13}$
۳) $\frac{\sqrt{13}}{2}$
۴) $\sqrt{5}$

۳- در مثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل، مقدار $\sin\hat{A}$ کدام است؟



۱) $\frac{4}{5}$
۲) $\frac{2}{5}$
۳) $\frac{3}{5}$
۴) $\frac{5}{9}$

۴- در مثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل، اگر $\tan\hat{A}=\frac{3}{4}$ و $AB=12$ باشد، محیط مثلث کدام است؟



۱) ۳۶
۲) ۲۵
۳) ۲۱
۴) ۳۵

۵- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، زاویهٔ A قائمه و $\tan\hat{C}=\frac{۵}{۱۲}$ است. مقدار $\cos\hat{B}+\cos\hat{C}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۰}{۱۳}$ ۲) $\frac{۱۷}{۱۳}$ ۳) $\frac{۷}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۲}{۱۳}$

۶- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، زاویهٔ A قائمه و $\cos\hat{B}=\frac{۴}{۵}$ است. مقدار $\tan\hat{C}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۷- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم $\hat{A}=۹۰^\circ$ و $AB=۲AC$. مقدار $\sin\hat{B}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

درسنامهٔ ۲

نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۰°، ۳۰°، ۴۵°، ۶۰° و ۹۰°

نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۰°، ۳۰°، ۴۵°، ۶۰° و ۹۰° از اهمیت بالایی برخوردار است و در همه‌جا مورد استفاده قرار می‌گیرد، پس حتماً آن‌ها را مطابق جدول زیر حفظ کنید.

نسبت‌های مثلثاتی / زاویه	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
tan	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف‌نشده
cot	تعریف‌نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰

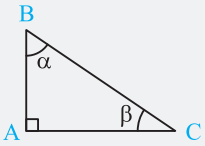
مثال حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\tan ۴۵^\circ \sin ۶۰^\circ \cos ۳۰^\circ + \sin ۳۰^\circ \cos ۶۰^\circ \cot ۴۵^\circ$$

پاسخ:

$$\tan ۴۵^\circ \sin ۶۰^\circ \cos ۳۰^\circ + \sin ۳۰^\circ \cos ۶۰^\circ \cot ۴۵^\circ = ۱\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times ۱=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}=۱$$

نکته اگر جمع زوایای α و β برابر ۹۰° باشد (α و β متمم هم باشند) در این صورت تساوی‌های زیر بین نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه وجود دارد:



$$\alpha+\beta=۹۰^\circ \Rightarrow \begin{cases}\sin\alpha=\cos\beta \ , \ \sin\beta=\cos\alpha\\ \tan\alpha=\cot\beta \ , \ \tan\beta=\cot\alpha\end{cases}$$

مثال دو زاویهٔ ۳۰° و ۶۰° متمم هم‌دیگرند ($۹۰^\circ=۶۰^\circ+۳۰^\circ$)، پس همان‌طوری که در جدول فوق می‌بینید، داریم:

پاسخ:

$$\sin ۳۰^\circ=\cos ۶۰^\circ=\frac{۱}{۲} \ , \ \sin ۶۰^\circ=\cos ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \ , \ \tan ۳۰^\circ=\cot ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \ , \ \tan ۶۰^\circ=\cot ۳۰^\circ=\sqrt{۳}$$

نکته

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \ , \ \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ , \ \tan\alpha=\frac{۱}{\cot\alpha}\Rightarrow \tan\alpha.\cot\alpha=۱$$

مثال حاصل عبارت $\tan ۲۰^\circ\times\tan ۷۰^\circ+\sin ۱۰^\circ-\cos ۸۰^\circ$ را به‌دست آورید.

پاسخ: با توجه به ویژگی دو زاویهٔ متمم داریم:

$$۱۰^\circ+۸۰^\circ=۹۰^\circ\Rightarrow \sin ۱۰^\circ=\cos ۸۰^\circ \quad , \quad ۲۰^\circ+۷۰^\circ=۹۰^\circ\Rightarrow \tan ۲۰^\circ=\cot ۷۰^\circ$$

با جای‌گذاری تساوی‌های به‌دست آمده در عبارت خواسته‌شده داریم:

$$\tan ۲۰^\circ\times\tan ۷۰^\circ+\sin ۱۰^\circ-\cos ۸۰^\circ=\underbrace{\cot ۷۰^\circ\times\tan ۷۰^\circ}_{۱}+\cancel{\cos ۸۰^\circ}-\cancel{\cos ۸۰^\circ}=۱+۰=۱$$

۸- کدام گزینه صحیح است؟ آزمون‌های گاج

۱) $\cos ۴۵^\circ + \sin ۴۵^\circ = ۲$ ۲) $\sin ۶۰^\circ = ۲\sin ۳۰^\circ$ ۳) $\tan ۶۰^\circ = ۲\cos ۳۰^\circ$ ۴) $۲\sin ۶۰^\circ = \tan ۴۵^\circ$

۹- حاصل $\cot^۲ ۶۰^\circ + ۱$ کدام است؟

۱) $۱ + \tan^۲ ۴۵^\circ$ ۲) $۱ - \tan^۲ ۳۰^\circ$ ۳) $۱ + \tan^۲ ۳۰^\circ$ ۴) $۲ + \tan^۲ ۴۵^\circ$

۱۰- عبارت $\sin^۴ x + \cos^۴ x$ به‌ازای کدام‌یک از مقادیر زیر برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌شود؟

۱) ۹۰° ۲) ۶۰° ۳) ۴۵° ۴) ۳۰°

۱۱- مقدار عددی عبارت $(\sin ۶۰^\circ - \sin ۴۵^\circ)(\cos ۳۰^\circ + \cos ۴۵^\circ)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) صفر

۱۲- حاصل عبارت $\frac{۱ - \cot^۲ ۶۰^\circ}{\cot^۲ ۶۰^\circ + ۱} \times \frac{\tan ۳۰^\circ}{۱ + \tan^۲ ۳۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۱۶}$

۱۳- اگر $A = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ باشد، آن‌گاه A کدام است؟ $\frac{۲\tan ۳۰^\circ + \sin ۶۰^\circ}{\sin^۲ ۴۵^\circ - \sqrt{۳}\cos ۳۰^\circ}$

۱) $-\frac{۷}{۶}$ ۲) $-\frac{۷}{۲}$ ۳) -۷ ۴) $-\frac{۷}{۳}$

۱۴- حاصل عبارت $\cot ۲^\circ \cot ۳^\circ \cot ۴۵^\circ \cot ۸۷^\circ \cot ۸۸^\circ$ کدام است؟

۱) $(\tan ۴۵^\circ)^۲$ ۲) ۲ ۳) $(\tan ۸۸^\circ)^۲$ ۴) $(\cot ۸۸^\circ)^۲$

۱۵- در صورتی که $\frac{\sin\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = \frac{۳}{۲}$ باشد، مقدار $\tan\theta$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۶- اگر $\tan x = \frac{۳}{۴}$ باشد، حاصل $A = \frac{۴}{\cos x} - \frac{۳}{\sin x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) ۱

۱۷- اگر $\tan\theta = ۰/۲$ باشد، مقدار $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{۲\sin\theta}$ کدام است؟ ریاضی داخل ۹۱

۱) ۳ ۲) ۱/۲ ۳) ۲ ۴) -۲

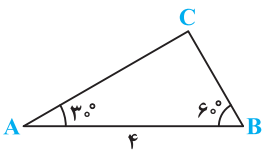
۱۸- اگر $\tan\alpha = \frac{۲}{۳}$، مقدار $\frac{-\cos\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) -۳ ۴) -۴

۱۹- اگر داشته باشیم $۳\cos\hat{A} + ۴\sin\hat{A} = ۰$، در این صورت $\tan\hat{A} + \cot\hat{A}$ کدام است؟

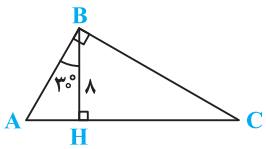
۱) $\frac{۱۲}{۲۵}$ ۲) $-\frac{۱۲}{۲۵}$ ۳) $-\frac{۲۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۲۵}{۱۲}$

۲۰- در شکل مقابل، محیط مثلث ABC کدام است؟



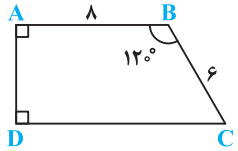
۱) $۲ + ۶\sqrt{۳}$ ۲) $۶ + ۲\sqrt{۳}$
۳) $۲ + ۳\sqrt{۶}$ ۴) $۴ + ۲\sqrt{۳}$

۲۱- در شکل مقابل، طول ضلع BC کدام است؟



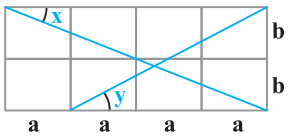
۱) ۸ ۲) $\frac{۱۶}{\sqrt{۳}}$
۳) ۱۶ ۴) $\frac{۸}{\sqrt{۳}}$

۲۲- در شکل مقابل، محیط ذوزنقهٔ ABCD کدام است؟



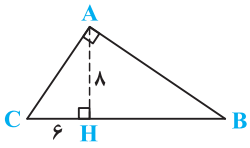
۱) $۲۵ + ۳\sqrt{۳}$ ۲) $۲۵ + \sqrt{۳}$
۳) $۲۴ + ۴\sqrt{۲}$ ۴) $۲۴ + \sqrt{۲}$

۲۳- در شکل مقابل، طول هر کدام از مستطیل‌ها a و عرض آن‌ها b است. در این صورت $\cot x$ کدام است؟



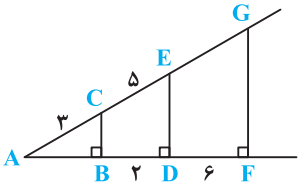
۱) $\frac{۳a}{۴b}\tan y$
۲) $\frac{۳}{۴}\tan y$
۳) $\frac{۳b}{۴a}\cot y$
۴) $\frac{۴}{۳}\cot y$

۲۴- با توجه به شکل مقابل، $\cos \hat{B}$ کدام است؟



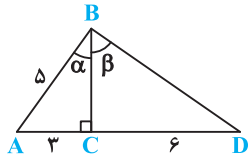
۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۳}{۵}$
۳) $\frac{۴}{۵}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۵- با توجه به شکل مقابل، $\sin \hat{G}$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی



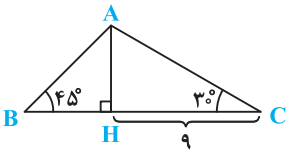
۱) $\frac{۵}{۶}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۵}$
۴) $\frac{۲}{۵}$

۲۶- با توجه به شکل مقابل کدام گزینه نادرست است؟



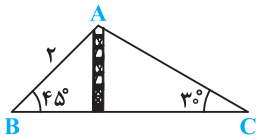
۱) $\cos\alpha = \frac{۴}{۵}$
۲) $\sin\beta = \frac{۶}{\sqrt{۵۲}}$
۳) $\tan \hat{A} = \cot\alpha$
۴) $\cot\beta = \frac{۳}{۲}$

۲۷- در شکل مقابل، طول AB کدام است؟



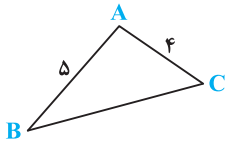
۱) $۳\sqrt{۳}$
۲) $۶\sqrt{۶}$
۳) $۳\sqrt{۶}$
۴) $۶\sqrt{۳}$

۲۸- یک آنتن (دکل) توسط دو سیم AB و AC مطابق شکل مهار شده است. در این صورت طول BC کدام است؟



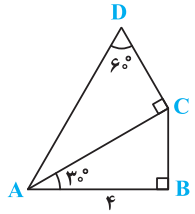
۱) $\sqrt{۶}+\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$
۳) $\sqrt{۲}+\sqrt{۶}$
۴) $۳\sqrt{۲}$

۲۹- در شکل مقابل، اگر $\cos \hat{C} = \frac{۳}{۴}$ باشد، آن‌گاه $\tan \hat{B}$ کدام است؟



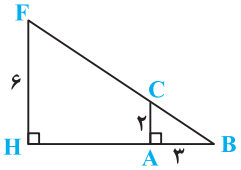
۱) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۷}}{۶}$
۳) $\frac{\sqrt{۱۴}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۱۴}}{۶}$

۳۰- در شکل مقابل، طول پاره‌خط CD کدام است؟



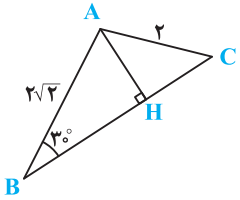
۱) ۴
۲) $\frac{۸}{۳}$
۳) ۸
۴) $\frac{۸}{\sqrt{۳}}$

۳۱- در شکل مقابل، اندازهٔ AH چند واحد است؟

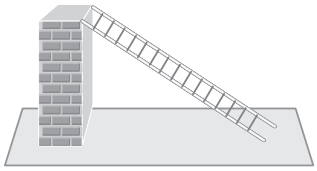


۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۳۲- زاویهٔ A در مثلث شکل مقابل، چند درجه است؟

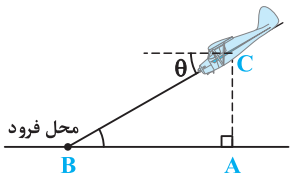


۱) ۶۰
۲) ۱۰۵
۳) ۹۰
۴) ۱۲۵



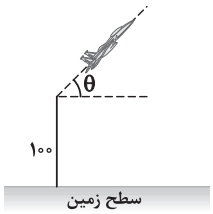
۳۳- نردبانی به طول ۳ متر را به دیواری تکیه داده‌ایم. اگر زاویهٔ نردبان با سطح زمین 30° باشد، ارتفاع دیوار چقدر است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۶
۲) ۱/۵
۳) ۴/۵
۴) ۵



۳۴- هواپیمایی در ارتفاع ۲km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با سطح افق θ باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطهٔ A فرود می‌آید؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $2\tan\theta$
۲) $\frac{\sin\theta}{2}$
۳) $2\cot\theta$
۴) $\frac{\cot\theta}{2}$

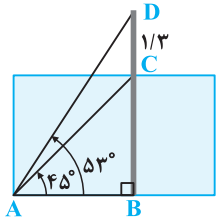


۳۵- موشکی مطابق شکل در ارتفاع ۱۰۰ متری از سطح زمین با زاویهٔ θ پرتاب می‌شود. اگر پس از طی ۱۰۰۰ متر با همین زاویه به ارتفاع ۶۰۰ متری از سطح زمین برسد، زاویهٔ پرتاب (θ) چقدر بوده است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) 30°
۲) 45°
۳) 60°
۴) 50°

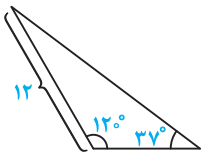
۳۶- شخصی با قد ۱۸۰ سانتی‌متر در فاصلهٔ ۲/۵ متری یک تیر چراغ برق به ارتفاع ۳ متر ایستاده است. این شخص چند سانتی‌متر به تیر نزدیک شود تا سایه‌اش ۲ برابر قدش شود؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۱۰
۲) ۲۰
۳) ۳۰
۴) ۴۰



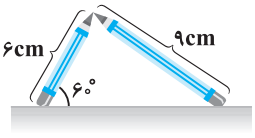
۳۷- در داخل حوضچهٔ یک شهربازی میله‌ای به‌صورت عمودی قرار گرفته است. اگر طول قسمت بیرون آب میله ۱/۳ متر باشد و قسمت انتهای میله با نقطه‌ای در انتهای حوضچه زاویهٔ 53° و قسمت ابتدایی بیرون آب با آن نقطه زاویهٔ 45° بسازد، طول میله کدام است؟ $(\tan 53^\circ \simeq \frac{3}{2})$

۱) ۲/۳
۲) ۲
۳) ۲/۶
۴) ۳/۹



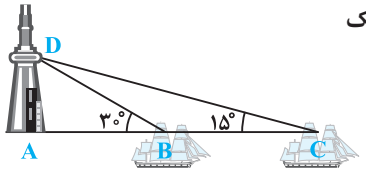
۳۸- شکل کلی کف یک موزهٔ تاریخی به‌صورت مقابل است. مساحت موزه کدام است؟ $(\tan 37^\circ = \frac{3}{4})$

۱) $72-18\sqrt{3}$
۲) $8\sqrt{3}-6$
۳) $72+18\sqrt{3}$
۴) $8\sqrt{3}+6$



۳۹- دو مداد به طول‌های ۶ و ۹ سانتی‌متر را به‌صورت زیر به هم تکیه داده‌ایم. فاصلهٔ پای دو مداد از هم روی زمین چند سانتی‌متر است؟

۱) $3\sqrt{7}$
۲) $3\sqrt{6}$
۳) $3+3\sqrt{6}$
۴) $3+3\sqrt{7}$

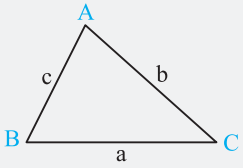


۴۰- دو کشتی مطابق شکل، نوری از یک برج مراقبت دریافت می‌کنند. اگر کشتی C نور را با زاویهٔ 15° و کشتی B نور را با زاویهٔ 30° نسبت به خط افق دریافت کنند و فاصلهٔ دو کشتی یک کیلومتر باشد، فاصلهٔ کشتی C از محل انتشار نور (D) چند کیلومتر است؟

۱) $2+\sqrt{3}$
۲) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$
۳) $2+2\sqrt{3}$
۴) $\sqrt{2+2\sqrt{3}}$

درسنامهٔ ۳

محاسبهٔ مساحت مثلث

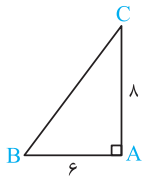


اگر دو ضلع یک مثلث و زاویهٔ بین این دو ضلع معلوم باشد، می‌توان از رابطه‌های زیر مساحت مثلث را محاسبه نمود.

$$S=\frac{1}{2}ac\sin\hat{B} \quad , \quad S=\frac{1}{2}ab\sin\hat{C} \quad , \quad S=\frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$$

پاسخ‌های تشریحی

۱ ۱ ابتدا با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس طول ضلع BC را می‌یابیم:

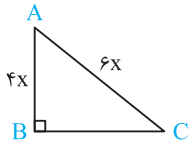


$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Rightarrow BC^۲ = ۶^۲ + ۸^۲ = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰ \Rightarrow BC = ۱۰$$

حال با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس داریم:

$$\begin{cases} \sin\hat{B} = \dfrac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ B}}{\text{وتر}} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{۸}{۱۰} \\ \cos\hat{C} = \dfrac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ C}}{\text{وتر}} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{۸}{۱۰} \end{cases} \Rightarrow \sin\hat{B} + \cos\hat{C} = \frac{۸}{۱۰} + \frac{۸}{۱۰} = \frac{۱۶}{۱۰} = ۱/۶$$

۲ ۴ ابتدا به کمک قضیهٔ فیثاغورس طول ضلع BC را می‌یابیم:



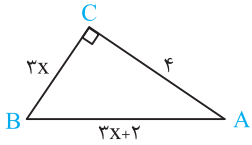
$$\Rightarrow AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ \Rightarrow (۶x)^۲ = (۴x)^۲ + BC^۲$$

$$\Rightarrow ۳۶x^۲ - ۱۶x^۲ = BC^۲ \Rightarrow BC^۲ = ۲۰x^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{۲۰}x$$

بنابراین:

$$\begin{cases} \tan\hat{A} = \dfrac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ A}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ A}} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\sqrt{۲۰}\,x}{۴x} = \dfrac{\sqrt{۲۰}}{۴} = \dfrac{\sqrt{۴\times۵}}{۴} = \dfrac{۲\sqrt{۵}}{۴} = \dfrac{\sqrt{۵}}{۲} \\ \cot\hat{C} = \dfrac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ C}}{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ C}} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\sqrt{۲۰}\,x}{۴x} = \dfrac{\sqrt{۲۰}}{۴} = \dfrac{\sqrt{۴\times۵}}{۴} = \dfrac{۲\sqrt{۵}}{۴} = \dfrac{\sqrt{۵}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \tan\hat{A} + \cot\hat{C} = \frac{\sqrt{۵}}{۲} + \frac{\sqrt{۵}}{۲} = \sqrt{۵}$$

۳ ۳ سینوس زاویهٔ A برابر است با:



$$\sin\hat{A} = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ A}}{\text{وتر}} = \frac{۳x}{۳x+۲} \qquad (*)$$

حال باید x را به کمک قضیهٔ فیثاغورس به‌دست آوریم:

$$AB^۲ = AC^۲ + BC^۲ \Rightarrow (۳x+۲)^۲ = ۴^۲ + (۳x)^۲ \Rightarrow \cancel{۹x^۲} + ۱۲x + ۴ = ۱۶ + \cancel{۹x^۲}$$

$$\Rightarrow ۱۲x = ۱۲ \Rightarrow x = ۱ \xrightarrow{(*)} \sin\hat{A} = \frac{۳(۱)}{۳(۱)+۲} = \frac{۳}{۵}$$

۴ ۱

$$\tan\hat{A} = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ A}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ A}} \xrightarrow[\tan\hat{A}=\frac{۳}{۴}]{\text{طبق فرض}} \frac{۳}{۴} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{۳}{\cancel{۴}} = \frac{BC}{\cancel{۱۲}\,۳} \Rightarrow BC = ۹$$

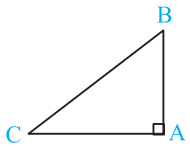
برای محاسبهٔ طول وتر از قضیهٔ فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۱۲^۲ + ۹^۲ = ۱۴۴ + ۸۱ = ۲۲۵ \Rightarrow AC = ۱۵$$

پس محیط مثلث برابر می‌شود با:

$$۱۲ + ۹ + ۱۵ = ۳۶$$

۵ ۲



$$\tan\hat{C} = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویهٔ C}}{\text{ضلع مجاور به زاویهٔ C}} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{۵}{۱۲} = \frac{AB}{AC}$$

برای راحتی کار فرض می‌کنیم $AB = ۵$ و $AC = ۱۲$ باشد. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$(BC)^۲ = (AB)^۲ + (AC)^۲ \Rightarrow (BC)^۲ = ۵^۲ + ۱۲^۲ = ۲۵ + ۱۴۴ = ۱۶۹ \Rightarrow BC = ۱۳$$

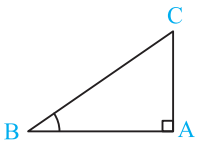
حال عبارت خواسته‌شده را می‌یابیم:

$$\cos\hat{C} + \cos\hat{B} = \frac{AC}{BC} + \frac{AB}{BC} = \frac{۱۲}{۱۳} + \frac{۵}{۱۳} = \frac{۱۷}{۱۳}$$

سؤال *دانش‌پژوه (سعیده آزاد)*: **آقا جذر ۱۶۹ رو باید حفظ باشیم؟**

پاسخ: *با درود فراوان بر شما باید بگم که بله باید حفظ باشی. یه کار مفید دیگه هم اینه که بدونید اعداد ۳، ۴ و ۵ و نیز اعداد ۵، ۱۲ و ۱۳ و هر مضربی از اونا فیثاغورسی هستن. چون از این اعداد تو تست‌ها فیلی سؤال میاد.*

۶ ۲



$$\cos\hat{B} = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ B}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{BC} \xrightarrow{\text{فرض}} \frac{۴}{۵} = \frac{AB}{BC}$$

برای راحتی کار می‌توان فرض کرد $AB = ۴$ و $BC = ۵$ باشد.

سؤال دانش‌پژوه (سودا نیک‌فر): **آقا، میشه همین‌طوری دلخواه $AB=۴$ و $BC=۵$ گرفت؟**

پاسخ: درود بر شما! ببین ما الکی الکی هم این‌کار رو نکردیم. جوری انتخاب کردیم که نسبت $\frac{۴}{۵}$ بشه. همیشهٔ همیشه که نه، ولی تو این تیپ مسائل که نسبت رو می‌خواد می‌تونید این کار رو بکنید و زماناً جلو بیفتید. حال ادامهٔ حل رو ببین:

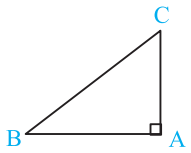
از قضیهٔ فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$(BC)^۲=(AB)^۲+(AC)^۲ \Rightarrow ۵^۲=۴^۲+(AC)^۲ \Rightarrow (AC)^۲=۲۵-۱۶=۹ \Rightarrow AC=۳$$

بنابراین:

$$\tan\hat{C}=\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ C}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ C}}=\frac{AB}{AC}=\frac{۴}{۳}$$

۷ ۱ طبق فرض $AB=۲AC$ است. می‌توان فرض کنیم $AC=۱$ و $AB=۲$ باشد. در این‌صورت با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس طول BC را می‌یابیم:



$$BC^۲=AB^۲+AC^۲ \Rightarrow BC^۲=۲^۲+۱^۲=۵ \Rightarrow BC=\sqrt{۵}$$

بنابراین:

$$\sin\hat{B}=\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ B}}{\text{وتر}}=\frac{AC}{BC}=\frac{۱}{\sqrt{۵}} \xrightarrow{\text{گویا کردن}} \sin\hat{B}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

سؤال دانش‌پژوه (ناصر افته‌پاری): **آقا ببخشید چی چی گفتین؟ گویا کردن؟**

پاسخ: بله ناصر! می‌دونم این حرف فیلی فراتر از ذهن تو بود و شاید تا مدت‌ها هنگ کنی! ولی تقصیر من نیست کتاب درسی، بی‌مقدمه از این امر استفاده کرده. فصل بعد بیشتر باهاش آشنا می‌شی. فعلاً همین‌قدر بدون که برای گویا کردن کسری که مخرج $\sqrt{a}$ داره باید صورت و مخرج رو توی $\sqrt{a}$ ضرب کنیم تا مخرج دیگه رادیکالی نباشه.

۸ ۳ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

$$\cos ۴۵^\circ+\sin ۴۵^\circ=۲ \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۲ \Rightarrow \sqrt{۲}=۲$$ ×

گزینهٔ (۲):

$$\sin ۶۰^\circ=۲\sin ۳۰^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲\left(\frac{۱}{۲}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱$$ ×

گزینهٔ (۳):

$$\tan ۶۰^\circ=۲\cos ۳۰^\circ \Rightarrow \sqrt{۳}=۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) \Rightarrow \sqrt{۳}=\sqrt{۳}$$ ✓

گزینهٔ (۴):

$$۲\sin ۶۰^\circ=\tan ۴۵^\circ \Rightarrow ۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=۱ \Rightarrow \sqrt{۳}=۱$$ ×

۹ ۳ راه اول:

$$۱+\cot^۲ ۶۰^\circ=۱+\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^۲=۱+\frac{۳}{۹}=۱+\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۳}$$

حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱):

$$۱+\tan^۲ ۴۵^\circ=۱+(۱)^۲=۱+۱=۲$$

گزینهٔ (۲):

$$۱-\tan^۲ ۳۰^\circ=۱-\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^۲=۱-\frac{۳}{۹}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$$

گزینهٔ (۳):

$$۱+\tan^۲ ۳۰^\circ=۱+\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^۲=۱+\frac{۳}{۹}=۱+\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۳}$$ ✓

گزینهٔ (۴):

$$۲+\tan^۲ ۴۵^\circ=۲+(۱)^۲=۲+۱=۳$$

راه دوم: چون ۳۰° و ۶۰° متمم یکدیگرند، پس $\cot ۶۰^\circ=\tan ۳۰^\circ$ و لذا داریم:

$۱+\cot^۲ ۶۰^\circ=۱+\tan^۲ ۳۰^\circ \Rightarrow$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱۰ ۳ **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ (۱):

$$\sin^۴ ۹۰^\circ + \cos^۴ ۹۰^\circ = ۱^۴ + ۰^۴ = ۱ \quad \times$$

گزینهٔ (۲):

$$\sin^۴ ۶۰^\circ + \cos^۴ ۶۰^\circ = \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۴ + \left(\frac{۱}{۲}\right)^۴ = \frac{۹}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۱۰}{۱۶} = \frac{۵}{۸} \quad \times$$

گزینهٔ (۳):

$$\sin^۴ ۴۵^\circ + \cos^۴ ۴۵^\circ = \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۴ + \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۴ = \frac{۴}{۱۶} + \frac{۴}{۱۶} = \frac{۸}{۱۶} = \frac{۱}{۲} \quad \checkmark$$

گزینهٔ (۴):

$$\sin^۴ ۳۰^\circ + \cos^۴ ۳۰^\circ = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۴ + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۴ = \frac{۱}{۱۶} + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۱۰}{۱۶} = \frac{۵}{۸} \quad \times$$

۱۱ ۲

$$(\sin ۶۰^\circ - \sin ۴۵^\circ)(\cos ۳۰^\circ + \cos ۴۵^\circ) = \underbrace{\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲ - \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ = \frac{۳}{۴} - \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۴}$$

۱۲ ۳

$$\frac{\tan ۳۰^\circ}{۱ + \tan^۲ ۳۰^\circ} \times \frac{۱ - \cot^۲ ۶۰^\circ}{\cot^۲ ۶۰^\circ + ۱} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱ + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^۲} \times \frac{۱ - \left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^۲}{\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^۲ + ۱} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱ + \frac{۳}{۹}} \times \frac{۱ - \frac{۳}{۹}}{\frac{۳}{۹} + ۱}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱ + \frac{۱}{۳}} \times \frac{۱ - \frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۳} + ۱} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{\frac{۴}{۳}} \times \frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۴}{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times \frac{۲}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۸}$$

۱۳ ۴

$$\frac{۲\tan ۳۰^\circ + \sin ۶۰^\circ}{\sin^۲ ۴۵^\circ - \sqrt{۳}\cos ۳۰^\circ} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}A \Rightarrow \frac{۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right) + \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ - \sqrt{۳}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}A$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{۴\sqrt{۳} + ۳\sqrt{۳}}{۶}}{\frac{۱}{۲} - \frac{۳}{۲}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}A \Rightarrow \frac{\frac{۷\sqrt{۳}}{۶}}{-۱} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}A \Rightarrow \frac{-۷\sqrt{۳}}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}A \Rightarrow A = -\frac{۷}{۳}$$

۱۴ ۱ می‌دانیم اگر α و β متمم هم باشند $(\alpha + \beta = ۹۰^\circ)$، آن‌گاه $\cot\alpha = \tan\beta$. پس داریم:

$$۲^\circ + ۸۸^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow \cot ۲^\circ = \tan ۸۸^\circ \quad , \quad ۳^\circ + ۸۷^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow \cot ۳^\circ = \tan ۸۷^\circ$$

$$\cot ۲^\circ \cot ۳^\circ \underbrace{\cot ۴۵^\circ}_{۱} \cot ۸۷^\circ \cot ۸۸^\circ = (\tan ۸۸^\circ)(\tan ۸۷^\circ)(۱)(\cot ۸۷^\circ)(\cot ۸۸^\circ)$$

$$= \underbrace{(\tan ۸۸^\circ \times \cot ۸۸^\circ)}_{۱}\underbrace{(\tan ۸۷^\circ \times \cot ۸۷^\circ)}_{۱} = ۱ \times ۱ = ۱$$

پس گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا حاصل گزینهٔ (۱) هم ۱ می‌شود.

۱۵ ۲

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = \frac{۳}{۲} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۲\sin\theta = ۳(\sin\theta - \cos\theta) \Rightarrow ۲\sin\theta = ۳\sin\theta - ۳\cos\theta$$

$$\Rightarrow ۳\cos\theta = \sin\theta \xrightarrow{\div \cos\theta} \frac{۳\cos\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow ۳ = \tan\theta$$

سؤال دانش‌پژوه (اصغر بالازاده): **آقا از کجا فهمیدید باید دو طرف رو به cos تقسیم کنید؟**

پاسخ: *درود بر خودم! به‌خاطر این‌که قبلاً بارها مشابهش رو دیده بودم و حالا یه کار معمولی برام محسوب می‌شه. شما هم با خوندن این کتاب، کم‌کم این کارها رو یاد می‌گیرین و پیشرفت می‌کنین.*

۱۶ ۱ ابتدا با توجه به فرض که $\tan x = \frac{۳}{۴}$ است، ارتباط $\sin x$ و $\cos x$ را می‌یابیم:

$$\tan x = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \sin x = \frac{۳}{۴}\cos x \qquad (*)$$

حال مقدار A را به‌دست می‌آوریم:

$$A = \frac{۴}{\cos x} - \frac{۳}{\sin x} \overset{(*)}{=\!=} \frac{۴}{\cos x} - \frac{۳}{\frac{۳}{۴}\cos x} = \frac{۴}{\cos x} - \frac{۱۲}{۳\cos x} = \frac{۴}{\cos x} - \frac{۴}{\cos x} = ۰$$

۱۷ **۱**

$$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{۲\sin\theta}\xrightarrow{\text{تفکیک کسر}}\frac{\sin\theta}{۲\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{۲\sin\theta}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲\tan\theta}\xrightarrow{\tan\theta=۰/۲}\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲(۰/۲)}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱۰}{۴}=\frac{۱۲}{۴}=۳$$

۱۸ **۱**

$$\tan\alpha=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{۲}{۳}\cos\alpha$$

حال داریم:

$$\frac{-\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}\xrightarrow{\sin\alpha=\frac{۲}{۳}\cos\alpha}\frac{-\cos\alpha-\frac{۲}{۳}\cos\alpha}{\frac{۲}{۳}\cos\alpha-\cos\alpha}=\frac{-\frac{۵}{۳}\cos\alpha}{-\frac{۱}{۳}\cos\alpha}=۵$$

۱۹ **۳**

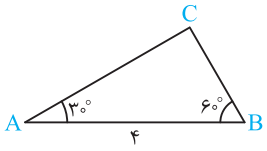
$$۳\cos\hat{A}+۴\sin\hat{A}=۰\xrightarrow{\div\sin\hat{A}}\frac{۳\cos\hat{A}}{\sin\hat{A}}+\frac{۴\sin\hat{A}}{\sin\hat{A}}=۰\Rightarrow ۳\cot\hat{A}+۴=۰$$

$$\Rightarrow ۳\cot\hat{A}=-۴\Rightarrow\cot\hat{A}=\frac{-۴}{۳}\xrightarrow{\tan\hat{A}=\frac{۱}{\cot\hat{A}}}\tan\hat{A}=\frac{۱}{-\frac{۴}{۳}}=-\frac{۳}{۴}$$

بنابراین:

$$\tan\hat{A}+\cot\hat{A}=-\frac{۳}{۴}+\left(-\frac{۴}{۳}\right)=\frac{-۹-۱۶}{۱۲}=\frac{-۲۵}{۱۲}$$

۲۰ **۲** مثلث ABC قائم‌الزاویه است، زیرا:



$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۳۰^\circ+۶۰^\circ+\hat{C}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{C}=۹۰^\circ$$

پس برای محاسبهٔ طول اضلاع AC و BC می‌توانیم از نسبت‌های مثلثاتی استفاده کنیم:

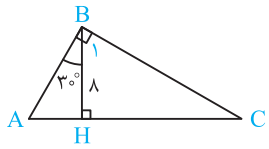
$$\sin ۳۰^\circ=\frac{BC}{AB}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{BC}{۴}\Rightarrow BC=۲$$

$$\sin ۶۰^\circ=\frac{AC}{AB}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{AC}{۴}\Rightarrow AC=۲\sqrt{۳}$$

بنابراین محیط مثلث برابر می‌شود با:

$$AB+BC+AC=۴+۲+۲\sqrt{۳}=۶+۲\sqrt{۳}$$

۲۱ **۳** چون $\hat{B}=۹۰^\circ$ است و قسمتی از آن ۳۰° می‌باشد، پس $\hat{B}_۱=۶۰^\circ$ بوده و داریم:

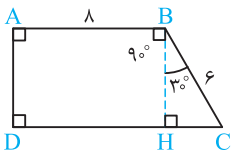


$$\cos\hat{B}_۱=\frac{BH}{BC}\Rightarrow\cos ۶۰^\circ=\frac{۸}{BC}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۸}{BC}\Rightarrow BC=۱۶$$

سؤال دانش‌پژوه (قاسم صلایی‌گ): **آقا ببخشید چرا $\cos B_۱$ رو نوشتید؟**

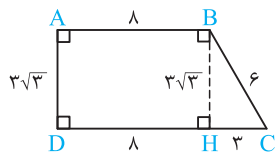
پاسخ: درود بر سایر نسبت‌ها! ولی کدوم از اون نسبت‌ها به اندازهٔ $\cos B_۱$ به درد ما می‌خوره؟ چون $\cos B_۱$ به BH (که اون رو داریم) و BC (که اون رو می‌خواهیم) ربط پیدا می‌کنه از اون استفاده کردیم. ولی مثلاً اگه بخواهیم از $\sin B_۱$ طول BC رو پیدا کنیم باید اندازهٔ CH رو بدونیم که مکافات داره.

۲۲ **۱** از نقطهٔ B بر ضلع CD عمود BH را رسم می‌کنیم. در این‌صورت زاویهٔ B به دو قسمت ۹۰° و $۳۰^\circ=۹۰^\circ-۱۲۰^\circ$ تقسیم می‌شود. حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCH، $\sin ۳۰^\circ$ و $\cos ۳۰^\circ$ را نوشته و ارتفاع BH و طول CH را به‌دست می‌آوریم:



$$\sin ۳۰^\circ=\frac{CH}{BC}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{CH}{۶}\Rightarrow CH=۳$$

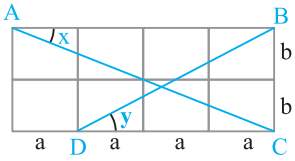
$$\cos ۳۰^\circ=\frac{BH}{BC}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{BH}{۶}\Rightarrow BH=۳\sqrt{۳}$$



بنابراین:

$$\text{محیط ذوزنقه}=AB+BC+CD+DA=۸+۶+۳+۸+۳\sqrt{۳}=۲۵+۳\sqrt{۳}$$

۲۳ ۴ **راه اول:** در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:



$$\cot x = \frac{AB}{BC} = \frac{۴a}{۲b} = \frac{۲a}{b} \qquad (*)$$

ولی در گزینه‌ها $\cot x$ برحسب $\tan y$ و $\cot y$ داده شده است. پس باید در مثلث BCD، $\tan y$ را به‌دست آورده و ببینیم چه ارتباطی با $\cot x$ دارد.

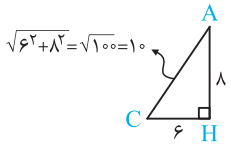
$$\overset{\Delta}{BCD}: \tan y = \frac{BC}{CD} = \frac{۲b}{۳a} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{۳}{۲}\tan y \xrightarrow{\text{طرفین تساوی را معکوس می‌کنیم.}} \frac{a}{b} = \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{\tan y} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{۲}{۳}\cot y$$

بنابراین با جای‌گذاری $\frac{a}{b} = \frac{۲}{۳}\cot y$ در رابطهٔ (*) داریم:

$$\cot x = ۲\left(\frac{a}{b}\right) = ۲\left(\frac{۲}{۳}\cot y\right) = \frac{۴}{۳}\cot y$$

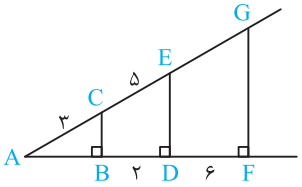
راه دوم (علی کنکوری): می‌توانیم به a و b مقادیر دلخواه (مثلاً $a = b = ۱$) داده و گزینه‌ها را امتحان کنیم.

۲۴ ۳ خب دنبال $\cos \hat{B}$ می‌گردیم ولی در مثلث داده‌شده، اطلاعات برای محاسبهٔ $\cos \hat{B}$ کافی نیست اما می‌دانیم $\hat{B} + \hat{C} = ۹۰^\circ$، زیرا مثلث ABC قائم‌الزاویه است. پس $\hat{B}$ و $\hat{C}$ متمم یکدیگر بوده و در نتیجه $\cos \hat{B} = \sin \hat{C}$. حال در مثلث ACH، به‌راحتی می‌توانیم $\sin \hat{C}$ را به‌دست آوریم:



$$\sin \hat{C} = \frac{AH}{AC} = \frac{۸}{۱۰} \Rightarrow \cos \hat{B} = \sin \hat{C} = \frac{۸}{۱۰} = \frac{۴}{۵}$$

۲۵ ۴ ابتدا $\cos \hat{A}$ را در سه مثلث زیر به‌دست می‌آوریم و از برابر قرار دادن آن‌ها طول پاره‌خط‌های AB و EG را محاسبه می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{ABC}: \cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{۳} \qquad (*)$$

$$\overset{\Delta}{ADE}: \cos \hat{A} = \frac{AD}{AE} = \frac{AB+۲}{۸} \qquad (**)$$

$$\overset{\Delta}{AFG}: \cos \hat{A} = \frac{AF}{AG} = \frac{AB+۸}{۸+EG} \qquad (***)$$

$$(*) = (**): \frac{AB}{۳} = \frac{AB+۲}{۸} \Rightarrow ۸AB = ۳AB + ۶ \Rightarrow ۵AB = ۶ \Rightarrow AB = \frac{۶}{۵}$$

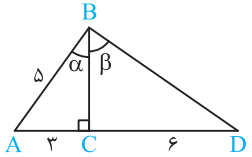
$$(*) = (***): \frac{AB}{۳} = \frac{AB+۸}{۸+EG} \xrightarrow{AB=\frac{۶}{۵}} \frac{\frac{۶}{۵}}{۳} = \frac{\frac{۶}{۵}+۸}{۸+EG} \Rightarrow \frac{۶}{۱۵} = \frac{\frac{۴۶}{۵}}{۸+EG}$$

$$\Rightarrow ۴۸ + ۶EG = \overset{۳}{\cancel{۱۵}}\left(\frac{۴۶}{\cancel{۵}}\right) \Rightarrow ۴۸ + ۶EG = ۱۳۸ \Rightarrow ۶EG = ۹۰ \Rightarrow EG = ۱۵$$

حال $\sin \hat{G}$ را می‌توانیم بیابیم:

$$\overset{\Delta}{AFG}: \sin \hat{G} = \frac{AF}{AG} = \frac{\frac{۶}{۵}+۲+۶}{۳+۵+۱۵} = \frac{\frac{۶}{۵}+۸}{۲۳} = \frac{\frac{۴۶}{۵}}{۲۳} = \frac{۲}{۵}$$

۲۶ ۴ ابتدا طول اضلاع مجهول را به‌دست می‌آوریم:



$$\overset{\Delta}{ABC}: \text{قضیهٔ فیثاغورس}: AB^۲ = AC^۲ + BC^۲ \Rightarrow ۵^۲ = ۳^۲ + BC^۲$$

$$\Rightarrow BC^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow BC = ۴$$

$$\overset{\Delta}{BCD}: BD^۲ = BC^۲ + CD^۲ \Rightarrow BD^۲ = ۴^۲ + ۶^۲ = ۱۶ + ۳۶ = ۵۲ \Rightarrow BD = \sqrt{۵۲}$$

حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱):

$$\cos \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{۴}{۵} \quad \checkmark$$

گزینهٔ (۲):

$$\sin \beta = \frac{CD}{BD} = \frac{۶}{\sqrt{۵۲}} \quad \checkmark$$

گزینهٔ (۳):

$$\tan \hat{A} = \cot \alpha \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{AC} \quad \checkmark$$

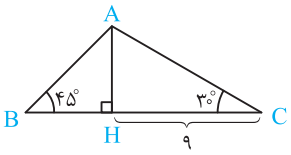
گزینهٔ (۴):

$$\cot \beta = \frac{BC}{CD} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳} \quad \times$$

سؤال *دانش‌پژوه (شهرام هدهدی):* **آقا یعنی چی؟ حتماً باید ۳تا گزینه‌رو امتحان کنیم تا تازه بفهمیم چهارمی غلطه؟**

پاسخ: *درود بر صبر و حوصله‌ات بچه! آیا وقت آن نرسیده که اعتماد پیدا کنی که توی این مدل تست‌ها باید از آخر شروع کنی؟*

۲۷ **۳** ابتدا در مثلث ACH، از $\tan ۳۰^\circ$ استفاده کرده و طول AH را می‌یابیم:

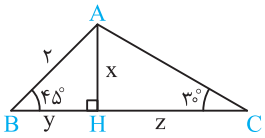


$$\tan ۳۰^\circ = \frac{AH}{CH} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{AH}{۹} \Rightarrow AH = ۳\sqrt{۳} \qquad (*)$$

حال در مثلث ABH، از $\sin ۴۵^\circ$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin ۴۵^\circ = \frac{AH}{AB} \xrightarrow{(*)} \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۳\sqrt{۳}}{AB} \Rightarrow \sqrt{۲}AB = ۶\sqrt{۳} \Rightarrow AB = \frac{۶\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}} \Rightarrow AB = \frac{۶\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۶\sqrt{۶}}{۲} = ۳\sqrt{۶}$$

۲۸ **۳**



$$\overset{\Delta}{ABH} : \cos ۴۵^\circ = \frac{y}{۲} \Rightarrow y = ۲\cos ۴۵^\circ = ۲\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = \sqrt{۲}$$

حال با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABH، x را می‌یابیم:

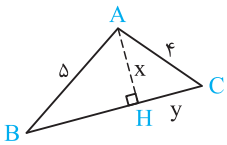
$$AB^۲ = BH^۲ + AH^۲ \Rightarrow ۲^۲ = (\sqrt{۲})^۲ + x^۲ \Rightarrow ۴ = ۲ + x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۲ \Rightarrow x = \sqrt{۲} \qquad (*)$$

$$\overset{\Delta}{ACH} : \tan ۳۰^\circ = \frac{x}{z} \xrightarrow{(*)} \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۲}}{z} \Rightarrow z = \sqrt{۳}\sqrt{۲} = \sqrt{۶}$$

بنابراین:

$$BC = y + z = \sqrt{۲} + \sqrt{۶}$$

۲۹ **۴** از A خطی عمود بر BC، رسم می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{ACH} : \cos \hat{C} = \frac{y}{۴} \xrightarrow[\cos \hat{C} = \frac{۳}{۴}]{\text{طبق فرض}} \frac{۳}{۴} = \frac{y}{۴} \Rightarrow y = ۳ \qquad (*)$$

حال قضیهٔ فیثاغورس را در مثلث ACH می‌نویسیم و x را می‌یابیم:

$$۴^۲ = x^۲ + y^۲ \xrightarrow{(*)} ۱۶ = x^۲ + ۹ \Rightarrow x^۲ = ۷ \xrightarrow{x>۰} x = \sqrt{۷} \qquad (**)$$

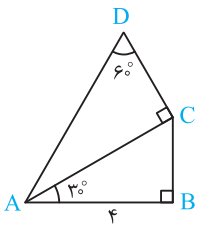
برای محاسبهٔ $\tan \hat{B}$، مجدداً از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABH استفاده می‌کنیم:

$$۵^۲ = (BH)^۲ + x^۲ \xrightarrow{(**)} ۲۵ - (\sqrt{۷})^۲ = (BH)^۲ \Rightarrow ۱۸ = (BH)^۲ \Rightarrow BH = \sqrt{۱۸} = \sqrt{۹ \times ۲} = ۳\sqrt{۲}$$

بنابراین:

$$\tan \hat{B} = \frac{x}{BH} = \frac{\sqrt{۷}}{۳\sqrt{۲}} \xrightarrow{\text{گویا کردن مخرج}} \frac{\sqrt{۷}}{۳\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۱۴}}{۶}$$

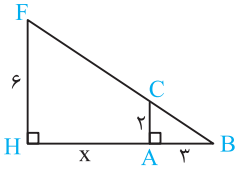
۳۰ **۲**



$$\overset{\Delta}{ABC} : \cos ۳۰^\circ = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{AB=۴} \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۴}{AC} \Rightarrow \sqrt{۳}AC = ۸ \Rightarrow AC = \frac{۸}{\sqrt{۳}} \qquad (*)$$

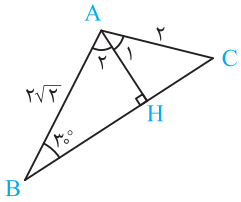
$$\overset{\Delta}{ACD} : \tan ۶۰^\circ = \frac{AC}{CD} \xrightarrow{(*)} \sqrt{۳} = \frac{\frac{۸}{\sqrt{۳}}}{CD} \Rightarrow \sqrt{۳}CD = \frac{۸}{\sqrt{۳}} \Rightarrow CD = \frac{\frac{۸}{\sqrt{۳}}}{\sqrt{۳}} = \frac{۸}{۳}$$

۳۱ **۳** برای حل سؤال کافی است تانژانت زاویهٔ B را در دو مثلث ABC و BFH به‌دست آوریم و سپس از برابر قرار دادن آن‌ها، x را بیابیم:



$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ABC} : \tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{۲}{۳} \\ \overset{\Delta}{BFH} : \tan \hat{B} = \frac{FH}{BH} = \frac{۶}{x+۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{۶}{x+۳} \Rightarrow ۲x + ۶ = ۱۸ \Rightarrow ۲x = ۱۲ \Rightarrow x = ۶$$

۳۲ **۲** زاویهٔ A در شکل روبه‌رو برابر $\hat{A}_1+\hat{A}_2$ است. حال این دو زاویه را به‌دست می‌آوریم:

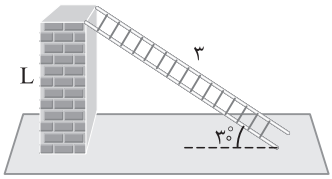


$$\overset{\Delta}{ABH}:\begin{cases}\hat{B}+\hat{A}_2+\hat{H}=180^\circ \Rightarrow 30^\circ+\hat{A}_2+90^\circ=180^\circ \Rightarrow \hat{A}_2=60^\circ\\ \sin 30^\circ=\frac{AH}{AB}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{AH}{2\sqrt{2}}\Rightarrow AH=\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{ACH}:\cos\hat{A}_1=\frac{AH}{AC}\Rightarrow\cos\hat{A}_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\hat{A}_1=45^\circ$$

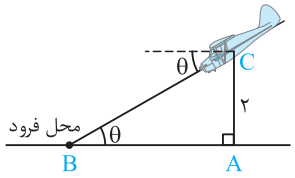
پس: $\hat{A}=\hat{A}_2+\hat{A}_1=60^\circ+45^\circ=105^\circ$

۳۳ **۲** با توجه به شکل به دنبال ارتفاع دیوار یعنی L هستیم. از نسبت مثلثاتی سینوس استفاده می‌کنیم:



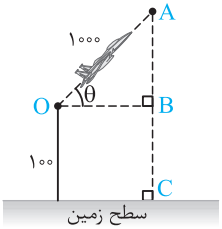
$$\sin 30^\circ=\frac{L}{3}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{L}{3}\Rightarrow L=\frac{3}{2}=1/5$$

۳۴ **۳**



$$\overset{\Delta}{ABC}:\tan\theta=\frac{AC}{AB}=\frac{2}{AB}\Rightarrow AB=\frac{2}{\tan\theta}\overset{\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}}{=\!=\!=}2\cot\theta$$

۳۵ **۱** مدل زیر را برای مسأله رسم می‌کنیم. در شکل زیر، ارتفاع از سطح زمین AC است که با توجه به فرض ۶۰۰ متر است.



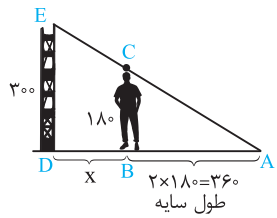
$$\overset{\Delta}{OAB}:\sin\theta=\frac{AB}{OA}\overset{OA=1000}{\Longrightarrow}AB=1000\sin\theta$$

$$AC=BC+AB\Rightarrow AC=100+1000\sin\theta$$

$$\overset{\text{طبق فرض}}{\overset{AC=600}{\Longrightarrow}}600=100+1000\sin\theta\Rightarrow 1000\sin\theta=500$$

$$\Rightarrow\sin\theta=\frac{500}{1000}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=30^\circ$$

۳۶ **۱** فرض کنید شخص بعد از نزدیک شدن به تیر، فاصله‌اش از تیر x باشد. در این‌صورت چون طول سایه دو برابر قدش است، پس طول سایه ۳۶۰ سانتی‌متر می‌شود و داریم:



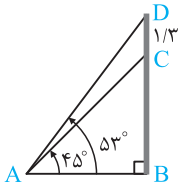
$$\overset{\Delta}{ABC}:\tan\hat{A}=\frac{BC}{AB}=\frac{180}{360}=\frac{1}{2}$$

$$\overset{\Delta}{ADE}:\tan\hat{A}=\frac{DE}{AD}=\frac{300}{x+360}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{300}{x+360}\Rightarrow x+360=600\Rightarrow x=240$$

فاصلهٔ اولیهٔ شخص تا تیر ۲۵۰ سانتی‌متر بود و در حالت ثانویه فاصله تا تیر ۲۴۰ سانتی‌متر شده و در نتیجه ۱۰ سانتی‌متر به سمت تیر نزدیک شده است.

۳۷ **۴**



$$\overset{\Delta}{ABC}:\tan 45^\circ=\frac{BC}{AB}\quad(*)$$

$$\overset{\Delta}{ABD}:\tan 53^\circ=\frac{DB}{AB}=\frac{DC+BC}{AB}\quad(**)$$

حال طرفین تساوی‌های (*) و (**) را به هم تقسیم می‌کنیم:

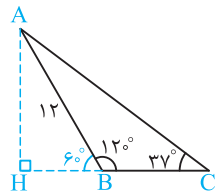
$$\frac{\tan 45^\circ}{\tan 53^\circ}=\frac{\frac{BC}{AB}}{\frac{DC+BC}{AB}}=\frac{BC}{DC+BC}\Rightarrow\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{BC}{1/3+BC}\Rightarrow 1/3+BC=\frac{3}{2}BC\Rightarrow 1/3=\frac{1}{2}BC\Rightarrow BC=2/6$$

$$\Rightarrow BD=BC+CD\Rightarrow BD=2/6+1/3=3/9$$

سؤال دانش‌پژوه (ناصر افته‌پاری): **آقا ما تا الان همچین چیزی توی شهربازی ندیدیم. اصلاً یه میله وسط آب به چه دردی می‌خوره؟**

پاسخ: درود بر تمام شهربازی‌های کشور! برای این‌که بری بالاش قوقولی قوقو کنی! تست رو حل کن بچه، تو چی کار داری این وسیله کجاست و به چه دردی می‌خوره.

۳۸ **۱** ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. داریم:

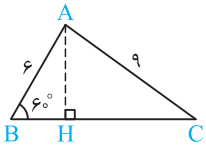


$$\overset{\Delta}{ABH}: \begin{cases} \sin ۶۰^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{AH}{۱۲} \Rightarrow AH = ۶\sqrt{۳} \\ \cos ۶۰^\circ = \frac{HB}{AB} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{HB}{۱۲} \Rightarrow HB = ۶ \end{cases} \quad (*)$$

$$\overset{\Delta}{ACH}: \tan ۳۷^\circ = \frac{AH}{HC} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \frac{۳}{۴} = \frac{۶\sqrt{۳}}{HB + BC} \Rightarrow ۳(۶ + BC) = ۲۴\sqrt{۳} \Rightarrow ۶ + BC = ۸\sqrt{۳} \Rightarrow BC = ۸\sqrt{۳} - ۶$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{AH \times BC}{۲} = \frac{۶\sqrt{۳}(۸\sqrt{۳} - ۶)}{۲} = ۷۲ - ۱۸\sqrt{۳}$$

۳۹ **۳** ارتفاع AH را رسم کرده و به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{ABH}: \begin{cases} \sin ۶۰^\circ = \frac{AH}{۶} \Rightarrow AH = ۶\sin ۶۰^\circ = ۶\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = ۳\sqrt{۳} & (*) \\ \cos ۶۰^\circ = \frac{BH}{۶} \Rightarrow BH = ۶\cos ۶۰^\circ = ۶\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۳ & (**) \end{cases}$$

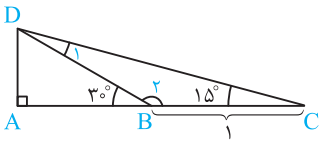
حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH، از قضیهٔ فیثاغورس استفاده کرده و طول HC را می‌یابیم:

$$AC^۲ = AH^۲ + HC^۲ \overset{(*)}{\Longrightarrow} ۹^۲ = (۳\sqrt{۳})^۲ + HC^۲ \Rightarrow HC^۲ = ۸۱ - ۲۷ = ۵۴ \Rightarrow HC = \sqrt{۵۴} = ۳\sqrt{۶} \quad (***)$$

بنابراین فاصلهٔ پای دو مداد از هم روی زمین برابر می‌شود با:

$$BC = BH + HC \underset{(***)}{\overset{(**)}{=}} ۳ + ۳\sqrt{۶}$$

۴۰ **۲**

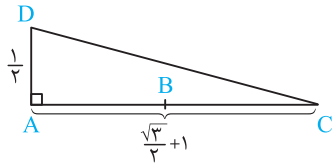


$$\hat{B}_۲ = (۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ) = ۱۵۰^\circ \Rightarrow \hat{D}_۱ = ۱۸۰^\circ - (۱۵۰^\circ + ۱۵^\circ) = ۱۵^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{C} \Rightarrow \text{مثلث } DBC \text{ متساوی‌الساقین است} \Rightarrow DB = BC = ۱ \quad (*)$$

$$\overset{\Delta}{ABD}: \begin{cases} \sin ۳۰^\circ = \frac{AD}{DB} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \frac{۱}{۲} = \frac{AD}{۱} \Rightarrow AD = \frac{۱}{۲} \\ \cos ۳۰^\circ = \frac{AB}{DB} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{AB}{۱} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{cases}$$

حال برای محاسبهٔ DC (فاصلهٔ کشتی C از محل انتشار نور) از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ACD استفاده می‌کنیم:



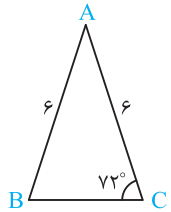
$$DC^۲ = AD^۲ + AC^۲ \Rightarrow DC^۲ = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ + \underbrace{\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲} + ۱\right)^۲}_{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}}$$

$$\Rightarrow DC^۲ = \frac{۱}{۴} + \frac{۳}{۴} + ۱ + ۲(۱)\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) \Rightarrow DC^۲ = ۱ + ۱ + \sqrt{۳} = ۲ + \sqrt{۳} \Rightarrow DC = \sqrt{۲ + \sqrt{۳}}$$

۴۱ **۴**

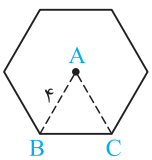
$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}(AB)(AC)\sin \hat{A} = \frac{۱}{۲}(۵)(۴)\sin ۶۰^\circ = ۲۰\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = ۱۰\sqrt{۳}$$

۴۲ **۲** مثلث ABC متساوی‌الساقین است، لذا $\hat{B} = \hat{C} = ۷۲^\circ$. بنابراین $\hat{A} = ۱۸۰^\circ - (۷۲^\circ + ۷۲^\circ) = ۳۶^\circ$. داریم:



$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۶ \times \sin ۳۶^\circ = ۱۸ \times ۰/۶ = ۱۰/۸$$

۴۳ **۳** با توجه به درسنامه، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، پس $BC = AB = ۴$. حال از فرمول مساحت شش‌ضلعی منتظم استفاده می‌کنیم:



$$\text{مساحت} = \frac{۳\sqrt{۳}a^۲}{۲} \underset{a=۴}{=\!=} \frac{۳\sqrt{۳}(۴)^۲}{۲} = \frac{۳\sqrt{۳}(۱۶)}{۲} = ۲۴\sqrt{۳}$$