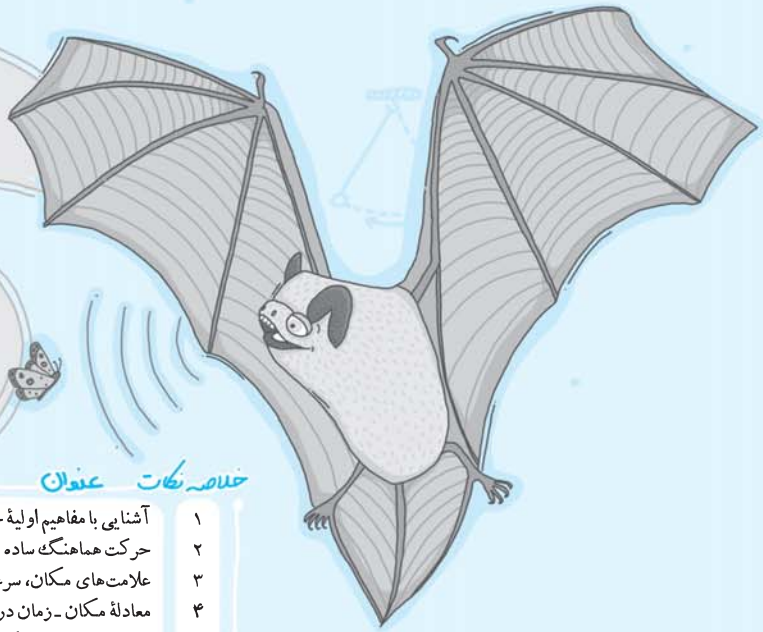
نوسان و امواج



پایه دوازدهم

فصل سوم

۴ ۱۰۲۰ برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱ **آشنایی با مفاهیم اولیهٔ حرکت نوسانی** (تست‌های ۱۰۲۰ تا ۱۰۳۲)

به طور کلی حرکت رفت و برگشتی پی‌درپی یک جسم رو حرکت نوسانی میگن، نوسان‌ها می‌تونن به دو صورت دوره‌ای و غیردوره‌ای انجام بشن که تو ادامه روی حرکتای دوره‌ای کار می‌کنیم ...

حرکت نوسانی دوره‌ای

به طور کلی حرکت نوسانی که هر دور آن در دورهای دیگر دقیقاً تکرار شود را **حرکت نوسانی دوره‌ای** گویند. شکل مقابل تصویری از ریتم قلب یک انسان سالم را نشان می‌دهد که نوعی از حرکت نوسانی دوره‌ای می‌باشد، چون هر دور از آن در دورهای بعد تکرار می‌شود.

در ادامه می‌خواهیم به معرفی مفاهیم دورهٔ تناوب، بسامد و بسامد زاویه‌ای بپردازیم.

دورهٔ تناوب (پریود): در شکل فوق، به هر یک از نقش‌های تصویر که دائماً تکرار می‌شود، یک **چرخه (سیکل)** گفته می‌شود. مدت زمان هر یک از این چرخه‌ها را دورهٔ تناوب (پریود) گویند و با T نمایش می‌دهند و یکای آن در SI ثانیه (s) است.

بسامد (فرکانس): تعداد نوسان‌های انجام‌شده در واحد زمان را بسامد گویند و آن را با f نمایش می‌دهند و یکای آن در SI هرتز (Hz) است.

تذکر با توجه به تعریف بسامد و دورهٔ تناوب، مشخص است که این دو پارامتر عکس یک‌دیگر هستند.

$$f = \frac{1}{T}$$

تذکر به سادگی می‌توان نشان داد که اگر در زمان t، نوسان دوره‌ای n بار تکرار شود، پارامترهای T و f برابر است با:

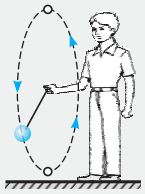
$$T = \frac{t}{n}, f = \frac{n}{t}$$

بسامد زاویه‌ای: کمیت دیگری که در حرکت نوسانی کاربرد زیادی دارد، بسامد زاویه‌ای می‌باشد که به صورت مقابل تعریف می‌شود و یکای آن در SI رادیان بر ثانیه است:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

حالا بریم با دو تا تمرین خوب، روی موضوع بالا مسلط بشیم ...

تمرین ۱ **مطابق شکل، پسر بچه‌ای گلوله‌ای را به انتهای نخ بسته و آن را در صفحهٔ قائم در هر دقیقه ۳۰ دور می‌چرخاند. حرکت این گلوله ..... بوده و فرکانس آن در SI ..... می‌باشد.** (تألیفی)



۱) نوسان دوره‌ای ـ $\frac{1}{2}$
۲) نوسان غیردوره‌ای ـ $\frac{1}{2}$
۳) نوسان دوره‌ای ـ ۲
۴) نوسان غیردوره‌ای ـ ۲

پاسخ از آن‌جایی که حرکت گلوله در هر دور کاملاً تکرار می‌شود، بنابراین حرکت آن از نوع نوسان دوره‌ای می‌باشد و فرکانس آن برابر است با:

$$f = \frac{n}{t} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}\,Hz$$ بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

تمرین ۲ **بسامد زاویه‌ای چرخی $300\,rad/min$ است. این چرخ در مدت ۶ ثانیه، چند دور می‌چرخد؟ ($\pi \simeq 3$)** (تألیفی)

۱) ۲
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۳۰

پاسخ ابتدا بسامد زاویه‌ای را برحسب rad / s به‌دست آورده و با توجه به آن دورهٔ تناوب چرخ برابر است با:

$$\omega = 300\frac{rad}{min} = 300\frac{rad}{(60s)} = 5\,rad/s$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{\pi \simeq 3} T = \frac{2\pi}{\omega} \simeq \frac{6}{\omega} \xrightarrow{\omega = 5 rad/s} T = \frac{6}{5}s$$

در ادامه تعداد دوری که چرخ در مدت ۶ ثانیه می‌چرخد برابر است با:

$$T = \frac{t}{n} \Rightarrow n = \frac{t}{T} = \frac{6}{\frac{6}{5}} = 5$$ دور (گزینهٔ ۲)

ضربان قلب یک انسان در یک بازهٔ زمانی معین را می‌توان یک حرکت نوسانی دوره‌ای در نظر گرفت، بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است. سایر گزینه‌ها با توجه به خلاصه نکات قبل صحیح هستند.

۱۰۲۱ **۴** حرکت نوسانی که هر چرخهٔ آن در دورهای دیگر دقیقاً تکرار شود، نوسان دوره‌ای نام دارد. بنابراین نمودار مکان ـ زمان رسم‌شده در گزینهٔ (۴) نمی‌تواند مربوط به یک حرکت نوسان دوره‌ای باشد (به عدم تکرار سیکل‌ها توجه کنید.)

۱۰۲۲ **۳** برای پاسخ دادن به این سؤال، هر یک از گزاره‌ها را جداگانه بررسی می‌کنیم:

الف) تعداد نوسان‌های انجام‌شده در واحد زمان را بسامد (فرکانس) می‌نامند. عقربهٔ ساعت‌شمار در هر ۱۲ ساعت یک دور کامل می‌زند. بنابراین بسامد حرکت آن برابر است با:

$$f=\frac{n}{t}=\frac{۱}{\underbrace{۱۲\times ۶۰}_{\text{تبدیل به دقیقه}}\times \underbrace{۶۰}_{\text{تبدیل به ثانیه}}}\,Hz$$

ب) عقربهٔ دقیقه‌شمار در هر ۶۰ دقیقه یک دور کامل طی می‌کند و عقربهٔ ثانیه‌شمار در هر دقیقه یک دور کامل طی می‌کند. بنابراین تعداد دورهایی که عقربهٔ ثانیه‌شمار در یک مدت زمان معین طی می‌کند، ۶۰ برابر عقربهٔ دقیقه‌شمار بوده و در نتیجه بسامد عقربهٔ دقیقه‌شمار، $\frac{۱}{۶۰}$ برابر بسامد عقربهٔ ثانیه‌شمار است.

ج) کرهٔ زمین در هر ۲۴ ساعت یک دور کامل به دور محور خود می‌چرخد. بنابراین دورهٔ حرکت وضعی زمین به دور محور خود برابر ۲۴ ساعت است.

د) دورهٔ حرکت عقربهٔ دقیقه‌شمار برابر ۶۰ دقیقه (یا همان یک ساعت) و دورهٔ حرکت عقربهٔ ساعت‌شمار برابر ۱۲ ساعت است. بنابراین دورهٔ حرکت عقربهٔ دقیقه‌شمار، $\frac{۱}{۱۲}$ برابر دورهٔ حرکت عقربهٔ ساعت‌شمار است.

بنابراین فقط گزارهٔ (ج) صحیح بوده و سه گزارهٔ دیگر نادرست هستند.

۱۰۲۳ **۱** با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۱)، گزینهٔ (۱) درست است.

۱۰۲۴ **۲** در صورتی که یک متحرک در مدت زمان t ثانیه، n دور بر روی دایره بچرخد، داریم:

$$\text{زمان تناوب}: T=\frac{t}{n}=\frac{۱۰}{۵}=۲s \quad \text{و} \quad \text{فرکانس}: f=\frac{n}{t}=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}Hz$$

دقت: تفاوت گزینه‌های (۲) و (۳)، در واحد نوشته‌شده در جلوی مقادیر T و f است.

۱۰۲۵ **۱** با توجه به پاسخ قسمت (د) در تست ۱۰۲۲، دورهٔ حرکت عقربهٔ ساعت‌شمار، ۱۲ برابر دورهٔ حرکت عقربهٔ دقیقه‌شمار است. بنابراین بسامد حرکت عقربهٔ ساعت‌شمار $\frac{۱}{۱۲}$ برابر بسامد حرکت عقربهٔ دقیقه‌شمار است. $\left(f=\frac{۱}{T}\right)$

۱۰۲۶ **۲** متحرک در مدت ۴/۵s یک دور بر روی دایره چرخیده است و در نتیجه دورهٔ تناوب حرکت متحرک ۴/۵s است. بنابراین بسامد زاویه‌ای این متحرک برابر است با:

$$\text{بسامد زاویه‌ای}: \omega=\frac{۲\pi}{T} \quad \text{و} \quad T=۴/۵s\Rightarrow \omega=\frac{۲\pi}{۴/۵}=\frac{۲\pi}{\frac{۹}{۲}}=\frac{۴}{۹}\pi\ rad/s$$

۱۰۲۷ **۴** با توجه به رابطهٔ مقابل داریم:

$$T=\frac{۱}{f}=\frac{۱}{۵\times ۱۰^{۶}}s=\frac{۱}{۵\times ۱۰^{۶}}\times ۱۰^{۶}\mu s=۰/۲\mu s$$

۱۰۲۸ **۲** با توجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۱)، گزینهٔ (۲) صحیح است.

۱۰۲۹ **۱** کرهٔ زمین در هر شبانه‌روز (۲۴ ساعت) یک دور حول محور خود می‌چرخد. بنابراین بسامد زاویه‌ای آن برابر است با:

$$T=۲۴h=۲۴\times ۶۰\times ۶۰s\Rightarrow \omega=\frac{۲\pi}{T}\simeq\frac{۲\times ۳}{۲۴\times ۶۰\times ۶۰}=\frac{۱}{۱۴۴۰۰}rad/s$$

۱۰۳۰ **۲** طبق صورت سؤال $\frac{\omega_A}{\omega_B}=\alpha$ است. بنابراین با توجه به روابط زیر می‌توان نوشت:

$$\omega=۲\pi f\xrightarrow{\omega\propto f}\frac{f_B}{f_A}=\frac{\omega_B}{\omega_A}=\frac{۱}{\alpha}$$

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\xrightarrow{\omega\propto\frac{۱}{T}}\frac{T_B}{T_A}=\frac{\omega_A}{\omega_B}=\alpha$$

۱۰۳۱ **۳** با توجه به اطلاعات سؤال می‌توان نوشت:

$$\frac{\omega_A}{\omega_B}=۲\xrightarrow{\omega=۲\pi f}\frac{f_A}{f_B}=۲\xrightarrow[t_A=t_B]{f_A=\frac{n_A}{t_A},\ f_B=\frac{n_B}{t_B}}\frac{f_A}{f_B}=\frac{n_A}{n_B}=۲\xRightarrow{n_A=n_B+۲۰}\frac{n_B+۲۰}{n_B}=۲\Rightarrow n_B=۲۰$$

بنابراین در مدت زمان یک دقیقه، نوسانگر B، ۲۰ دور طی می‌کند و در نتیجه بسامد حرکت آن برابر است با:

$$f_B=\frac{n_B}{t_B}=\frac{۲۰}{۶۰}=\frac{۱}{۳}Hz$$

۱۰۳۲ **۴** با توجه به اطلاعات سؤال و رابطهٔ $\omega=\frac{۲\pi}{T}$ می‌توان نوشت:

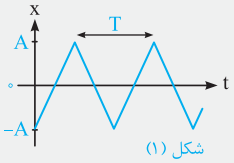
$$\omega_A=\omega_B+\frac{۲۵}{۱۰۰}\omega_B=\frac{۱۲۵}{۱۰۰}\omega_B=\frac{۵}{۴}\omega_B\Rightarrow\frac{\omega_B}{\omega_A}=\frac{۴}{۵}$$

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\frac{T_A}{T_B}=\frac{\omega_B}{\omega_A}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow T_A=\frac{۴}{۵}T_B=\frac{۸۰}{۱۰۰}T_B\Rightarrow$$ دورهٔ حرکت A، ۲۰ درصد کم‌تر از دورهٔ حرکت B است.

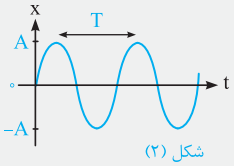
۱۰۳۳ ۲ برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۲ — حرکت هماهنگ ساده (تست‌های ۱۰۳۳ تا ۱۰۴۰)

حرکت هماهنگ ساده یا نوسانی ساده، یه نمونهٔ ساده از حرکت نوسان دوره‌ای محسوب میشه که روی یه خط راسته. تو این خلاصه نکات، می‌خوایم مفاهیم اولیش رو بررسی کنیم ...



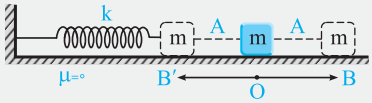
شکل (۱)



شکل (۲)

در خلاصه نکات قبل، با حرکت نوسانی دوره‌ای آشنا شدید. حرکت دوره‌ای که نوسان‌های آن به صورت سینوسی انجام شود را **حرکت هماهنگ ساده (SHM)** گویند. به طور مثال در هر دو شکل مقابل، حرکت از نوع نوسانی دوره‌ای می‌باشد، اما فقط شکل (۲) یک حرکت هماهنگ ساده را نشان می‌دهد. هر نوسان دوره‌ای را در فیزیک، معمولاً به شکل مجموعی از هماهنگ‌های ساده بازنویسی می‌کنند.

درک کامل از حرکت هماهنگ ساده با بررسی نوسانات دستگاه جرم و فنر



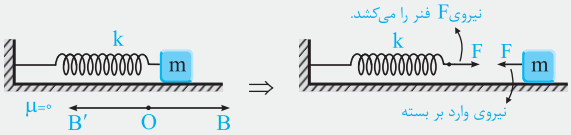
برای درک بهتر حرکت هماهنگ ساده، به شکل مقابل توجه کنید. در این شکل، بسته‌ای به یک فنر متصل شده و فنر در نقطهٔ O، طول عادی خود را دارد. این بسته را به اندازهٔ A از نقطهٔ O منحرف کرده و رها می‌کنیم. با انجام این عمل بسته بر روی پاره‌خط BB' مرتباً نوسان می‌کند.

نکات مهم و کاربردی

۱ در نقطهٔ O (نقطهٔ تعادل) تغییر طول فنر صفر بوده و طبق رابطهٔ $F = k\Delta L$، نیروی وارد بر بسته صفر است.

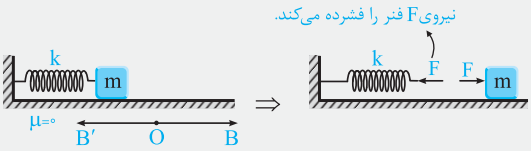
۲ با توجه به رابطهٔ $F = k\Delta L$، هر اندازه بسته را از نقطهٔ O بیشتر دور کنیم، اندازهٔ نیرویی که فنر بر بسته اعمال می‌کند، بزرگ‌تر خواهد بود.

۳ در نقطهٔ O شتاب بسته نیز صفر است ($F = ۰ \Rightarrow a = ۰$).



۴ از O تا B، فنر کشیده شده و جهت نیروی وارد بر بسته، به سمت چپ (یعنی به سمت نقطهٔ O) است.

۵ از O تا B'، فنر فشرده شده و جهت نیروی وارد بر بسته، به سمت راست (یعنی مجدداً به سمت نقطهٔ O) است.



۶ با توجه به مفاهیم ارائه شده در فصل دینامیک، نیروی وارد بر نوسانگر همواره به سمت نقطهٔ تعادل و یا همان مرکز نوسان می‌باشد، این موضوع از نکات (۴) و (۵) نیز دریافت می‌شود.

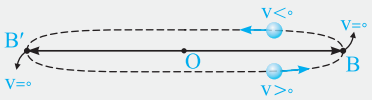
یک نکتهٔ اساسی: در نقاط B' و B که فنر بیشترین تغییر طول ممکن را دارد، نیروی وارد بر نوسانگر بیشینه است. با نزدیک شدن بسته به مرکز نوسان، مقدار نیروی وارد بر نوسانگر کاهش می‌یابد، زیرا تغییر طول فنر کاهش می‌یابد و در مرکز نوسان نیروی وارد بر نوسانگر صفر است.

تذکر با توجه به رابطهٔ $\sum F = ma$، نکتهٔ بیان‌شده در مورد شتاب نوسانگر نیز برقرار است.

تو سه تا تمرین بعدی، کلی اهداف آموزشی داریم که باید بهش برسید، پس با دقت بررسیشون کنید ...

تمرین ۱ **به نظر شما تندی حرکت نوسانگر در نقاط B و B' چه‌قدر است؟ در نقطهٔ O چه‌طور؟**

پاسخ برای بررسی این سؤال به نکات زیر توجه می‌کنیم:

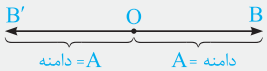


۱ با توجه به شکل مقابل، در نقاط B و B'، نوسانگر تغییر جهت می‌دهد و تندی آن صفر است. به این نقاط، **نقاط بازگشت** نوسانگر می‌گویند.

۲ با توجه به صفر شدن تندی در B و B'، با حرکت بسته از این نقاط به سمت O، مقدار تندی متحرک افزایش می‌یابد و بیشترین مقدار تندی بسته در نقطهٔ O می‌باشد. جالب است که در این نقطه نیرو و شتاب وارد بر نوسانگر صفر است (چرا؟).

جمع‌بندی

B'	O	B
$v = ۰$	$\lvert v\rvert = v_{max}$	$v = ۰$
$\lvert a\rvert = a_{max}$	$\lvert a\rvert = ۰$	$\lvert a\rvert = a_{max}$
$\lvert F\rvert = F_{max}$	$\lvert F\rvert = ۰$	$\lvert F\rvert = F_{max}$



تذکر به بیشترین فاصلهٔ متحرک از مرکز نوسان، **دامنهٔ نوسان** می‌گویند و آن را با A نشان می‌دهند.

تمرین۲ در یک حرکت نوسانی هماهنگ ساده: (منتخب سراسری قبل از ۸۰)

۱) جهت سرعت همیشه به‌طرف مرکز نوسان است. ۲) تندی در مرکز نوسان صفر است.

۳) اندازهٔ سرعت همواره کاهش می‌یابد. ۴) اندازهٔ شتاب در دو انتهای مسیر حداکثر است.

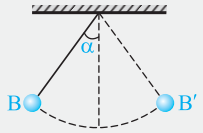
پاسخ با توجه به نکاتی که در این خلاصه نکات یاد گرفتیم، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱ جهت نیرو و شتاب همواره به طرف مرکز نوسان است، اما جهت سرعت (جهت حرکت متحرک)، الزاماً به سمت مرکز نوسان نیست.

۲ بزرگی سرعت (تندی) جسم در مرکز نوسان بیشینه و در دو انتهای مسیر صفر است.

۳ مقدار سرعت ($|v|$) در هنگام نزدیک شدن به مرکز نوسان افزایش و در هنگام دور شدن از مرکز نوسان کاهش می‌یابد.

۴ اندازهٔ شتاب نوسانگر در دو انتهای مسیر بیشینه بوده و در مرکز نوسان صفر است. بنابراین تنها گزینهٔ (۴) صحیح است.



تمرین۳ در شکل مقابل، در شرایط خلأ گلولهٔ آونگ را از وضع تعادل ۳۰ درجه منحرف کرده و رها می‌کنیم تا بر روی کمان نشان داده‌شده، نوسان کند. آیا حرکت این گلوله نوسانی ساده است؟

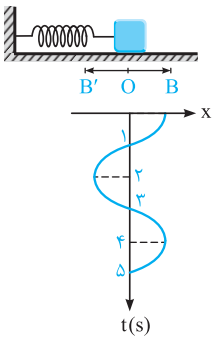
پاسخ خیر، زیرا حرکت هماهنگ ساده بر روی یک مسیر مستقیم و حول نقطه‌ای به نام مرکز نوسان انجام می‌شود. در این شکل، مسیر حرکت به صورت خط مستقیم نیست. در شکل فوق اگر زاویهٔ α کوچک باشد (کوچکتر از ۶ درجه) کمان BB' را با تقریب مناسبی با یک خط می‌توان جایگزین کرد و حرکت را نوسانی ساده فرض کرد. این موضوع را در ادامهٔ فصل نوسان (در قسمت آونگ ساده) بیشتر بررسی می‌کنیم.

حرکت هماهنگ ساده، نوعی از حرکت نوسانی دوره‌ای می‌باشد که به صورت سینوسی رخ می‌دهد. به عبارت دیگر، به نوسان‌های سینوسی، حرکت هماهنگ ساده گفته می‌شود. در این سؤال، هر یک از حرکت‌های (الف)، (ب) و (ه) را می‌توان به صورت حرکت هماهنگ ساده در نظر گرفت.

۱۰۳۴ ۴ در فیزیک هر حرکت دوره‌ای را به صورت مجموعه‌ای از حرکت‌های سینوسی (SHM) مدل‌سازی می‌کنند و گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱۰۳۵ ۱ در حرکت هماهنگ ساده، نمودار مکان ـ زمان به صورت فرم کلی سینوسی می‌باشد (دقت شود که به طور عمومی، به همهٔ تابع‌های سینوسی و کسینوسی، تابع سینوسی گفته می‌شود) و گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱۰۳۶ ۴ برای پاسخ دادن به این سؤال، هر یک از گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم:



الف) در لحظات $t = 1s$ ، $t = 3s$ فنر به طول عادی خود می‌رسد، بنابراین در ۴ ثانیهٔ اول، دو بار فنر به طول عادی خود می‌رسد و این گزاره درست است.

ب) در لحظهٔ $t_1 = 0$ ، فنر بیشترین کشیدگی خود را داشته و در نقطهٔ B قرار دارد. با رها کردن جسم، فنر فشرده شده و در لحظهٔ $t = 2s$ ، به حداکثر فشردگی خود می‌رسد. بنابراین در دو ثانیهٔ اول حرکت، طول فنر همواره در حال کاهش است.

ج) مشابه با توضیحات گزارهٔ (ب)، در دو ثانیهٔ دوم ($2s \le t < 4s$)، فنر از حداکثر فشردگی (نقطهٔ B') به حداکثر کشیدگی (نقطهٔ B) می‌رسد.

د) چون در نقطهٔ O، فنر طول عادی خود را دارد، بنابراین در این نقطه هیچ نیرویی از طرف فنر بر جسم وارد نمی‌شود.

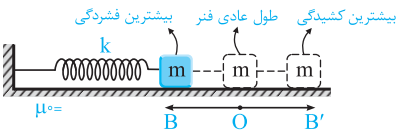
۱۰۳۷ ۲ نیروی وارد بر متحرک، در واقع از طرف فنر بر بسته وارد می‌شود و هرچه اندازهٔ تغییر طول فنر بیشتر باشد، مقدار آن نیرو بیشتر است. بنابراین در حرکت از B تا B' ، اندازهٔ نیروی وارد بر متحرک ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

نکته

به‌طور کلی با نزدیک شدن به مرکز نوسان (نقطهٔ O)، اندازهٔ نیروی وارد بر نوسانگر کاهش می‌یابد و با دور شدن از آن، اندازهٔ نیروی وارد بر نوسانگر افزایش می‌یابد.

$|F| \downarrow \leftarrow$ متحرک به مرکز نوسان نزدیک می‌شود. $\leftarrow$ حرکت از B تا O

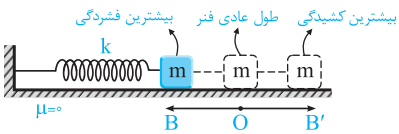
$|F| \uparrow \leftarrow$ متحرک از مرکز نوسان دور می‌شود. $\leftarrow$ حرکت از O تا B'



۱۰۳۸ ۳ برای پاسخ به این سؤال، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱) با توجه به توضیحات ارائه شده در خلاصه نکات (۲)، نیروی وارد بر بسته همواره به سمت مرکز نوسان است.

۲) از آن‌جایی که در نقطهٔ O نیروی وارد بر بسته صفر است، پس شتاب جسم نیز در این نقطه صفر می‌شود.

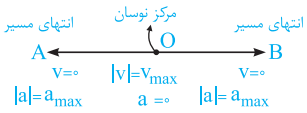


۳) در نقاط B و B' (انتهای مسیر) برای یک لحظه تندی جسم صفر شده و جسم تغییر جهت می‌دهد. در این نقاط با توجه به صفر شدن تندی، تکانهٔ جسم نیز صفر می‌شود و گزینهٔ (۳) عبارت نادرستی است.

۴) در حرکت بسته از B' تا O، اندازهٔ نیروی وارد بر بسته و در نتیجه اندازهٔ شتاب بسته کاهش می‌یابد. هم‌چنین با نزدیک شدن به مرکز نوسان، اندازهٔ سرعت (تندی) بسته افزایش می‌یابد.

۱۰۳۹ ۴ با توجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۲)، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱۰۴۰ ۲ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:



۱) هنگامی‌که تندی جسم صفر است، جسم در حداکثر فاصله از مرکز نوسان قرار دارد (نقاط A یا B که به آن‌ها اصطلاحاً نقاط بازگشت گفته می‌شود) و اندازهٔ شتاب آن بیشینه است.

۲) هنگامی که تندی جسم ماکزیمم است، جسم در مرکز نوسان (نقطهٔ O) قرار داشته و شتاب آن صفر است.

با توجه به موارد فوق، تنها گزینهٔ (۲) صحیح است.

تذکر به طور کلی با نزدیک شدن به مرکز نوسان، تندی حرکت نوسانگر افزایش می‌یابد و حرکت آن تندشونده است.

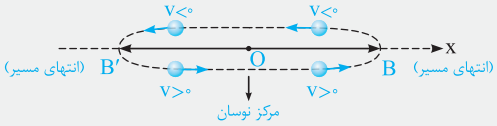
سؤال **به نظر شما در هنگام نزدیک شدن به مرکز نوسان، مقدار تکانهٔ خطی و انرژی جنبشی نوسانگر چگونه تغییر می‌کند؟**

پاسخ با توجه به افزایش اندازهٔ سرعت متحرک، هر دو پارامتر افزایش می‌یابد.

۱۰۴۱ ۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۳ — علامت‌های مکان، سرعت، شتاب و نیرو در نقاط مختلف مسیر نوسانگر (تست‌های ۱۰۴۱ تا ۱۰۴۷)

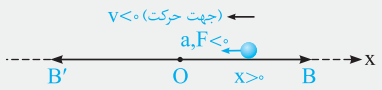
تو ادامهٔ کار، می‌خوایم روی علامت سرعت و شتاب نوسانگر تو هر نقطه از مسیر کار کنیم و کلی مطلب ازش یاد بگیریم ...



(مرکز نوسان مبدأ مختصات فرض شده است.)

در شکل مقابل، نوسانگر نشان داده‌شده بر روی پاره‌خط BB' در حال نوسان است. می‌خواهیم با استفاده از مفاهیم خلاصه نکات قبل، به بررسی علامت‌های مکان متحرک، سرعت متحرک و شتاب آن در هر قسمت از مسیر بپردازیم. به همین منظور به موارد زیر توجه کنید:

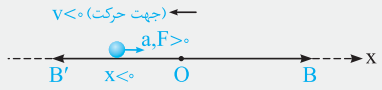
۱ حرکت از B تا O: در حرکت از B تا O، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند و در نتیجه سرعت آن منفی است. از طرفی با توجه به این‌که جهت نیروی وارد بر متحرک همواره به سمت مرکز (نقطهٔ O) است، نیروی F مطابق شکل در خلاف جهت محور x بوده و منفی است.



$$\begin{cases} a, F < 0 \\ v < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

دقت: با توجه به هم‌جهت بودن سرعت و شتاب نوسانگر، حرکت نوسانگر تندشونده است $(av > 0)$.

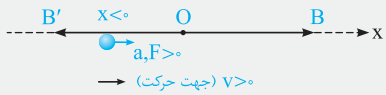
۲ حرکت از O تا B': در حرکت از O تا B'، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند و در نتیجه سرعت آن منفی است. از طرفی با توجه به این‌که نیرو همواره به سمت مرکز (نقطهٔ O) است، نیروی F مطابق شکل در جهت محور x بوده و مثبت است.



$$\begin{cases} a, F > 0 \\ v < 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

دقت: با توجه به مختلف‌الجهت بودن سرعت و شتاب نوسانگر، حرکت نوسانگر کندشونده است $(av < 0)$.

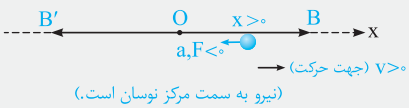
۳ حرکت از B' تا O: در حرکت از B' تا O، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند و در نتیجه سرعت آن مثبت است. از طرفی با توجه به این‌که نیرو همواره به سمت مرکز (نقطهٔ O) است، نیروی F مطابق شکل در جهت محور x بوده و مثبت است.



$$\begin{cases} a, F > 0 \\ v > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

دقت: با توجه به هم‌جهت بودن سرعت و شتاب نوسانگر، حرکت نوسانگر تندشونده است $(av > 0)$.

۴ **حرکت از O تا B**: در حرکت از O تا B، متحرک در جهت محور x در حال حرکت است، بنابراین سرعت این متحرک مثبت است. از طرفی با توجه به این‌که نیروی وارد بر متحرک همواره به سمت مرکز (نقطهٔ O) است، نیروی F مطابق شکل در خلاف جهت محور x بوده و منفی است.



$$\begin{cases} a, F < 0 \\ v > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

دقت: با توجه به مختلف‌الجهت بودن سرعت و شتاب نوسانگر، حرکت نوسانگر کندشونده است ($av < 0$).

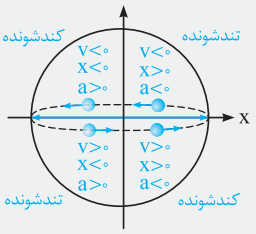
نکات مهم و کاربردی

۱ با توجه به بررسی‌های فوق، مشاهده می‌شود که در حرکت نوسانی، F (نیروی وارد بر نوسانگر) و x (مکان نوسانگر) همواره با یکدیگر مختلف‌العلامت هستند. به بیان مفهومی‌تر در هر نقطه از مسیر، بردار مکان از مرکز (مبدأ) به محل جسم متصل می‌شود، در حالی‌که بردار نیرو از محل جسم به سمت مرکز (مبدأ) است و این یعنی نیرو و مکان همواره مختلف‌العلامت هستند.

۲ همان‌گونه که مشاهده می‌شود اگر $x > 0$ باشد، شتاب و نیرو لزوماً منفی است، ولی در مورد علامت سرعت نمی‌توان اظهار نظر کرد.

۳ به‌طور کلی هرگاه متحرک به مرکز نوسان نزدیک شود (از B تا O و یا از B′ تا O)، اندازهٔ سرعت نوسانگر افزایش یافته و حرکت متحرک تندشونده است. از طرفی هرگاه متحرک از مرکز نوسان دور شود (از O تا B و یا از O تا B′)، اندازهٔ سرعت نوسانگر کاهش یافته و حرکت متحرک کندشونده است.

۴ به نقاط B و B′ که در آن‌ها سرعت نوسانگر صفر شده و جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند، نقاط بازگشتِ حرکت گویند.



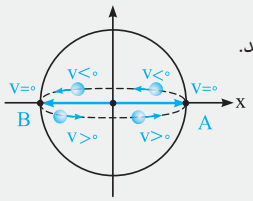
۵ شکل مقابل جمع‌بندی مناسبی از مطالب ارائه‌شده را به ما می‌دهد:

حالا بریم با حل دو تا تمرین خوب، حسابی روی بحثای انجام شده کار کنیم ...

تمرین ۱ در یک حرکت هماهنگ ساده، در لحظه‌ای که سرعت نوسانگر از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد، شتاب نوسانگر چگونه است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

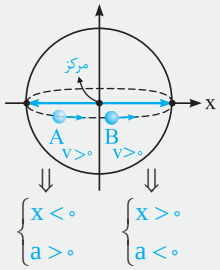
۱) مثبت است. ۲) منفی است.

۳) از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد. ۴) از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد.



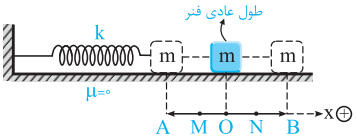
پاسخ ابتدا باید دقت شود که در حرکت نوسانی ساده، سرعت متحرک تنها در دو انتهای مسیر تغییر جهت می‌دهد (A و B). با توجه به شکل مقابل، سرعت جسم در نقطهٔ A از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد و با توجه به مثبت بودن مکان حرکت در A، شتاب نوسانگر در این نقطه (نقطهٔ A) منفی می‌باشد و گزینهٔ (۲) صحیح است.

تمرین ۲ هنگامی که شتاب یک نوسانگر از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد، علامت مکان و سرعت نوسانگر چگونه تغییر می‌کند؟



پاسخ ابتدا باید توجه کنیم که شتاب نوسانگر در مرکز نوسان تغییر جهت می‌دهد. از طرفی با توجه به مختلف‌العلامت بودن مکان و شتاب ($a \propto -x$)، اگر شتاب نوسانگر از مثبت به منفی تغییر علامت دهد، مکان نوسانگر از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد و در طی انجام این عمل، سرعت نوسانگر همواره مثبت است (با حرکت از A تا B، مطابق شکل مقابل شتاب از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد).

در این مسأله با توجه به شکل روبه‌رو، تمام گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



۱) در نقطهٔ O (جایی که فنر به طول عادی خود می‌رسد)، فنر از حالت فشردگی به حالت کشیدگی تغییر وضعیت می‌دهد، بنابراین نیروی وارد بر بسته صفر شده و جهت آن تغییر می‌کند.

۲) با نزدیک شدن بسته به سمت مرکز نوسان، اندازهٔ سرعت ($|v|$) افزایش یافته و حرکت جسم به‌صورت تندشونده است. هم‌چنین با دور شدن از مرکز نوسان، اندازهٔ سرعت ($|v|$) کاهش یافته و حرکت متحرک به‌صورت کندشونده است. با حرکت از M تا N ابتدا جسم، به مرکز نوسان نزدیک شده و سپس از آن دور می‌شود، بنابراین حرکت متحرک ابتدا تندشونده و سپس کندشونده است.

۳) از آن‌جایی که سرعت متحرک در طول مسیر حرکت متغیر است، می‌توان گفت زمان پیمودن دو قسمت ON و NB، الزاماً متفاوت است. متحرک در نزدیک مرکز، اندازهٔ سرعت بیشتری دارد و زمان طی کردن پاره‌خط ON از NB کم‌تر است.

۴) در حرکت نوسانی، بردار نیرو و بردار مکان، همواره در خلاف جهت یکدیگر هستند. ($F \propto -x$)

۳ | ۱۰۴۲ همان‌طور که در خلاصه نکات قبل نیز اشاره کردیم، شتاب و نیروی وارد بر نوسانگر همواره با مکان نوسانگر مختلف‌العلامت $(a , F \propto -x)$ هستند،بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح می‌باشد.

دقت: فرض کنید مکان و سرعت متحرک هر دو مثبت هستند و در مورد نوع حرکت نوسانگر از ما پرسیده شده است. برای پاسخ به این مورد به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

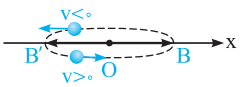
$$\begin{cases} \text{مکان}: x > 0 \xrightarrow{a \propto -x} a < 0 \\ \text{سرعت}: v > 0 \end{cases} \Rightarrow av < 0 \Rightarrow \text{حرکت کندشونده است.}$$

با شیوهٔ مشابه به سادگی می‌توان نشان داد که اگر مکان و سرعت متحرک هر دو منفی باشند نیز حرکت کندشونده است و عبارت مطرح‌شده در گزینهٔ (۲) نادرست است.

۲ | ۱۰۴۳ با توجه به **مختلف العلامت بودن مکان و شتاب $(a \propto -x)$**، هنگامی که شتاب نوسانگر مثبت است، نوسانگر لزوماً در مکان‌های منفی قرار دارد.

$$a > 0 \xrightarrow{a \propto -x} x < 0$$

۱ | ۱۰۴۴ با توجه به شکل مقابل، وقتی بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x قرار دارد، جسم در مکان منفی (فاصلهٔ بین نقطهٔ O و B') قرار داشته و می‌توان گفت:



۱) شتاب و نیروی وارد بر نوسانگر لزوماً مثبت است، زیرا مکان و نیرو همواره مختلف‌العلامت هستند $(F \propto -x , a \propto -x)$.

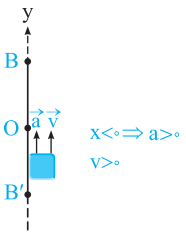
۲) اگر جسم از نقطهٔ O به سمت B' (انتهای مسیر) حرکت کند، سرعت آن منفی بوده و اگر جسم از نقطهٔ B' به سمت O (مرکز نوسان) حرکت کند، سرعت آن مثبت است.

بنابراین با توجه به توضیحات فوق، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱ | ۱۰۴۵ هنگامی که بسته از نقطهٔ m_1 به سمت نقطهٔ B حرکت می‌کند، نیروی وارد بر نوسانگر به سمت مرکز بوده و جهت آن به صورت (←) است. از طرفی هنگامی که بسته از نقطهٔ m_2 به سمت مرکز نوسان (نقطهٔ O) حرکت می‌کند، به سمت چپ حرکت کرده و جهت سرعت آن به صورت (←) است. بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۲ | ۱۰۴۶ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۳)، گزینهٔ (۲) صحیح است.

۴ | ۱۰۴۷ هنگامی حرکت نوسانگر تندشونده است که به مرکز نوسان نزدیک شود. بنابراین نوسانگر که در مکان‌های منفی قرار دارد، باید به سمت مرکز نوسان حرکت کند. پس سرعت نوسانگر در این مکان مثبت و شتاب آن نیز مثبت خواهد بود $(a \propto -x)$.



یه جور دیگه فکر کنیم: چون حرکت تندشونده است، بنابراین شتاب و سرعت هم‌جهت می‌باشند و گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست می‌باشد. از طرفی می‌توان گفت:

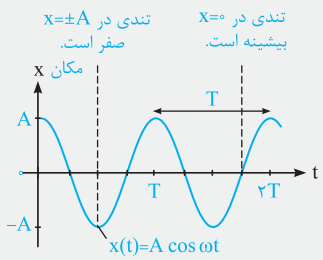
$$x < 0 \xRightarrow{a \propto -x} a > 0 \xRightarrow{\text{تندشونده}} v > 0$$

۲ | ۱۰۴۸ برای پاسخ به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید.

خلاصه نکات ۴ — معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت هماهنگ ساده و معرفی دایرهٔ مرجع برای حل مسائل (تست‌های ۱۰۴۸ تا ۱۰۵۷)

حالا می‌خوایم بریم روی معادلهٔ مکان ـ زمان یه حرکت نوسانی ساده کار کنیم و کلی نکات مهم در موردش یاد بگیریم. ...

همان‌طور که دیدیم، در حرکت هماهنگ ساده نمودار مکان ـ زمان به صورت نموداری سینوسی است. یعنی مکان (x) را می‌توان به صورت تابعی سینوسی و کسینوسی از زمان (t) نوشت. اگر در لحظهٔ $t = 0$، نوسانگر از بیشینهٔ مکان خود یعنی $x = +A$، رها شود، معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر به صورت زیر است:



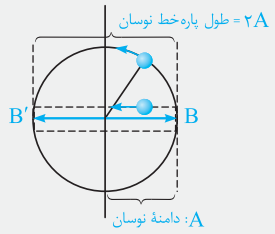
$$\boxed{x = A\cos(\omega t)}$$

x: فاصلهٔ نوسانگر از مرکز نوسان در لحظهٔ t

A: دامنهٔ نوسان

ω: بسامد زاویه‌ای نوسان

تذکر طول پاره‌خط مسیر نوسان (BB')، دو برابر دامنهٔ نوسان است.



$$BB' = 2A$$

کتاب درسیتون فرضش اینه که متحرک از $x = +A$ حرکتش همیشه شروع میشه ...

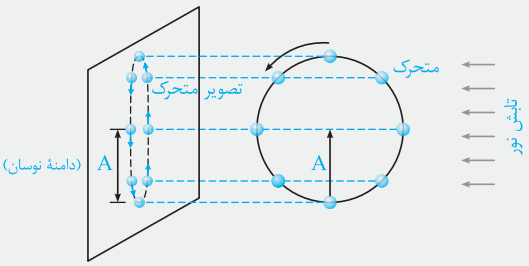
تذکر در حرکت نوسانی ساده، ω را بسامد زاویه‌ای نوسانگر و f را بسامد یا فرکانس نوسانگر می‌نامیم.

ارتباط بین حرکت دایره‌ای یکنواخت و حرکت نوسانی ساده و نوشتن معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت

در این قسمت قصد داریم به ارتباط بین حرکت دایره‌ای یکنواخت و حرکت نوسانی ساده اشاره کنیم. قبل از شروع بحث، ابتدا تعریف حرکت دایره‌ای یکنواخت را بررسی می‌کنیم.

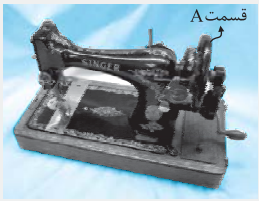
حرکت دایره‌ای یکنواخت: هرگاه متحرکی بر روی محیط یک دایره با تندی ثابت حرکت کند، عملاً کمان‌های مساوی از محیط دایره را در زمان‌های یکسانی می‌پیماید و حرکت آن دایره‌ای یکنواخت خواهد بود.

ارتباط بین حرکت دایره‌ای یکنواخت و حرکت نوسانی ساده



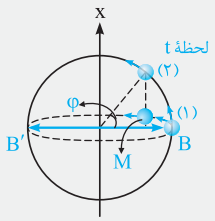
در شکل مقابل، متحرکی با تندی ثابت بر روی دایرهٔ نشان داده‌شده در حال حرکت است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود هنگامی که متحرک یک دور کامل بر روی دایره می‌چرخد، تصویر متحرک بر روی پرده، یک نوسان کامل انجام می‌دهد. به عبارتی با این ابتکار ارتباط بین حرکت دایره‌ای یکنواخت و حرکت نوسانی ساده مشخص می‌شود.

به شکل فوق **دایرهٔ مرجع** می‌گوییم که کاربرد زیادی در مطالب این فصل دارد. با توجه به این دایره، ارتباط بین بسیاری از مفاهیم حرکت نوسانی ساده و حرکت دایره‌ای یکنواخت را مشخص می‌کنیم.



دقت: در شکل مقابل، دستهٔ چرخ خیاطی را با تندی ثابت می‌چرخانیم، در این صورت قسمت دایره‌ای شکل A، با سرعت زاویه‌ای ثابت چرخانده می‌شود، بنابراین حرکت آن به‌صورت دایره‌ای یکنواخت است، از طرفی حرکت نوک سوزن مانند تصویر متحرک بر روی پرده در شکل فوق عمل کرده و می‌توان گفت که نوک سوزن دارای حرکت هماهنگ ساده است. به عبارتی در چرخ خیاطی حرکت دایره‌ای یکنواخت قسمت A، به حرکت نوسانی سادهٔ نوک سوزن تبدیل می‌شود.

فاز حرکت



در شکل مقابل متحرکی فرضی با بسامد زاویه‌ای ثابت ω بر روی دایره، از نقطهٔ(۱) شروع به حرکت می‌کند. در لحظهٔ t این متحرک به نقطهٔ (۲) رسیده و فاز آن برابر است با:

$$\varphi = \omega t = (2\pi f)t = \left(\frac{2\pi}{T}\right)t$$

باید دقت شود که فاز نوسانگر M (تصویر متحرک فرضی بر روی محور افقی) نیز در هر لحظه مشابه با متحرک فرضی، برابر ωt است.

نکات مهم و کاربردی

۱ وقتی متحرک فرضی یک دور کامل بر روی دایره می‌چرخد، نوسانگر M یک نوسان کامل بر روی پاره‌خط BB′ انجام می‌دهد، یعنی دوبار پاره‌خط BB′ را می‌پیماید و تغییر فاز ۲π می‌دهد. بنابراین در مدت t ثانیه، تعداد نوسانات کامل نوسانگر برابر است با:

$$T = \frac{t}{n} \Rightarrow n = \frac{t}{T} \quad \text{(مشابه روابط نوسان دوره‌ای)}$$

$$f = \frac{n}{t} \Rightarrow n = f\,t \quad \text{(مشابه روابط چپ‌چین)}$$

۲ اگر نوسانگر در مدت زمان Δt، تغییر فاز Δφ را بدهد، بسامد زاویه‌ای آن برابر است با:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{یا} \quad \Delta\varphi = \omega\Delta t$$

۳ مدت زمانی که نیاز است تا متحرک فرضی یک دور کامل بر روی دایره بچرخد برابر یک دوره است و به عبارتی در طی یک دوره، تغییر فاز ۲π برای متحرک فرضی و همچنین نوسانگر M ایجاد می‌شود.

$$2\pi \equiv T$$

تو ادامه می‌خوایم شمارو با یه ایدهٔ خیلی‌خیلی مهم تو فصل نوسان آشنا کنیم که کلی کاربرد داره ...

تمرین ۱ **در یک حرکت نوسانی ساده، زمان لازم برای تغییر فاز $\frac{\pi}{6}$ چه‌قدر است؟**

پاسخ با توجه به این‌که متحرک فرضی بر روی دایره با بسامد زاویه‌ای ثابت جابه‌جا می‌شود، میزان تغییر فاز ایجاد شده با زمان مورد نیاز برای آن متناسب است $(\Delta\varphi = \omega\Delta t)$:

زمان مورد نیاز	تغییر فاز
T	۲π
Δt = ?	$\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\frac{\pi}{6} \times T}{2\pi} = \frac{T}{12}$$

نکته با توجه به تمرین قبل، به عنوان یک روش تستی بسیار مناسب، برای یافتن مدت زمان لازم بر حسب دوره برای تغییر فاز $\Delta\varphi$، کافیست π را به T تبدیل کرده و مخرج $\Delta\varphi$ را در ۲ ضرب کنیم (یا $\Delta\varphi$ را بر ۲ تقسیم کنیم):

تبدیل π به T

$$\Delta\varphi=\pi\rightarrow\Delta t=\frac{T}{۲}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۲}$$

مخرج ضرب در ۲

$$\Delta\varphi=\frac{\pi}{۳}\rightarrow\Delta t=\frac{T}{۶}$$

$$\Delta\varphi=\frac{\pi}{۶}\rightarrow\Delta t=\frac{T}{۱۲}$$

تبدیل π به T

$$\Delta\varphi=۲\pi\rightarrow\Delta t=\frac{۲T}{۲}\Rightarrow\Delta t=T$$

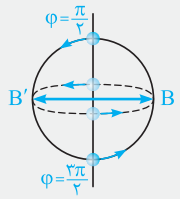
مخرج ضرب در ۲

$$\Delta\varphi=\frac{\pi}{۲}\rightarrow\Delta t=\frac{T}{۴}$$

$$\Delta\varphi=\frac{۲\pi}{۳}\rightarrow\Delta t=\frac{۲T}{۶}=\frac{T}{۳}$$

بررسی لحظات بیشینه و کمینه شدن مکان متحرک با توجه به مفهوم فاز

با توجه به مفهوم فاز، لحظات صفر و بیشینه شدن مکان متحرک را به صورت زیر می‌توان به راحتی به دست آورد:

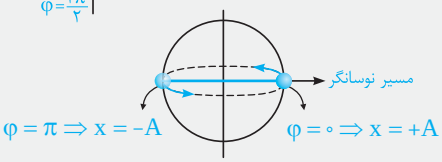


۱) نوسانگر در فازهای زیر، از مرکز نوسان $(x=۰)$ عبور می‌کند:

$$\varphi=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲},۲\pi+\frac{\pi}{۲},\cdots,(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$$

۲) نوسانگر در فازهای زیر، از مکان بیشینهٔ مثبت $(x=+A)$ عبور می‌کند:

$$\varphi=۰,۲\pi,\ldots,۲k\pi$$



هم‌چنین در فازهای زیر، نوسانگر از مکان بیشینهٔ منفی $(x=-A)$ عبور می‌کند:

$$\varphi=\pi,۳\pi,\ldots,(۲k+۱)\pi$$

۳) نوسانگر در فازهای زیر، به اندازهٔ A از مرکز نوسان فاصله دارد $(x=\pm A)$:

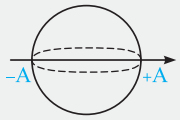
$$\varphi=۰,\pi,۲\pi,\ldots,k\pi$$

تو تمرین بعد، کاربرد این نکات رو حسابی بررسی می‌کنیم ...

تمرین ۲ **در حرکت نوسانی $x=A\cos(۱۰\pi t)$، چند ثانیه پس از لحظهٔ $t=۰$، برای دومین بار مکان حرکت بیشینه و منفی می‌شود؟** (M.K.A)

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۳

پاسخ با توجه به نکات فوق بعد از لحظهٔ $t=۰$، اولین فازی که مکان متحرک در آن **بیشینه و منفی** می‌شود، $\varphi=\pi$ است. فازهای بعدی عبارتند از:



$$\varphi=\pi,۳\pi,\ldots$$

در معادلهٔ مکان ـ زمان $x=A\cos(۱۰\pi t)$، اگر بخواهیم پس از لحظهٔ $t=۰$، برای دومین بار مکان نوسانگر **بیشینه** و **منفی** شود، باید فاز نوسان برابر ۳π شود و داریم:

$$x=A\cos(\underbrace{۱۰\pi t}_{\text{فاز نوسان}})\Rightarrow\varphi=۱۰\pi t$$

$$۱۰\pi t=۳\pi\Rightarrow t=۰/۳s$$ (گزینهٔ (۴) صحیح است.)

با مقایسهٔ معادلهٔ داده‌شده با فرم کلی معادلهٔ مکان ـ زمان یک نوسانگر ساده داریم:

$$\begin{cases}\text{فرم کلی}: x=A\cos\omega t\\ \text{معادلهٔ داده‌شده}: x=۰/۰۱\cos(\underbrace{۵۰۰\pi}_{\text{بسامد زاویه‌ای }(\omega)}t)\end{cases}\Rightarrow \text{دامنهٔ حرکت}: A=۰/۰۱m\ ،\ \omega=۵۰۰\pi\ rad/s\xrightarrow{\omega=۲\pi f}\text{بسامد}: f=۲۵۰Hz$$

۳ ۱۰۴۹ برای بررسی این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: با مقایسهٔ معادلهٔ حرکت داده‌شده، با فرم کلی معادلهٔ مکان ـ زمان یک نوسانگر ساده داریم:

$$\begin{cases}\text{فرم کلی}: y=A\cos\omega t\\ \text{معادلهٔ داده‌شده}: y=۰/۱\cos۵\pi t\end{cases}\Rightarrow\omega=۵\pi\ rad/s$$

گام دوم: برای محاسبهٔ تعداد نوسانات در طی ۰/۸s، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases}\omega=۵\pi\ rad/s\\ \omega=\frac{۲\pi}{T}\end{cases}\Rightarrow۵\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{۲}{۵}=۰/۴s$$

بنابراین در این مدت، نوسانگر ۲ نوسان کامل انجام داده و ۴ بار پاره‌خط مسیر حرکتش را می‌پیماید. هم‌چنین این نوسانگر ۴ بار از دو انتهای مسیر (نقاط بازگشت) عبور می‌کند.

$$T=\frac{t}{n}\Rightarrow۰/۴=\frac{۰/۸}{n}\Rightarrow n=۲$$

تذکر دامنهٔ حرکت همواره ثابت و برابر ۰/۱m است و تغییر نمی‌کند.

۱۰۵۰ **۴** متحرک در هر ثانیه، ۲۰ نوسان کامل انجام می‌دهد، بنابراین بسامد (f) و بسامد زاویه‌ای (ω) آن برابر است با:

$$f=\frac{n}{t}=\frac{۲۰}{۱}=۲۰\,Hz \quad , \quad \omega=۲\pi f=۲\pi\times ۲۰=۴۰\pi\,rad/s$$

برای محاسبهٔ فاصلهٔ متحرک از مرکز نوسان در لحظهٔ $t=\frac{۱}{۴۸}s$ با کمک معادلهٔ مکان ـ زمان، کافی است t را در معادلهٔ مکان ـ زمان جای‌گذاری کنیم:

$$x=۰/۰۸\cos(\omega t)\xrightarrow{\omega=۴۰\pi\,rad/s}x=۰/۰۸\cos(۴۰\pi t)\xrightarrow{t=\frac{۱}{۴۸}s}x=۰/۰۸\cos\left(۴۰\pi\times\frac{۱}{۴۸}\right)=۰/۰۸\underbrace{\cos\left(\frac{۵\pi}{۶}\right)}_{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=-۰/۰۴\times\sqrt{۳}\,m=-۴\sqrt{۳}\,cm$$

یادآوری

کسینوس زوایای مکمل قرینهٔ یک‌دیگر است.

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \Rightarrow \text{مثال}: \cos\frac{۵\pi}{۶}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{۶}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{۶}\right)=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۰۵۱ **۲** **گام اول:** به دست آوردن معادلهٔ مکان ـ زمان:

$$x=A\cos(\omega t)\xrightarrow{\omega=۲\pi f}x=۰/۰۲\cos(۲\pi\times ۴\times t)=۰/۰۲\cos(۸\pi t)$$

گام دوم: به دست آوردن مکان متحرک در لحظهٔ $t=\frac{۱}{۱۲}s$:

$$x=۰/۰۲\cos(۸\pi t)\xrightarrow{t=\frac{۱}{۱۲}s}x=۰/۰۲\cos\left(۸\pi\times\frac{۱}{۱۲}\right)=۰/۰۲\underbrace{\cos\left(\frac{۲\pi}{۳}\right)}_{-\frac{۱}{۲}}=-۰/۰۱m=-۱cm$$

۱۰۵۲ **۲** با توجه به خلاصه نکات ارائه شده، اولین باری که متحرک از مبدأ می‌گذرد، فاز حرکت برابر $\frac{\pi}{۲}$ است و فازهای بعدی به صورت زیر است:

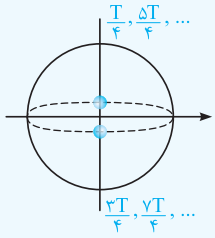
$$\varphi=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲},۲\pi+\frac{\pi}{۲},۲\pi+\frac{۳\pi}{۲},\dots,\left(n\pi+\frac{\pi}{۲}\right)$$

در معادلهٔ $x=A\cos(\omega t)$، اگر بخواهیم متحرک از مرکز نوسان عبور کند، باید فاز نوسانگر برابر $n\pi+\frac{\pi}{۲}$ شود.

$$x=A\cos(\omega t)=A\cos\overbrace{\left(\frac{۲\pi}{T}t\right)}^{\text{فاز نوسان}}\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}t=n\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow t=\left(n+\frac{۱}{۲}\right)\frac{T}{۲}=(۲n+۱)\frac{T}{۴}$$

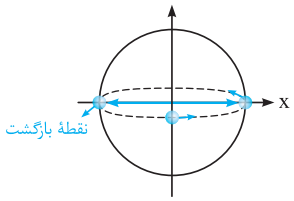
خلاقیت حرفه‌ای ها

همان‌طور که در شکل مقابل مشاهده می‌کنید، متحرک در لحظات $\frac{T}{۴}$، $\frac{۳T}{۴}$، $\frac{۵T}{۴}$ و ... از مرکز نوسان عبور می‌کند، به عبارت دیگر متحرک در زمان‌هایی که مضرب فرد $\left(\frac{T}{۴}\right)$ هستند، از نقطهٔ مورد نظر عبور خواهد کرد



۱۰۵۳ **۴** با توجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۴)، گزینهٔ (۴) صحیح است.

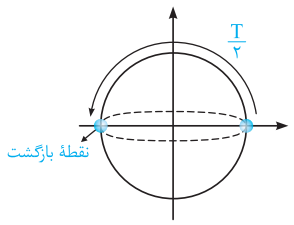
۱۰۵۴ **۲** متحرک در دو انتهای مسیر به نقطهٔ بازگشت خود می‌رسد. پس از لحظهٔ $t=۰$، متحرک برای اولین بار در فاز π به نقطهٔ بازگشت خود می‌رسد. بنابراین می‌توان نوشت:



$$x=۰/۲\cos\overbrace{\left(\frac{\pi}{۲}t\right)}^{\text{فاز حرکت}}\Rightarrow\frac{\pi}{۲}t=\pi\Rightarrow t=۲s$$

یه جور دیگه فکر کنیم: ابتدا با کمک بسامد زاویه‌ای، دورهٔ حرکت را به دست می‌آوریم:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\xrightarrow{\omega=\frac{\pi}{۲}rad/s}\frac{\pi}{۲}=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۴s$$



همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، متحرک با طی نیمی از مسیر یک نوسان کامل، برای اولین بار پس از شروع حرکت به نقطهٔ بازگشت می‌رسد که زمان آن برابر $\frac{T}{۲}$ یا به عبارت دیگر ۲s می‌باشد.

۱۰۵۵ **۱** معادلهٔ مکان ـ زمان این نوسانگر به صورت $x=A\cos(\omega t)$ است. بنابراین مکان این نوسانگر در لحظهٔ $t=\frac{T}{۶}$ برابر است با:

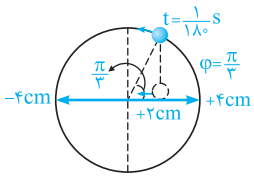
$$x=A\cos\left(\frac{۲\pi}{T}t\right)\xrightarrow{t=\frac{T}{۶}}x=A\cos\left(\frac{۲\pi}{T}\times\frac{T}{۶}\right)=A\cos\left(\frac{\pi}{۳}\right)=\frac{۱}{۲}A$$

۱۰۵۶ **۲** پس از به دست آوردن معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر، می‌توان نوشت:

$$T = ۶s \Rightarrow \omega = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۶} = \frac{\pi}{۳} rad/s \quad ، \quad \text{دامنه}: A = \frac{۴}{۲} = ۲cm = ۰/۰۲m$$

$$x = A\cos\omega t = ۰/۰۲\cos(\frac{\pi}{۳}t) \xrightarrow{x=-۰/۰۱m} -۰/۰۱ = ۰/۰۲\cos(\frac{\pi}{۳}t) \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۳}t) = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{\pi}{۳}t = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow t = ۲s$$

۱۰۵۷ **۴** فرم کلی معادلهٔ مکان ـ زمان را به‌صورت رابطهٔ $x = A\cos\omega t$ درنظر می‌گیریم. با توجه به صورت سؤال، دامنهٔ حرکت برابر ۴cm یا ۰/۰۴m است و برای نوشتن معادلهٔ مکان ـ زمان، کافی است ω را به‌دست آوریم. این نوسانگر در $t = \frac{۱}{۱۸۰}s$ در مکان $x = +۲cm$ قرار دارد و ω برای آن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

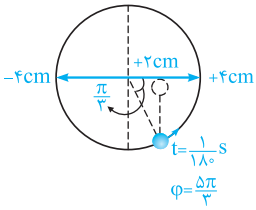


$$\cos\varphi = \frac{x}{A} = \frac{+۲}{۴} = +\frac{۱}{۲} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{۳} \text{ یا } \frac{۵\pi}{۳}$$

اگر فاز حرکت در لحظهٔ $t = \frac{۱}{۱۸۰}s$ برابر $\frac{\pi}{۳}$ باشد:

$$\varphi = \omega t \Rightarrow \frac{\pi}{۳} = \omega \times \frac{۱}{۱۸۰} \Rightarrow \omega = ۶۰\pi\ rad/s$$

معادلهٔ مکان ـ زمان در SI: $x = ۰/۰۴\cos(۶۰\pi t)$ (این معادله در گزینهٔ (۲) وجود دارد.)



اگر فاز حرکت در لحظهٔ $t = \frac{۱}{۱۸۰}s$ برابر $\frac{۵\pi}{۳}$ باشد:

$$\varphi = \omega t \Rightarrow \frac{۵\pi}{۳} = \omega \times \frac{۱}{۱۸۰} \Rightarrow \omega = ۳۰۰\pi\ rad/s$$

معادلهٔ مکان ـ زمان در SI: $x = ۰/۰۴\cos(۳۰۰\pi t) \Rightarrow$ (این معادله در گزینهٔ (۳) وجود دارد.)

خلاقیت حرفه‌ای ها

برای پیدا کردن پاسخ صحیح سؤال از بین گزینه‌ها، $t = \frac{۱}{۱۸۰}s$ را در گزینه‌ها جای‌گذاری کرده و پاسخ باید $+۲cm$ به‌دست آید:

$$۱)\ x = ۰/۰۴\cos(۳۰\pi t) \xrightarrow{t=\frac{۱}{۱۸۰}s} x = ۰/۰۴\cos(۳۰\pi \times \frac{۱}{۱۸۰}) = ۰/۰۴\cos(\frac{\pi}{۶}) = ۰/۰۲\sqrt{۳}m \quad ✗$$

$$۲)\ x = ۰/۰۴\cos(۶۰\pi t) \xrightarrow{t=\frac{۱}{۱۸۰}s} x = ۰/۰۴\cos(۶۰\pi \times \frac{۱}{۱۸۰}) = ۰/۰۴\cos(\frac{\pi}{۳}) = ۰/۰۲m = ۲cm \quad ✓$$

$$۳)\ x = ۰/۰۴\cos(۳۰۰\pi t) \xrightarrow{t=\frac{۱}{۱۸۰}s} x = ۰/۰۴\cos(۳۰۰\pi \times \frac{۱}{۱۸۰}) = ۰/۰۴\cos(\frac{۵\pi}{۳}) = ۰/۰۲m = ۲cm \quad ✓$$

۱۰۵۸ **۴** برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۵ **بیشینهٔ تندی در حرکت نوسانی ساده** (تست‌های ۱۰۵۸ تا ۱۰۶۳)

در درسنامه‌های قبل، با نحوهٔ محاسبهٔ معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر آشنا شدید:

معادلهٔ مکان ـ زمان: $x = A\cos\omega t \rightarrow$ مکان ماکزیمم: $\boxed{x_{max} = A}$

می‌توان ثابت کرد که در یک حرکت نوسانی ساده، بیشینهٔ تندی نوسانگر از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

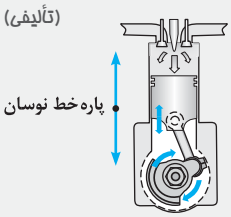
$$\boxed{v_{max} = A\omega}$$

تذکر ۱ بیشینهٔ تندی نوسانگر، در لحظهٔ عبور از مرکز نوسان می‌باشد.

تذکر ۲ بیشینهٔ تکانهٔ نوسانگر، برابر است با:

$$p_{max} = mv_{max} = mA\omega$$

تمرین ۱ **پیستون اتومبیل نشان داده‌شده، روی پاره‌خطی به طول ۱۰۰mm در هر ساعت به‌طور مرتب ۷۲۰۰ بار از مرکز نوسان عبور می‌کند. بیشینهٔ تندی نوسان پیستون برابر چند متر بر ثانیه است؟** (تألیفی)



۱) $۰/۴\pi$

۲) $۰/۲\pi$

۳) $۰/۱۵\pi$

۴) $۰/۱\pi$

پاسخ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) طول پاره‌خط نوسان برابر ۱۰۰ mm است، بنابراین دامنهٔ نوسان برابر $A=\frac{۱۰۰}{۲}=۵۰mm=۰/۰۵m$ است.

۲) می‌دانیم نوسانگر در هر دوره دو بار از مرکز نوسان عبور می‌کند، در این سؤال نوسانگر در مدت یک ساعت ۷۲۰۰ بار از مرکز نوسان عبور می‌کند، بنابراین نوسانگر در مدت یک ساعت، $\left(\frac{۷۲۰۰}{۲}=\right)۳۶۰۰$ نوسان کامل انجام می‌دهد.

$$t=۱h=۳۶۰۰s \quad , \quad n=۳۶۰۰$$

$$T=\frac{t}{n}=\frac{۳۶۰۰}{۳۶۰۰}=۱s \Rightarrow \omega=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{۱}=۲\pi rad/s$$

۳) بیشینهٔ شتاب نوسانگر برابر است با:

$$v_{max}=A\omega=\frac{۵}{۱۰۰}\times(۲\pi)=۰/۱\pi m/s \quad \text{(گزینهٔ ۴)}$$

با توجه به خلاصه نکات ارائه شده داریم:

$$\begin{cases} v_{max}=A\omega \\ x_{max}=A \end{cases} \Rightarrow \frac{v_{max}}{x_{max}}=\omega \quad \text{(بسامد زاویه‌ای)}$$

۱۰۵۹ **۲** دورهٔ تناوب نوسانگر A دو برابر نوسانگر B است $(T_A=۲T_B)$. بنابراین با توجه به رابطهٔ $\omega=\frac{۲\pi}{T}$، می‌توان نوشت:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\frac{\omega_A}{\omega_B}=\frac{T_B}{T_A}=\frac{۱}{۲}$$

در ادامه با توجه به این‌که دامنهٔ A دو برابر دامنهٔ B است $(A_A=۲A_B)$، برای مقایسهٔ ماکزیمم تندی دو متحرک از رابطهٔ $v_{max}=A\omega$ کمک می‌گیریم:

$$v_{max}=A\omega\Rightarrow\frac{v_{max_A}}{v_{max_B}}=\frac{A_A}{A_B}\times\frac{\omega_A}{\omega_B}=۲\times\left(\frac{۱}{۲}\right)=۱$$

۱۰۶۰ **۲** می‌دانیم که بیشینهٔ تندی در حرکت نوسانی، از رابطهٔ $v_{max}=A\omega$ به‌دست می‌آید. بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_{max}=A\omega=۰/۸m/s \quad , \quad \omega=\frac{۲\pi}{T}\xrightarrow{T=\frac{\pi}{۱۰}s}\omega=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۱۰}}=۲۰\ rad/s$$

$$۰/۸=A\times۲۰\rightarrow A=\frac{۰/۸}{۲۰}=۰/۰۴m=۴cm\rightarrow \text{طول پاره‌خط مسیر نوسان}=۲A=۸cm$$

۱۰۶۱ **۴** با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۵)، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱۰۶۲ **۴** برای یافتن معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر B، باید دامنه و دورهٔ تناوب آن را به‌دست آوریم. از این‌رو برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول:

$$x_A=\overset{A_A}{۰/۱\pi}\cos(\overset{\omega_A}{\pi}t)\Rightarrow\omega_A=\frac{۲\pi}{T_A}=\pi\Rightarrow T_A=۲s$$

گام دوم: طبق صورت سؤال، دورهٔ تناوب نوسانگر B، ۲ ثانیه بیشتر از نوسانگر A است و داریم:

$$T_B=T_A+۲=۲+۲=۴s\Rightarrow\omega_B=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}rad/s$$

گام سوم: با توجه به برابر بودن بیشینهٔ تندی دو نوسانگر، داریم:

$$v_{max_B}=v_{max_A}\Rightarrow A_B\omega_B=A_A\omega_A\Rightarrow A_B\times\frac{\pi}{۲}=۰/۱\pi\times\pi\Rightarrow A_B=۰/۲\pi$$

فرم کلی معادلهٔ مکان ـ زمان: $x_B=A_B\cos\omega_B t=۰/۲\pi\cos\frac{\pi}{۲}t$

۱۰۶۳ **۳** این سؤال را در سه مرحله حل می‌کنیم:

۱) محاسبهٔ دامنه و فرکانس زاویه‌ای هر ذره با توجه به رابطهٔ $y=A\cos\omega t$:

$$\begin{cases} y_۱=۴\cos۲۰\pi t\rightarrow A_۱=۴m \ , \ \omega_۱=۲۰\pi\ rad/s \\ y_۲=۲\cos۴۰\pi t\rightarrow A_۲=۲m \ , \ \omega_۲=۴۰\pi\ rad/s \end{cases}$$

۲) محاسبهٔ نسبت حداکثر تندی دو نوسانگر:

$$v_{max}=A\omega\Rightarrow\frac{v_{max_۱}}{v_{max_۲}}=\frac{A_۱\omega_۱}{A_۲\omega_۲}=\frac{۴\times۲۰\pi}{۲\times۴۰\pi}=۱$$

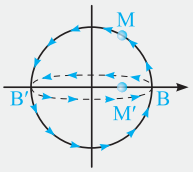
۳) محاسبهٔ نسبت حداکثر تکانهٔ خطی دو نوسانگر با استفاده از رابطهٔ $p_{max}=mv_{max}$:

$$\frac{p_{max_۱}}{p_{max_۲}}=\frac{m_۱v_{max_۱}}{m_۲v_{max_۲}}=۱\times۱=۱$$

۱۰۶۴ ۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

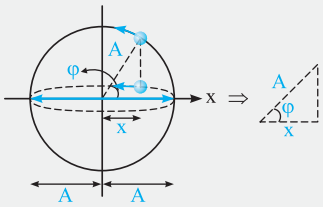
خلاصه نکات ۶ — بررسی یک تکنیک بسیار کاربردی (دایرهٔ مرجع) (تست‌های ۱۰۶۴ تا ۱۰۷۵)

تو این خلاصه نکات قصد داریم ویژگی‌های حرکت متحرک را تو فواصل مختلف از مرکز نوسان بررسی کنیم. این خلاصه نکات یکی از مهم‌ترین خلاصه نکته‌های این فصل از کتابه و پیشنهاد می‌کنیم که اونو به خوبی بخونید ...



تذکر با توجه به شکل مقابل، هنگامی که متحرک بر روی دایره یک دور کامل می‌چرخد، تصویر آن بر روی محور افقی یک نوسان کامل انجام می‌دهد. این موضوع عملاً یک کمک بسیار مناسب است که برخی از اوقات به جای بررسی حرکت نوسانگر، حرکت متحرک روی دایره را بررسی کنیم. در ادامه از این موضوع استفاده خواهیم کرد.

ویژگی‌های حرکت متحرک در نقاط مختلف مسیر

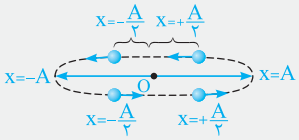


در شکل مقابل، متحرکی فرضی با بسامد زاویه‌ای ثابت در حال چرخش به روی دایره است و تصویر آن بر روی محور افقی در حال انجام حرکت نوسانی ساده است. از طرفی می‌دانیم که رابطهٔ بین فاصلهٔ متحرک از مرکز نوسان و فاز متحرک به شکل زیر است:

$$\cos\varphi = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{x}{A}$$

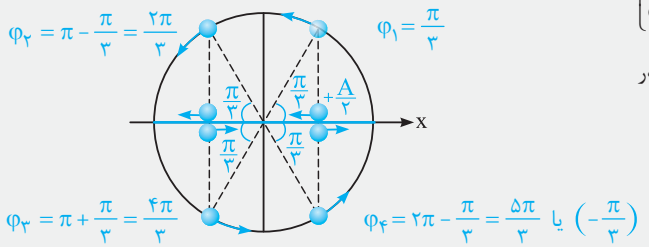
سؤال **در چه فازهایی از حرکت، فاصلهٔ تصویر متحرک از مرکز نوسان برابر $\frac{A}{۲}$ است؟**

پاسخ می‌دانیم هنگامی که متحرک در مکان‌های $x = \pm\frac{A}{۲}$ قرار دارد، فاصلهٔ آن از مرکز نوسان برابر $\frac{A}{۲}$ می‌باشد. فاز حرکت در مکان‌های $x = \pm\frac{A}{۲}$ برابر است با:

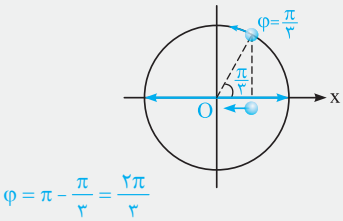


$$\cos\varphi = \frac{x}{A} = \frac{\pm\frac{A}{۲}}{A} = \pm\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_۱ = \frac{\pi}{۳} \\ \varphi_۲ = \frac{۲\pi}{۳} \quad (\pi - \frac{\pi}{۳}) \\ \varphi_۳ = \frac{۴\pi}{۳} \quad (\pi + \frac{\pi}{۳}) \\ \varphi_۴ = \frac{۵\pi}{۳} \quad (۲\pi - \frac{\pi}{۳}) \text{ یا } -\frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

با توجه به فازهای به‌دست آمده، فاصلهٔ تصویر متحرک از مرکز نوسان در ۴ نقطهٔ نشان داده‌شده در شکل مقابل برابر $\frac{A}{۲}$ است:

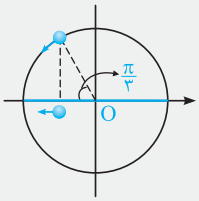


به فازهای $\varphi = \frac{\pi}{۳}, \frac{۲\pi}{۳}, \frac{۴\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۳}, \ldots$، **مشتقات $\frac{\pi}{۳}$** می‌گویند که فازهای بسیار مهمی بوده و باید به‌خاطر سپرده شود. اکنون به بررسی کامل ویژگی‌های حرکت متحرک، در هر یک از نقاط فوق می‌پردازیم:



۱ $\varphi_۱ = \frac{\pi}{۳}$: وقتی متحرک در فاز $\varphi = \frac{\pi}{۳}$ قرار دارد، مکان حرکت مثبت است $(x = +\frac{A}{۲})$. هم‌چنین در این فاز، متحرک در حال حرکت در خلاف جهت محور نوسان است، بنابراین سرعت آن منفی بوده و داریم:

- شتاب و نیروی وارد بر متحرک منفی است (F و a با x مختلف‌العلامت هستند).
- سرعت متحرک منفی است.
- متحرک به مرکز نوسان نزدیک شده و حرکت آن تندشونده است.

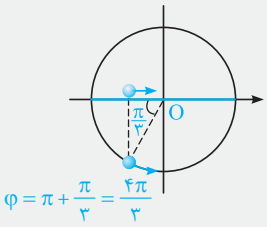


۲ $\varphi_۲ = \frac{۲\pi}{۳}$: وقتی متحرک در فاز $\varphi = \frac{۲\pi}{۳}$ قرار دارد، مکان حرکت آن منفی است $(x = -\frac{A}{۲})$ و متحرک در حال حرکت در خلاف جهت محور نوسان است، بنابراین سرعت آن منفی بوده و داریم:

- شتاب و نیروی وارد بر متحرک مثبت است (F و a با x مختلف‌العلامت هستند).
- سرعت متحرک منفی است.
- متحرک از مرکز نوسان دور شده و حرکت آن کندشونده است.

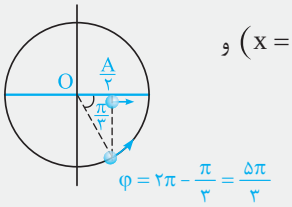
۳) $\varphi_3=\frac{4\pi}{3}$: وقتی متحرک در فاز $\varphi=\frac{4\pi}{3}$ قرار دارد، مکان حرکت آن منفی است $\left(x=-\frac{A}{2}\right)$ و متحرک در حال حرکت در جهت محور نوسان است، بنابراین سرعت آن مثبت بوده و داریم:

* شتاب و نیروی وارد بر متحرک مثبت است.
* سرعت متحرک مثبت است.
* متحرک به مرکز نوسان نزدیک شده و حرکت آن تندشونده است.



۴) $\varphi_4=-\frac{\pi}{3}$ یا $\frac{5\pi}{3}$: وقتی متحرک در فاز $\varphi=\frac{5\pi}{3}$ قرار دارد، مکان حرکت مثبت است $\left(x=+\frac{A}{2}\right)$ و متحرک در حال حرکت در جهت محور نوسان است، بنابراین سرعت آن مثبت بوده و داریم:

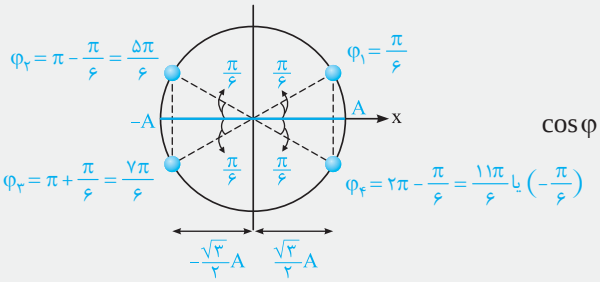
* شتاب و نیروی وارد بر متحرک منفی است.
* سرعت متحرک مثبت است.
* متحرک از مرکز نوسان دور شده و حرکت آن کندشونده است.



حالا بریم عین همین کار رو برای $\frac{\sqrt{3}}{2}A$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}A$ هم انجام بدیم و فازاشون رو بشناسیم شاید به فورمونم فاز برد ...

سؤال **در چه فازهایی از حرکت، فاصلهٔ تصویر متحرک از مرکز نوسان برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}A$ است؟**

پاسخ می‌دانیم هنگامی‌که متحرک در مکان‌های $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}A$ قرار می‌گیرد، فاصلهٔ آن از مرکز نوسان برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}A$ است. با توجه به دایرهٔ مرجع زیر، در ۴ نقطهٔ مختلف، فاصلهٔ تصویر متحرک از مرکز نوسان برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}A$ است. این فازها را به خاطر بسپارید:

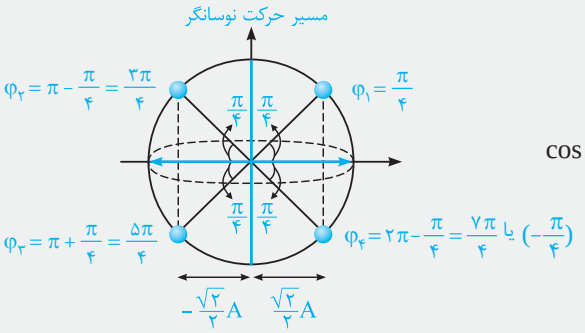


$$\cos\varphi=\frac{x}{A}=\frac{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}A}{A}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\xrightarrow{\frac{\pi}{6}\text{ و مشتقاتش}}\begin{cases}\varphi_1=\frac{\pi}{6}\\ \varphi_2=\frac{5\pi}{6}\\ \varphi_3=\frac{7\pi}{6}\\ \varphi_4=\frac{11\pi}{6}\ \text{یا}\ \left(-\frac{\pi}{6}\right)\end{cases}$$

تذکر باید دقت شود که ویژگی‌های کلی حرکت متحرک در فازهای $\varphi=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}$، مشابه ویژگی‌های حرکت متحرک در فازهای $\varphi=\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$ می‌باشد.

سؤال **در چه فازهایی از حرکت، فاصلهٔ متحرک از مرکز نوسان برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}A$ است؟**

پاسخ با توجه به دایرهٔ مرجع، فاصلهٔ متحرک از مرکز نوسان در فازهای $\varphi=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$ برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}A$ است ($\frac{\pi}{4}$ و مشتقاتش). این فازها را به خاطر بسپارید:

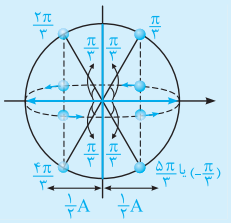
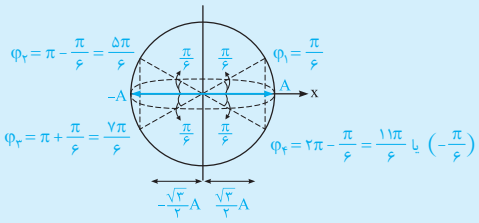
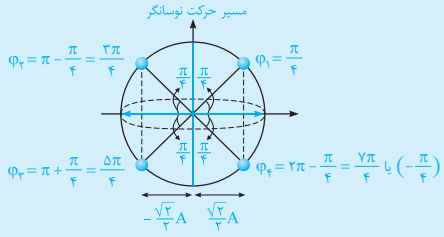


$$\cos\varphi=\frac{x}{A}=\frac{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A}{A}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\xrightarrow{\frac{\pi}{4}\text{ و مشتقاتش}}\begin{cases}\varphi_1=\frac{\pi}{4}\\ \varphi_2=\frac{3\pi}{4}\\ \varphi_3=\frac{5\pi}{4}\\ \varphi_4=\frac{7\pi}{4}\ \text{یا}\ \left(-\frac{\pi}{4}\right)\end{cases}$$

تذکر ویژگی حرکت متحرک در فازهای $\varphi=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$، نیز مشابه با ویژگی‌های حرکت متحرک در فازهای $\varphi=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}$ است.

اگه میخوای آخر نوسان بشی، باید جدول زیر رو روزی سه بار بعد از صبونه، ناهار و شام هر بار سه مرتبه با خودت دوره کنی. شریم عین این دکترا ☺

جمع‌بندی

فاصله از مرکز نوسان و مشتقات مربوط به آن		
$\frac{۱}{۲}A$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$
$\frac{\pi}{۳}$ و مشتقاتش	$\frac{\pi}{۶}$ و مشتقاتش	$\frac{\pi}{۴}$ و مشتقاتش
		

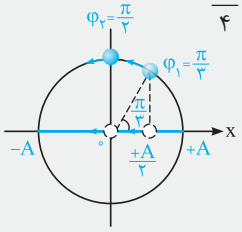
حالا بریم با یه نکته و دو تا تمرین توپ، حسابی روی کاربردای جدول فوق کار کنیم و حسابی بفهمیمش ...

نکته در مسائلی که حداقل زمان لازم برای انتقال نوسانگر از مکان $x_۱$ به $x_۲$ پرسیده می‌شود، حداقل زمان در وضعیتی رخ می‌دهد که متحرک با کم‌ترین تغییر زاویه ممکن این انتقال را انجام دهد.

$$\omega=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\Rightarrow \Delta t=\frac{\Delta\varphi}{\omega}\Rightarrow \Delta t_{min}=\frac{\Delta\varphi_{min}}{\omega}$$

تمرین۱ **در یک حرکت نوسانی ساده با دامنهٔ A و دورهٔ T، حداقل چه مدت طول می‌کشد تا نوسانگر از مکان $x=\frac{A}{۲}$ به $x=۰$ برسد؟**

۱) $\frac{T}{۱۲}$ ۲) $\frac{T}{۸}$ ۳) $\frac{T}{۶}$ ۴) $\frac{T}{۴}$



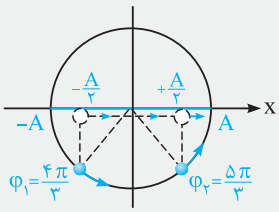
پاسخ با توجه به شکل مقابل، حداقل زمانی که نیاز است تا متحرک از مکان $x=\frac{A}{۲}$ به $x=۰$ برسد، هنگامی به‌دست می‌آید که متحرک بر روی دایره از فاز $\varphi_۱=\frac{\pi}{۳}$ به $\varphi_۲=\frac{\pi}{۲}$ منتقل شود و تصویر آن از $\frac{A}{۲}$ به مرکز نوسان منتقل شود. در این حالت داریم:

$$\Rightarrow \Delta\varphi=\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۳}=\frac{\pi}{۶}\Rightarrow \Delta t=\frac{T}{۱۲}$$ (گزینهٔ (۱) صحیح است.)

همون اول کار با دیدن مکان $\frac{A}{۲}$ باید به یاد فاز $\frac{\pi}{۳}$ بیفتید (بگید کسینوس شده $\frac{۱}{۲}$) و با دیدن صفر به یاد $\frac{\pi}{۲}$ بیفتید (بگید کسینوس شده صفر) ...

تمرین۲ **دورهٔ نوسان نوسانگر ساده‌ای ۶ ثانیه و دامنهٔ حرکت آن A می‌باشد. نوسانگر در لحظهٔ t در مکان $-\frac{A}{۲}$ می‌باشد و سرعتش در آن لحظه مثبت است. پس از لحظهٔ t، حداقل چند ثانیه زمان نیاز است تا نوسانگر به مکان $+\frac{A}{۲}$ برسد؟** (تألیفی)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴



پاسخ با مکان‌های $+\frac{A}{۲}$ و $-\frac{A}{۲}$ در صورت سؤال برخورد کرده و به یاد مشتقات $\frac{\pi}{۳}$ می‌افتیم (سریع تو ذهنت بگو کسینوس شده $\frac{۱}{۲}$ و میشه مشتقات $\frac{\pi}{۳}$).

می‌دانیم که وقتی مکان نوسانگر برابر $-\frac{A}{۲}$ و سرعت آن مثبت باشد، فاز متحرک برابر $\frac{۴\pi}{۳}$ است. بنابراین با توجه به شکل مقابل، حداقل تغییر فاز متحرک برای آن‌که به مکان $\frac{+A}{۲}$ برسد برابر است با:

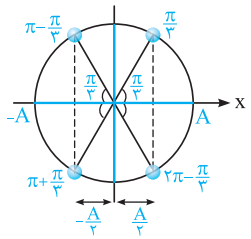
$$\Rightarrow \Delta\varphi=\frac{۵\pi}{۳}-\frac{۴\pi}{۳}=\frac{\pi}{۳}$$

در ادامه برای محاسبهٔ مدت زمان لازم برای تغییر فاز $\Delta\varphi=\frac{\pi}{۳}$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\Delta\varphi=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow \Delta t=\frac{T}{۶}\xrightarrow{T=۶s}\Delta t=\frac{۶}{۶}=۱s$$ (گزینهٔ (۱) صحیح است.)

با توجه به توضیحات خلاصه نکات ارائه‌شده، هنگامی که متحرکی با بسامد زاویه‌ای ثابت بر روی دایره می‌چرخد، حرکت تصویر آن (M') بر روی قطر افقی، به‌صورت حرکت هماهنگ ساده است.

۱۰۶۵ ۲ با توجه به شکل روبه‌رو، فازهایی که تصویر متحرک روی محور قائم از مرکز نوسان $\frac{A}{2}$ فاصله دارد $\left(x=\pm\frac{1}{2}A\right)$، عبارت است از:



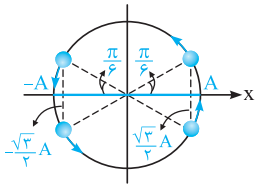
$$\cos\varphi=\frac{x}{A}=\frac{\pm\frac{1}{2}A}{A}=\pm\frac{1}{2}\Rightarrow \varphi=\text{مشتقاتش و }\frac{\pi}{3}$$

$$\varphi_1=\frac{\pi}{3}\ ,\ \varphi_2=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}\ ,\ \varphi_3=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}\ ,\ \varphi_4=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}\ \text{یا}\ -\frac{\pi}{3}$$

تذکر

مشتقات $\frac{\pi}{3}$ و ویژگی‌هایش از مطالب بسیار مهمی است که در اکثر مسائل این فصل کاربرد فراوان دارد.

۱۰۶۶ ۱ مشابه با روند سؤال قبل، می‌توان نوشت:

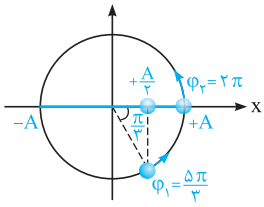


$$\cos\varphi=\frac{x}{A}=\frac{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}A}{A}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \varphi=\text{مشتقاتش و }\frac{\pi}{6}$$

$$\varphi_1=\frac{\pi}{6}\ ,\ \varphi_2=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}\ ,\ \varphi_3=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}\ ,\ \varphi_4=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}\ \text{یا}\ -\frac{\pi}{6}$$

۱۰۶۷ ۱ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۶)، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱۰۶۸ ۲ با مشاهدهٔ عبارت مکان برابر نصف دامنه، به یاد مشتقات $\frac{\pi}{3}$ می‌افتیم. می‌دانیم که وقتی مکان نوسانگر مثبت، نصف دامنه $\left(x=+\frac{1}{2}A\right)$ و نوع حرکتش کندشونده است، متحرک در فاز $\varphi_1=\frac{5\pi}{3}$ قرار دارد. در این حالت متحرک پس از تغییر فاز $\Delta\varphi=\frac{\pi}{3}$ به بیشینهٔ بعد در فاز $\varphi_2=2\pi$ می‌رسد.

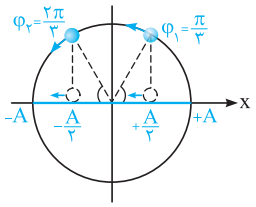


مدت زمان لازم برای تغییر فاز $\Delta\varphi=\frac{\pi}{3}$ برابر است با:

$$\Delta\varphi=2\pi-\frac{5\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow \Delta t=\frac{T}{6}\xrightarrow{T=0/12s}\Delta t=0/02s$$

دقت شود که کندشونده بودن حرکت یعنی متحرک از مرکز نوسان دور می‌شود، بنابراین φ_1 در ربع اول قرار ندارد.

۱۰۶۹ ۱ با مشاهدهٔ مکان $+\frac{A}{2}$ و $-\frac{A}{2}$، باز هم به یاد $\frac{\pi}{3}$ و مشتقاتش می‌افتیم. با توجه به شکل مقابل، حداقل زمان لازم برای آن‌که متحرک از مکان $\frac{A}{2}$ به مکان $\frac{-A}{2}$ برسد، مربوط به حالتی است که نوسانگر از فاز $\varphi_1=\frac{\pi}{3}$ به $\varphi_2=\frac{2\pi}{3}$ منتقل شود. بنابراین می‌توان نوشت:



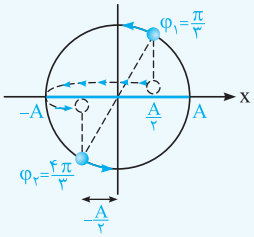
$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\ \text{rad}$$

از طرفی می‌دانیم مدت زمان لازم برای تغییر فاز $\frac{\pi}{3}$ برابر $\frac{T}{6}$ است، بنابراین داریم:

$$\Delta\varphi=\frac{\pi}{3}\Rightarrow \Delta t=\frac{T}{6}\Rightarrow 0/1=\frac{T}{6}\Rightarrow T=0/6s$$

سؤال **اگر متحرک در این زمان از مکان $+\frac{A}{2}$ به $-\frac{A}{2}$ منتقل شده و یک بار نیز تغییر جهت دهد، دورهٔ حرکت چند ثانیه است؟**

پاسخ در این سؤال، تست کنکور را کمی سخت‌تر کرده‌ایم. در صورتی که بخواهیم متحرک علاوه بر خواستهٔ تست، یک بار نیز تغییر جهت دهد، باید یک بار لزوماً از انتهای مسیر عبور کند. در این صورت متحرک به‌صورت مقابل تغییر وضعیت می‌دهد:

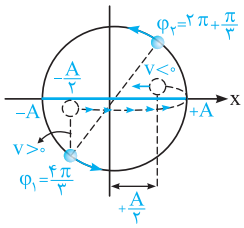


$$\Delta\varphi=\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\pi\Rightarrow \Delta t=\frac{T}{2}$$

$$\frac{T}{2}=0/1s\Rightarrow T=0/2s$$

۱۰۷۰ ۱ با توجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۶)، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱۰۷۱ ۳ با توجه به مفاهیم خلاصه نکات (۶)، در شروع بازهٔ زمانی، فاز متحرک در ربع سوم قرار دارد. از طرفی هنگامی‌که نوسانگر در مکان $\frac{+A}{2}$ قرار گرفته و سرعتش منفی است، فاز حرکت برابر $\varphi_2=2\pi+\frac{\pi}{3}$ شده است. بنابراین با توجه به شکل مقابل داریم:

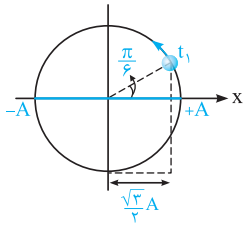


$$\Rightarrow \Delta\varphi=\pi$$

دقت شود که مدت زمان لازم برای تغییر فاز $\Delta\varphi=\pi$، برابر $\frac{T}{2}$ است و داریم:

$$\Delta t=\frac{T}{2}\xrightarrow{T=6s}\Delta t=\frac{6}{2}=3s$$

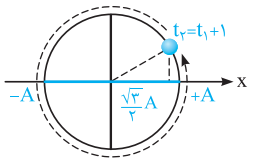
۱۰۷۲ ۱ در لحظهٔ t_1، $x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}A$ است و جهت حرکت نوسانگر به سمت مرکز نوسان می‌باشد، با مروری بر مشتقات $\frac{\pi}{6}$ می‌توان گفت که فاز نوسانگر در لحظهٔ t_1 برابر است با:



$$\varphi_1=\frac{\pi}{6}$$

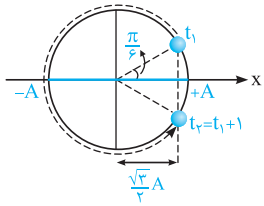
از طرفی می‌دانیم که متحرک بعد از یک ثانیه دوباره به همان مکان می‌رسد، بنابراین دو حالت را می‌توان در نظر گرفت:

حالت اول: متحرک پس از یک ثانیه به همان فاز $\varphi_1=\frac{\pi}{6}$ برگشته است. در این حالت دورهٔ تناوب برابر همان $T=1s$ است، زیرا متحرک در مدت زمان ۱s، یک دور کامل زده است.



$$\begin{cases}\Delta\varphi=2\pi\\ \Delta t=1s\end{cases}\Rightarrow T=\Delta t=1s$$

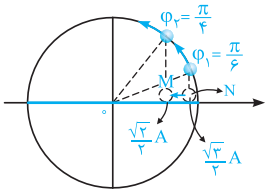
حالت دوم: متحرک پس از یک ثانیه به فاز $\varphi_2=\frac{11\pi}{6}$ رسیده است. در این حالت دورهٔ تناوب برابر است با:



$$\begin{cases}\Delta\varphi=\frac{11\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{3}\\ \Delta t=1s\end{cases}\Rightarrow \Delta t=\frac{5T}{6}=1\Rightarrow T=\frac{6}{5}s=1/2s$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در بین گزینه‌ها فقط پاسخ $T=1/2s$ دیده می‌شود، بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱۰۷۳ ۳ **گام اول:** نوسانگر ۲ ثانیه پس از شروع حرکت، در مکان $x_N=\frac{\sqrt{3}}{2}A$ قرار داشته و به سمت مرکز حرکت می‌کند. بنابراین با توجه به مشتقات $\frac{\pi}{6}$، فاز نوسانگر در لحظهٔ $t=2s$ برابر است با:



$$\varphi_1=\frac{\pi}{6}rad$$

از طرفی مدت زمان لازم برای این تغییر فاز از شروع حرکت تا نقطهٔ N، برابر $\Delta t=\frac{T}{12}$ می‌باشد (چرا؟). بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{T}{12}=2\Rightarrow T=24s$$

گام دوم: در نقطهٔ M مکان نوسانگر برابر $x_M=\frac{\sqrt{2}}{2}A$ بوده و جهت حرکت آن به سمت مرکز می‌باشد، بنابراین به یاد $\frac{\pi}{4}$ و مشتقات آن می‌افتیم:

$$\varphi_2=\frac{\pi}{4}rad$$

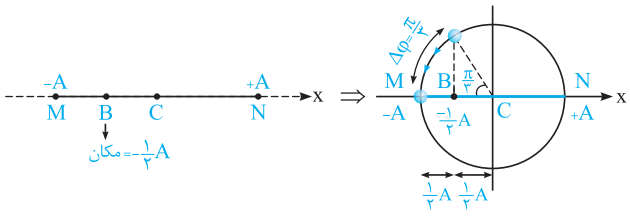
گام سوم: تغییر فاز لازم برای جابه‌جایی از نقطهٔ N تا M برابر است با:

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}rad$$

از طرفی مدت زمان لازم برای این تغییر فاز برابر $\Delta t=\frac{T}{24}$ می‌باشد و داریم:

خواستهٔ سؤال: $\Delta t=\frac{T}{24}=\frac{24}{24}=1s$

۱۰۷۴ ۳ می‌دانیم هنگامی‌که متحرک در وسط نقاط M و C قرار دارد و می‌خواهد به سمت نقطهٔ M حرکت کند، فاز آن برابر $\frac{2\pi}{3}$ است. هم‌چنین می‌دانیم که فاز نقطهٔ M برابر π است، بنابراین داریم:



$$\text{تغییر فاز}=\Delta\varphi=\frac{\pi}{3}$$

از طرفی می‌دانیم که مدت زمان لازم برای تغییر فاز $\Delta\varphi=\frac{\pi}{3}$ برابر $\Delta t=\frac{T}{6}$ است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\Delta t_{MB}=0/2s\\ \Delta t_{MB}=\frac{T}{6}\end{cases}\Rightarrow 0/2=\frac{T}{6}\Rightarrow T=1/2s$$

تذکر

بعضی از دانش‌آموزان تصور می‌کنند که مدت زمان طی شدن MB با BC برابر بوده و دورهٔ حرکت را به‌صورت زیر به اشتباه محاسبه می‌کنند:

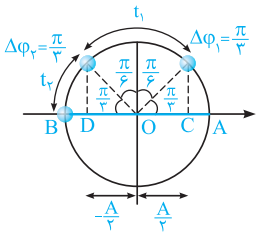
دورهٔ تناوب = زمان رفت + زمان برگشت = 1/6s ⇐ زمان رفت = 0/8s

تمرین به‌نظر شما، چرا این نوع تفکر کاملاً اشتباه است؟

پاسخ زیرا این حرکت، از نوع نوسانی ساده است و در حرکت نوسانی ساده، با دور شدن از مرکز، اندازهٔ سرعت متحرک کاهش می‌یابد، بنابراین زمان طی کردن MB از BC بیشتر است.

$\Delta t_{MB}>\Delta t_{BC}$ ⇐ متحرک قسمت MB را در مدت زمان بیشتری طی می‌کند. ⇐ اندازهٔ سرعت در قسمت BC بیشتر از قسمت MB است.

۱۰۷۵ ابتدا نقاط نشان داده‌شده در مسیر حرکت متحرک را مطابق شکل بر روی دایرهٔ مرجع مشخص می‌کنیم:



با توجه به این‌که نقاط C و D در مکان‌های $\frac{A}{2}$ و $-\frac{A}{2}$ قرار دارند فازهای مربوط به آن‌ها جزء مشتقات $\frac{\pi}{3}$ می‌باشد و همان‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینید، تغییرات فاز متحرک از C تا D برابر تغییرات فاز متحرک از D تا B است و در نتیجه t_1 نیز برابر t_2 می‌باشد و داریم:

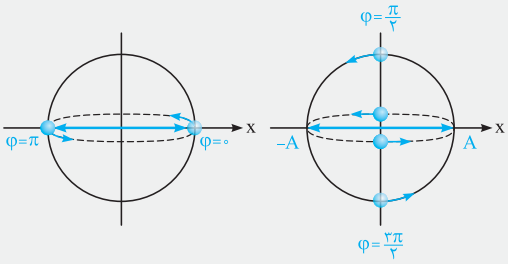
$$\frac{t_1}{t_2}=1$$

۱۰۷۶ برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۷ — محاسبهٔ زمان‌های بیشینه یا کمینه شدن مکان، سرعت و شتاب (تست‌های ۱۰۷۶ تا ۱۰۸۲)

تو این خلاصه نکات می‌خوایم به این موضوع بپردازیم که تو چه فازهایی و یا تو چه لحظاتی از حرکت، پارامترهای مکان، سرعت و یا شتاب متحرک بیشینه یا کمینه میشه ...

در ابتدای کار باید بدانید که متحرک در فازهای $\varphi=(2n-1)\frac{\pi}{2}$ از مرکز نوسان عبور کرده و در فازهای $\varphi=n\pi$ از دو انتهای مسیر عبور می‌کند.



$$\begin{cases} \text{فازهایی که متحرک از دو انتهای مسیر عبور می‌کند.} \Rightarrow \varphi=0,\pi,2\pi,3\pi,\dots,n\pi \\ \text{فازهایی که متحرک از مرکز عبور می‌کند.} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\dots,(2n-1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

حال با توجه به این‌که متحرک در چه فازهایی از چه مکان‌هایی عبور می‌کند، می‌توان به نکات بسیار مهم زیر اشاره کرد:

۱ می‌دانیم در هنگام عبور متحرک از مرکز نوسان، اندازهٔ سرعت (تندی) متحرک بیشینه است. با توجه به این موضوع، در فازهای $\varphi=(2n-1)\frac{\pi}{2}$ که متحرک از مرکز نوسان عبور می‌کند، اندازهٔ سرعت آن بیشینه است.

۲ می‌دانیم که در هنگام عبور متحرک از دو انتهای مسیر، اندازهٔ شتاب بیشینه است. با توجه به این موضوع، در فازهای $\varphi=n\pi$ که متحرک از انتهای مسیر عبور می‌کند، اندازهٔ شتابش بیشینه است.

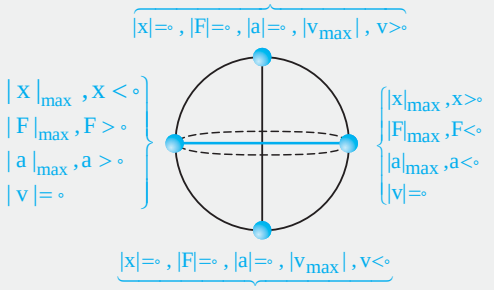
۳ در فازهای $\varphi=(2n-1)\frac{\pi}{2}$، متحرک از مرکز نوسان عبور کرده و در هنگام عبور متحرک از مرکز نوسان، سرعت و تکانهٔ خطی، بیشینهٔ مقدار خود را دارند. از طرفی تکانهٔ خطی و سرعت، در دو انتهای مسیر، یعنی در فازهای $\varphi=n\pi$ صفر شده و تغییر جهت می‌دهند.

۴ نیروی وارد بر متحرک در مرکز نوسان صفر شده و تغییر جهت می‌دهد، یعنی در فازهای $\varphi=(2n-1)\frac{\pi}{2}$، نیروی وارد بر متحرک تغییر جهت می‌دهد.

به طور خلاصه می‌توان این موارد را در جدول زیر جمع‌بندی کرد (نیازی به حفظ کردن جدول نیست):

	فازهایی که اندازهٔ پارامتر موردنظر **بیشینه** می‌شود.	فازهایی که پارامتر موردنظر **بیشینه و مثبت** می‌شود.	فازهایی که پارامتر موردنظر **بیشینه و منفی** می‌شود.	فازهایی که پارامتر موردنظر **صفر** می‌شود [یا **تغییر جهت** می‌دهد.]
x	$n\pi$	$2n\pi$	$(2n-1)\pi$	$(2n-1)\frac{\pi}{2}$
p و v	$(2n-1)\frac{\pi}{2}$	$(4n-1)\frac{\pi}{2}$	$(4n+1)\frac{\pi}{2}$	$n\pi$
F و a	$n\pi$	$(2n-1)\pi$	$2n\pi$	$(2n-1)\frac{\pi}{2}$

اگر با اطلاعات مندرج در جدول بالا به خوبی ارتباط برقرار نمی‌کنید، سعی کنید با بررسی شکل مقابل و با توجه به مکان‌های روی دایره، اطلاعات فوق را بهتر درک کنید.



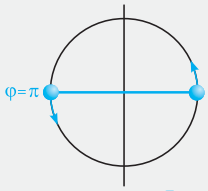
حالا بریم با حل یه تمرین چند قسمتی و توپ، روی بعضی این خلاصه نکات حسابی کار کنیم ...

تمرین ۱ **معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگری در SI به‌صورت $x = ۰/۱\cos(\pi t)$ است:**

الف) در چه لحظه‌ای نوسانگر برای اولین بار بعد از شروع حرکت، بیشترین فاصله از مرکز را دارد؟

ب) در چه لحظه‌ای تندی نوسانگر برای دومین بار بیشینه می‌شود؟

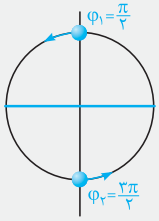
ج) در چه لحظه‌ای شتاب نوسانگر برای دومین بار بیشینه و مثبت می‌شود؟



پاسخ الف) با توجه به این خلاصه نکات، برای اولین بار بعد از شروع حرکت در فاز $\varphi = \pi$ فاصلهٔ نوسانگر از مرکز بیشینه می‌شود. بنابراین با توجه به معادلهٔ داده شده می‌توان نوشت:

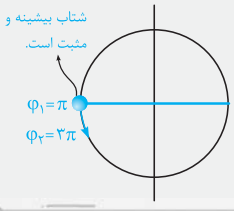
$$x = ۰/۱\cos(\overset{\varphi}{\pi t}) \Rightarrow \varphi = \pi t$$

$$\xrightarrow{\varphi=\pi} \pi t = \pi \Rightarrow t = ۱s$$



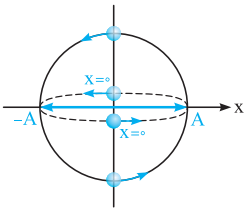
ب) تندی نوسانگر برای اولین بار در فاز $\varphi_۱ = \frac{\pi}{۲}$ و برای دومین بار در فاز $\varphi_۲ = \frac{۳\pi}{۲}$ بیشینه می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\varphi = \pi t \xrightarrow{\varphi=\frac{۳\pi}{۲}} \pi t = \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow t = \frac{۳}{۲}s$$



ج) شتاب نوسانگر برای اولین بار در فاز $\varphi_۱ = \pi$ و برای دومین بار در فاز $\varphi_۲ = ۲\pi + \pi = ۳\pi$ بیشینه و مثبت می‌شود (دقت کنید که در فازهای ۰ و ۲π شتاب نوسانگر بیشینه و منفی است):

$$\varphi = \pi t \xrightarrow{\varphi=۳\pi} \pi t = ۳\pi \Rightarrow t = ۳s$$

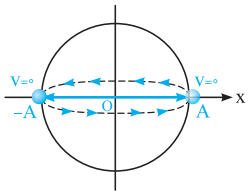


می‌دانیم که مکان نوسانگر در مرکز نوسان برابر صفر بوده و متحرک در هر نوسان ۲ بار از مرکز عبور می‌کند.

بنابراین می‌توان گفت اگر مکان نوسانگر در هر ثانیه به‌طور مرتب ۸ بار صفر شود، در واقع در هر ثانیه نوسانگر ۴ نوسان کامل انجام می‌دهد (۸ بار از مرکز نوسان عبور می‌کند) و دورهٔ تناوب آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$t = ۱s \quad , \quad n = ۴ \quad , \quad \text{دورهٔ تناوب}: T = \frac{t}{n} = \frac{۱}{۴}s$$

۱۰۷۷ ۳ **گام اول:** می‌دانیم که تندی جسم در دو انتهای مسیر نوسان صفر بوده و بردار سرعت در این نقاط تغییر جهت می‌دهد.



از طرفی می‌دانیم که متحرک در هر دوره به‌طور مرتب دو بار از انتهای مسیر عبور می‌کند و مدت زمان لازم برای دو بار تغییر جهت برابر T است. با توجه به این موضوع، در بازه‌های زمانی با طول $\frac{T}{۲}$، به‌طور مرتب تندی متحرک یک بار تغییر جهت می‌دهد. با توجه به صورت سؤال، در فواصل زمانی ۰/۱ ثانیه این اتفاق برای متحرک رخ می‌دهد، بنابراین داریم:

$$\frac{T}{۲} = ۰/۱ \Rightarrow T = ۰/۲s$$

گام دوم: با توجه به رابطهٔ $\omega = \frac{۲\pi}{T}$ می‌توان نوشت:

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{\frac{۲}{۱۰}} = ۱۰\pi\, rad/s$$

۱۰۷۸ ۲ می‌دانیم نیروی وارد بر نوسانگر در مرکز نوسان برابر صفر است. از طرفی نوسانگر در هر نوسان کامل، ۲ بار از مرکز نوسان عبور می‌کند، بنابراین نیروی وارد بر نوسانگر در هر نوسان کامل (در هر دوره) ۲ بار صفر می‌شود.

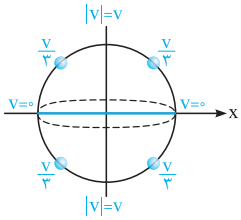
۱۰۷۹ ۴ همان‌طور که می‌دانیم، اندازهٔ سرعت نوسانگر هنگام عبور از مرکز نوسان یعنی در فازهای $\varphi = (۲n-۱)\frac{\pi}{۲}$ بیشینه است، بنابراین کافی است فاز نوسانگر را برابر $\varphi = (۲n-۱)\frac{\pi}{۲}$ قرار دهیم:

$$x = A\cos(\overset{\varphi}{\frac{۲\pi t}{T}}) \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{۲\pi t}{T} \\ \varphi = (۲n-۱)\frac{\pi}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{۲\pi t}{T} = (۲n-۱)\frac{\pi}{۲} \Rightarrow t = (۲n-۱)\frac{T}{۴}$$

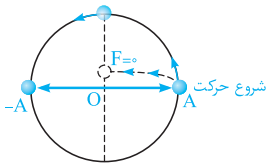
سؤال **در چه زمان‌هایی تندی حرکت نوسانگر بیشینه و مثبت می‌شود؟**

پاسخ در فازهای $\varphi = \frac{۳\pi}{۲}, ۲\pi + \frac{۳\pi}{۲}, ۴\pi + \frac{۳\pi}{۲}, ..., (۴n-۱)\frac{\pi}{۲}$، تندی حرکت نوسانگر بیشینه و مثبت می‌شود.

$$\varphi = \frac{۲\pi t}{T} = (۴n-۱)\frac{\pi}{۲} \Rightarrow t = (۴n-۱)\frac{T}{۴}$$



۱۰۸۰ (۳) همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید در دو انتهای مسیر تندی حرکت نوسانگر برابر صفر شده و در وضعیت تعادل تندی حرکت نوسانگر بیشینه بوده و برابر v می‌باشد. بنابراین در هر ربع تندی حرکت از صفر به v و یا از v به صفر می‌رسد و در نتیجه در هر ربع، یک بار تندی حرکت برابر $\frac{v}{۳}$ می‌شود و به طور کل در هر دوره تندی حرکت، ۴ بار برابر $\frac{v}{۳}$ خواهد شد.



۱۰۸۱ (۳) اولین بار پس از شروع حرکت، نیروی وارد بر متحرک در فاز $\varphi = \frac{\pi}{۲}$ (در لحظهٔ عبور از مرکز نوسان) صفر می‌شود:

$$\Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{۲}$$

مدت زمان لازم برای انجام تغییر فاز $\Delta\varphi = \frac{\pi}{۲}$ توسط نوسانگر، برابر $\frac{T}{۴}$ است. بنابراین داریم:

$$\Delta t = \frac{T}{۴} \xrightarrow{\Delta t = ۳s} ۳ = \frac{T}{۴} \Rightarrow T = ۱۲s \Rightarrow f = \frac{۱}{T} = \frac{۱}{۱۲}Hz$$

نگاه دیگر:

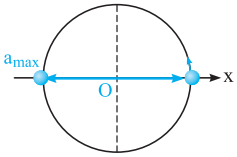
$$\varphi = \omega t \xrightarrow[t=۳s]{\varphi=\frac{\pi}{۲}} \frac{\pi}{۲} = (۲\pi f)\times ۳ \Rightarrow f = \frac{۱}{۱۲}Hz$$

۱۰۸۲ (۲) برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: محاسبهٔ دورهٔ تناوب متحرک:

$$\begin{cases} \text{فرم کلی}: y = A\cos\omega t \\ \text{معادلهٔ داده شده}: y = ۰/۰۱\cos ۲۰\pi t \end{cases} \Rightarrow \omega = ۲۰\pi\ rad/s \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{\omega} = \frac{۱}{۱۰}s$$

گام دوم: اندازهٔ شتاب نوسانگر اولین بار پس از لحظهٔ $t = ۰$ در فاز $\varphi = \pi$ بیشینه می‌شود.



$$\Delta\varphi = \pi$$

از طرفی می‌دانیم که مدت زمان لازم برای تغییر فاز $\Delta\varphi = \pi$، برابر $\Delta t = \frac{T}{۲}$ است و داریم:

$$\Delta t = \frac{T}{۲} \xrightarrow{T=\frac{۱}{۱۰}s} \Delta t = \frac{\frac{۱}{۱۰}}{۲} = \frac{۱}{۲۰}s$$

یه جور دیگه فکر کنیم: برای اولین بار در فاز π شتاب حرکت بیشینه می‌شود و داریم:

$$y = ۰/۰۱\cos(\underbrace{۲۰\pi t}_{\varphi}) \Rightarrow \varphi = ۲۰\pi t \xrightarrow{\varphi=\pi} \pi = ۲۰\pi t \Rightarrow t = \frac{۱}{۲۰}s$$

۱۰۸۳ (۴) برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: طول پاره‌خط نوسان برابر $۲A = ۸۰\ cm$ است، بنابراین دامنهٔ نوسان برابر $A = ۴۰\ cm = ۰/۴\ m$ می‌باشد.

$$x = A\cos(۳۰\pi t) = ۰/۴\cos(۳۰\pi t)$$

گام دوم: برای محاسبهٔ سرعت متوسط نوسانگر در بازهٔ زمانی $t_۱ = \frac{۱}{۹۰}s$ تا $t_۲ = \frac{۳}{۱۸۰}s$، ابتدا مکان نوسانگر را در این دو لحظه به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} t_۱ = \frac{۱}{۹۰}s \Rightarrow x_۱ = ۰/۴\cos\left(۳۰\pi\times\frac{۱}{۹۰}\right) = ۰/۴\times\frac{۱}{۲} = ۰/۲m \\ t_۲ = \frac{۳}{۱۸۰}s \Rightarrow x_۲ = ۰/۴\cos\left(۳۰\pi\times\frac{۳}{۱۸۰}\right) = ۰/۴\times ۰ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \text{جابه‌جایی} = \Delta x = x_۲ - x_۱ = -۰/۲m$$

در ادامه سرعت متوسط نوسانگر با توجه به رابطهٔ $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-۰/۲}{\frac{۳}{۱۸۰} - \frac{۱}{۹۰}} = \frac{-\frac{۲}{۱۰}}{\frac{۱}{۱۸۰}} = -۳۶m/s \Rightarrow |v_{av}| = ۳۶m/s$$

تمرین **شتاب متوسط این نوسانگر در ثانیهٔ اول حرکت چند متر بر مجذور ثانیه است؟**

پاسخ در هر دو لحظهٔ $t = ۰$ و $t = ۱s$، متحرک در مکان $x = +A$ قرار داشته (چرا؟) و سرعت آن برابر صفر است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{\Delta t} = \frac{۰-۰}{۱} = ۰$$

۱۰۸۴ (۳) نوسانگر بر روی پاره‌خط MN نوسان می‌کند. زمانی‌که نوسانگر از نقطهٔ M بدون تغییر جهت به نقطهٔ N می‌رود، به اندازهٔ دو برابر دامنهٔ نوسان (۲A) جابه‌جا شده و مدت زمان لازم برای این جابه‌جایی برابر نصف دورهٔ تناوب $\left(\frac{T}{۲}\right)$ می‌باشد. برای محاسبهٔ سرعت متوسط در این جابه‌جایی می‌توان نوشت:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۲A}{\frac{T}{۲}} = ۴\frac{A}{T}$$