درسنامه ۱

مجموع جملات دنبالهٔ حسابی

یادآوری از دنباله‌های حسابی

اگر از سال گذشته به یاد داشته باشید، جملات دنباله‌های حسابی از جمع عددی ثابت با جملهٔ قبل آن، به‌دست می‌آیند:

$$a_1, \underbrace{a_1+d}_{a_2}, \underbrace{a_1+2d}_{a_3}, \underbrace{a_1+3d}_{a_4}, \cdots \Rightarrow \boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

(a_n، جملهٔ عمومی و d، قدرنسبت دنباله می‌باشد.)

بنابراین اختلاف هر دو جملهٔ متوالی در دنباله‌های حسابی، برابر با قدرنسبت دنباله است:

$$a_n - a_{n-1} = d \Rightarrow \boxed{a_n - a_m = (n-m)d}$$

نکته

اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی از دنبالهٔ حسابی باشند، b واسطهٔ حسابی بین a و c است و در نتیجه:

$$2b = a + c \quad \text{یا} \quad b = \frac{a+c}{2}$$

مثال مقدار a را از دنبالهٔ حسابی $-1, a, 5, \cdots$ بیابید. سپس قدرنسبت این دنباله را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$-1, a, 5, \cdots \xrightarrow{\text{دنبالهٔ حسابی}} 2a = (-1) + 5 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{2} = 2 \text{ ، } d = 2 - (-1) = 3$$

مجموع جملات دنباله‌های حسابی

برای پیدا کردن مجموع n عدد طبیعی متوالی اولیه یعنی $1+2+3+\cdots+n$، جناب گاوس یک ابتکار به خرج دادند و به روش زیر، این حاصل جمع را محاسبه کردند:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & +\cdots+ & n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ +(n & + & (n-1) & + & (n-2) & +\cdots+ & 1) \end{array}$$

$$\underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n \text{ تا}} = n(n+1) \Rightarrow 2(1+2+\cdots+n) = n(n+1)$$

و در نتیجه داریم:

$$\boxed{1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

مثال مجموع چه تعداد از اعداد طبیعی اولیه، برابر با ۲۱۰ می‌گردد؟

پاسخ:

$$1+2+3+\cdots+n = 210 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 210 \Rightarrow n(n+1) = 420 \Rightarrow n(n+1) = 20 \times 21 \Rightarrow n = 20$$

حالا می‌توانیم از همین ابتکار الگو بگیریم و مجموع n جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1 و جملهٔ nام a_n را پیدا کنیم:

$$S_n = a_1 + \overbrace{(a_1 + d)}^{a_2} + \overbrace{(a_1+2d)}^{a_3} + \cdots + \overbrace{(a_1+(n-2)d)}^{a_{n-1}} + \overbrace{(a_1+(n-1)d)}^{a_n}$$

$$(a_1+(n-1)d) + (a_1+(n-2)d) + (a_1+(n-3)d) + \cdots + (a_1+d) + a_1 = S_n$$

$$\Rightarrow 2S_n = \underbrace{(2a_1+(n-1)d)+(2a_1+(n-1)d)+(2a_1+(n-1)d)+\cdots+(2a_1+(n-1)d)+(2a_1+(n-1)d)}_{n \text{ تا}}$$

$$\Rightarrow 2S_n = n(2a_1+(n-1)d) \Rightarrow \boxed{S_n = a_1+\cdots+a_n = \frac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}}$$

درسنامه ۱

و در نتیجه اگر از فرمول جملهٔ nاُم دنبالهٔ حسابی یعنی $a_n = a_1 + (n-1)d$ کمک بگیریم، داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + \overbrace{(a_1 + (n-1)d)}^{a_n}) \Rightarrow \boxed{S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}}$$

مثال

مجموع چند جملهٔ اول از دنبالهٔ حسابی ... ,۶ ,۹ ,۱۲ برابر صفر است؟

پاسخ: با یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d = -3$ مواجه‌ایم، پس داریم:

$$S_n = 0 \Rightarrow \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2} = 0 \xrightarrow[d=-3]{a_1=12} n(2(12) + (n-1)(-3)) = 0 \Rightarrow 24 - 3n + 3 = 0 \Rightarrow 3n = 27 \Rightarrow n = 9$$

بنابراین مجموع ۹ جملهٔ اول این دنبالهٔ حسابی برابر صفر است.

مثال

در یک دنبالهٔ حسابی اگر $a_{12} + a_9 = 15$ باشد، مجموع ۲۰ جملهٔ اول این دنباله را بیابید.

پاسخ:

$$a_{12} + a_9 = (a_1 + 11d) + (a_1 + 8d) = 2a_1 + 19d \Rightarrow 2a_1 + 19d = 15 \quad (*)$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) \stackrel{(*)}{=\!=} 10(15) = 150$$

نکته

اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی از دنبالهٔ حسابی باشند، b واسطهٔ حسابی بین a و c است و در نتیجه:

۱) $a_1 = S_1$

۲) $S_n - S_{n-1} = a_n$

زیرا: $S_n - S_{n-1} = (a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + \cdots + a_{n-1}) = a_n$

مثال

اگر مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی از فرمول $S_n = 5n^2 + 3n$ به‌دست آید، قدرنسبت و جملهٔ عمومی دنباله را بیابید.

پاسخ:

$$\begin{cases} a_1 = S_1 = 5(1)^2 + 3(1) = 8 \quad , \quad S_2 = a_1 + a_2 = 5(2)^2 + 3(2) = 20 + 6 = 26 \\ a_2 = S_2 - S_1 = 26 - 8 = 18 \Rightarrow d = a_2 - a_1 = 18 - 8 = 10 \end{cases} \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = 8 + 10(n-1) = 10n - 2$$

توجه کنید که جملهٔ عمومی دنباله را به طور مستقیم از فرمول S_n هم می‌توانستیم بیابیم:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 5n^2 + 3n - (5(n-1)^2 + 3(n-1))$$

$$= 5n^2 + 3n - (5n^2 - 10n + 5 + 3n - 3) = \cancel{5n^2} + \cancel{3n} - \cancel{5n^2} + 10n - 5 - \cancel{3n} + 3 = 10n - 2 \Rightarrow a_n = 10n - 2$$

مثال

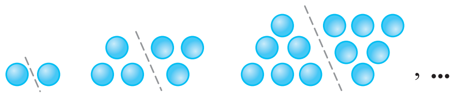
مجموع اعداد دو رقمی مضرب ۶ را بیابید.

پاسخ: اعداد دو رقمی مضرب ۶ : $12, 18, 24, \cdots$, $a_n = 12 + 6(n-1) = 6n + 6$ (+۶ , +۶)

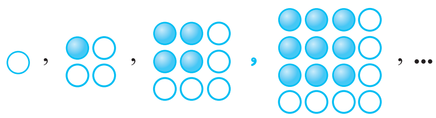
اولاً باید: $a_n = 6n + 6 < 100 \Rightarrow 6n < 94 \Rightarrow n < \frac{94}{6} \simeq 15/6 \Rightarrow n \le 15$

و بنابراین: $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \xlongequal{n=15} \frac{15}{2}(2(12) + \underbrace{(15-1)}_{14}(6)) = \frac{15}{2} \times 108 = 810$

۱. به کمک شکل‌های روبه‌رو، مجموع n عدد طبیعی اولیه (از ۱ تا n) را به‌دست آورید. (مشابه فعالیت صفحهٔ ۲ کتاب درسی)



۲. به کمک شکل روبه‌رو ثابت کنید مجموع n عدد فرد متوالی اولیه، برابر با $n^۲$ است. (مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۶ کتاب درسی)



- در هر یک از دنباله‌های حسابی زیر، مجموع بیست جملهٔ اول را بیابید.

۳. ...،۵،۰،۵- (نهایی- شهریور ۹۲)

۴. ...،۱۰-،۳۰-،۵۰- (نهایی- دی ۹۱)

۵. مجموع جملات دنبالهٔ ۱۰۰،...،۱۰،۷،۴ را بیابید. (نهایی شهرستان- دی ۹۵)

۶. مجموع اعداد فرد مضرب ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۰ چقدر است؟ (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

۷. مجموع اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۱۵ چقدر است؟

۸. در یک دنبالهٔ حسابی هر جمله از جملهٔ ماقبل خود به اندازهٔ $\frac{۱}{۲}$ بیش‌تر است. اگر جملهٔ هفتم برابر ۱۳ باشد، مجموع ۲۰ جملهٔ اول دنباله چقدر است؟

۹. در یک دنبالهٔ حسابی جملات هفتم و دوازدهم به ترتیب ۳۲ و ۱۲ می‌باشد. مجموع ۱۵ جملهٔ اول این دنباله را بیابید.

۱۰. در دنبالهٔ حسابی ...،۱۵،۹،۳، حداقل چند جملهٔ آن را باید با هم جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بیش‌تر شود؟
(مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۶ کتاب درسی و نهایی- دی ۹۳)

۱۱. در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ چهارم برابر با ۳ و جملهٔ هفتم برابر با ۱۲ است،

آ) جملهٔ اول و قدرنسبت دنباله را بیابید.

ب) حداکثر چند جمله از آن را با هم جمع کنیم، تا حاصل کم‌تر از ۴۵۰ شود؟

۱۲. در دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی $a_n = ۳ - ۲n$، مجموع n جملهٔ اولیهٔ دنباله (S_n) را بیابید، سپس مجموع ۱۵ جملهٔ اول آن را به‌دست آورید.

۱۳. اگر مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی $S_n = \frac{۶n^۲ - ۵n}{۱۲}$ باشد،

آ) قدرنسبت و جملهٔ اول آن را به‌دست آورید. ب) مجموع ۱۰ جملهٔ اول آن چقدر است؟

۱۴. در یک دنبالهٔ حسابی با ۲۰ جمله، مجموع جملات ردیف فرد برابر ۲۴۰ و مجموع جملات ردیف زوج برابر با ۲۷۰ می‌باشد، جملهٔ اول و قدرنسبت دنباله را بیابید. (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

۱۵. در یک دنبالهٔ حسابی با ۱۰ جمله، مجموع ۵ جملهٔ اول برابر ۲۵ و مجموع ۵ جملهٔ آخر برابر ۱۰۰ می‌باشد، جملهٔ اول و قدرنسبت دنباله را بیابید.

۱۶. در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_۱$:

آ) اگر قدرنسبت یک واحد افزایش یابد، به مجموع ۱۰ جملهٔ اول آن چند واحد افزوده می‌شود؟

ب) اگر همهٔ جملات دو برابر شوند، مجموع ۱۰ جملهٔ اول آن چند برابر می‌شود؟

۱۷. مجموع چند عدد طبیعی اولیه، $\frac{۳}{۵}$ مربع تعداد آن‌ها می‌باشد؟

۱۸. بر روی محیط یک دایره n نقطه قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. اگر تعداد کل پاره‌خط‌های ایجادشده برابر ۵۵ باشد، تعداد این نقاط چند تا است؟ (این مسئله را به دو روش حل کنید.) (مشابه مثال صفحهٔ ۳ کتاب درسی)

۱۹. یک موسسهٔ خیریه در اولین سال فعالیت خود ۵۰۰ خانوار را تحت پوشش خود دارد. اگر هدف این موسسه آن باشد که هر سال ۴۰ خانوار را به اعضای تحت پوشش خود بیفزاید، پس از ۱۰ سال مجموعاً چند خانوار را تحت پوشش خواهد داشت؟

۲۰. یک مسابقهٔ دو، طوری طراحی شده که از کنار یک سبد شروع به دویدن کرده، در ایستگاه اول یک توپ برداشته، برمی‌گردیم و در سبد می‌اندازیم و سپس تا ایستگاه دوم رفته و دو توپ برمی‌داریم و در سبد می‌اندازیم و به همین ترتیب تا ایستگاه nاُم رفته، n توپ برمی‌داریم و در سبد می‌اندازیم. اگر دونده‌ای در مجموع ۵۵ توپ در سبد انداخته باشد و فاصلهٔ بین هر دو ایستگاه متوالی و هم‌چنین ایستگاه اول تا سبد، ۲ متر باشد، مجموع مسافت‌های طی‌شده توسط این دونده را بیابید. (مشابه مثال صفحهٔ ۴ کتاب درسی)

پاسخ‌های تشریحی

۱

$۲(۱)=۱\times۲$

$۲(۱+۲)=۲\times۳$

$۲(۱+۲+۳)=۳\times۴$

$\vdots$

$۲(۱+۲+\cdots+n)=n\times(n+۱)\Rightarrow ۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$

۲

$۱=۱^۲$

$۱+۳=۲^۲$

$۱+۳+۵=۳^۲$

$۱+۳+۵+۷=۴^۲$

$۱+۳+۵+۷+۹=۵^۲$

$\vdots$

$\underbrace{۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)}_{\text{مجموع n عدد فرد اولیه}}=n^۲$

۳ با یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_۱=-۵$ و قدرنسبت $d=۰-(-۵)=۵$ مواجه‌ایم. بنابراین:

$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$

$\xrightarrow{n=۲۰}S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(۲a_۱+۱۹d)\xlongequal[d=۵]{a_۱=-۵}\frac{۲۰}{۲}(۲(-۵)+۱۹(۵))$

$\Rightarrow S_{۲۰}=۱۰(-۱۰+۹۵)=۱۰\times۸۵=۸۵۰$

۴ با یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_۱=-۵$ و قدرنسبت $d=-۳-(-۵)=۲$ مواجه‌ایم:

$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$

$\xrightarrow{n=۲۰}S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(۲a_۱+۱۹d)\xlongequal[d=۲]{a_۱=-۵}\frac{۲۰}{۲}(۲(-۵)+۱۹(۲))$

$\Rightarrow S_{۲۰}=۱۰(-۱۰+۳۸)=۱۰\times۲۸=۲۸۰$

۵

$\underbrace{\overset{+۳}{}\,۴\ ,\ ۷\ ,\ ۱۰\ ,\ \cdots\ ,\ ۱۰۰}_{\text{دنبالهٔ حسابی با } a_۱=۴ \text{ و قدرنسبت } d=۳}$

حال تعداد جملات دنباله را می‌یابیم:

$a_n=۱۰۰\xrightarrow{a_n=a_۱+(n-۱)d}۴+(n-۱)(۳)=۱۰۰\Rightarrow۳(n-۱)=۹۶$

$\Rightarrow n-۱=\frac{۹۶}{۳}=۳۲\Rightarrow n=۳۳$

$\Rightarrow S_{۳۳}=۴+۷+\cdots+۱۰۰=\frac{۳۳}{۲}(a_۱+a_n)=\frac{۳۳}{۲}(۴+۱۰۰)$

$\Rightarrow S_{۳۳}=\frac{۳۳\times\overset{۵۲}{\cancel{۱۰۴}}}{\cancel{۲}}=۱۷۱۶$

۶ اعداد فرد مضرب ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۰: $\underbrace{۳\ ,\ ۹\ ,\ ۱۵\ ,\ \cdots\ ,\ ۹۹}_{\text{دنبالهٔ حسابی با } a_۱=۳ \text{ و قدرنسبت } d=۶}$

حال تعداد جملات دنباله را می‌یابیم:

$a_n=۹۹\xrightarrow{a_n=a_۱+(n-۱)d}۳+(n-۱)(۶)=۹۹\Rightarrow۶(n-۱)=۹۶$

$\Rightarrow n-۱=\frac{۹۶}{۶}=۱۶\Rightarrow n=۱۷$

و بنابراین مجموع این جملات برابر است با:

$S_{۱۷}=\frac{۱۷}{۲}(a_۱+a_n)=\frac{۱۷}{۲}(۳+۹۹)=\frac{۱۷\times\overset{۵۱}{\cancel{۱۰۲}}}{\cancel{۲}}=۸۶۷$

۷ اعداد بخش‌پذیر بر ۱۵، بر ۳ و ۵ هم بخش‌پذیرند و اولین عدد سه‌رقمی که بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشد، ۱۰۵ است.

$۱۰۵\ ,\ ۱۲۰\ ,\ ۱۳۵\ ,\ \cdots$

برای یافتن تعداد اعداد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۱۵ داریم:

$a_n=a_۱+(n-۱)d<۱۰۰۰\Rightarrow۱۰۵+(n-۱)(۱۵)<۱۰۰۰$

$\Rightarrow۱۵n+۹۰<۱۰۰۰\Rightarrow۱۵n<۹۱۰\Rightarrow n<\frac{۹۱۰}{۱۵}\simeq۶۰/۶\Rightarrow n\le۶۰$

بنابراین داریم: $S_{۶۰}=\frac{۶۰}{۲}(۲a_۱+۵۹d)=\frac{۶۰}{۲}(۲(۱۰۵)+۵۹(۱۵))$

$=۳۰\overbrace{(۲۱۰+۸۸۵)}^{۱۰۹۵}=۳۲۸۵۰$

۸ چون هر جمله از جملهٔ قبلش به اندازهٔ $\frac{۱}{۲}$ بیش‌تر است، پس قدرنسبت دنبالهٔ حسابی برابر $d=\frac{۱}{۲}$ است و چون $a_۷=۱۳$، پس داریم:

$a_۷=a_۱+۶d=۱۳\xrightarrow{d=\frac{۱}{۲}}a_۱+۶(\frac{۱}{۲})=۱۳$

$\Rightarrow a_۱+۳=۱۳\Rightarrow a_۱=۱۳-۳=۱۰$

$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(۲a_۱+۱۹d)\xlongequal[d=\frac{۱}{۲}]{a_۱=۱۰}۱۰(۲(۱۰)+۱۹(\frac{۱}{۲}))$

$=۱۰\overbrace{(۲۰+۹/۵)}^{۲۹/۵}=۲۹۵$

۹

$\begin{cases}a_۷=۳۲\\a_{۱۲}=۱۲\end{cases}\xrightarrow{a_n-a_m=(n-m)d}a_۷-a_{۱۲}=(۷-۱۲)d$

$\Rightarrow\overbrace{۳۲-۱۲}^{۲۰}=-۵d\Rightarrow d=-۴$

$a_۷=a_۱+۶d=۳۲\xrightarrow{d=(-۴)}a_۱+۶(-۴)=۳۲\Rightarrow a_۱=۳۲+۲۴=۵۶$

$\Rightarrow S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}(۲a_۱+۱۴d)=\frac{۱۵}{۲}(۲(۵۶)+۱۴(-۴))$

$=\frac{۱۵}{۲}(۱۱۲-۵۶)=\frac{۱۵}{\cancel{۲}}\times\overset{۲۸}{\cancel{۵۶}}=۴۲۰$

۱۰

$$3,9,15,\ldots \Rightarrow a_1=3$$ و $d=6$ دنبالهٔ حسابی با

$$S_n>300 \Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)>300$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(2(3)+(n-1)(6))>300$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(6+6(n-1))>300 \xrightarrow{\text{فاکتور از ۶}} \frac{6n}{2}(\underbrace{1+n-1}_{n})>300$$

$$\Rightarrow 3n^2>300 \Rightarrow n^2>100 \Rightarrow n>10 \Rightarrow n\ge 11$$

حداقل ۱۱ جمله را باید با هم جمع کنیم.

---

۱۱ آ)

$$\begin{cases}a_4=3\\ a_7=12\end{cases} \xrightarrow{a_n-a_m=(n-m)d} a_4-a_7=(4-7)d$$

$$\Rightarrow 3-12=(-3)d \Rightarrow d=\frac{-9}{-3}=3$$

$$\Rightarrow a_4=a_1+3d=3 \Rightarrow a_1+3(3)=3 \Rightarrow a_1=3-9=-6$$

ب)

$$S_n<450 \Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)<450$$

$$\xrightarrow[d=3]{a_1=-6} \frac{n}{2}(\underbrace{2(-6)+(n-1)(3)}_{3n-15})<450$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور از ۳}} \frac{3n}{2}(n-5)<450$$

$$\xrightarrow{\div\frac{3}{2}} n(n-5)<300 \Rightarrow n^2-5n-300<0$$

$$\Rightarrow (n-20)(n+15)<0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -15<n<20$$

$$\xrightarrow{n>0} n<20 \Rightarrow n\le 19$$

حداکثر ۱۹ جمله را می‌توانیم با هم جمع کنیم.

۱۲

$$a_n=3-2n \Rightarrow a_1=3-2=1 \Rightarrow S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

$$=\frac{n}{2}(1+3-2n)$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{n}{2}(-2n+4) \overset{\text{فاکتور از ۲}}{=\!=} \frac{2n}{2}(-n+2)=n(2-n)$$

روش اول:

$$\Rightarrow S_{15}=15(\underbrace{2-15}_{-13})=15\times(-13)=-195$$

روش دوم:

$$a_n=3-2n \begin{cases}\xrightarrow{n=1} a_1=3-2=1\\ \xrightarrow{n=15} a_{15}=3-2(15)=3-30=-27\end{cases}$$

$$S_{15}=\frac{15}{2}(a_1+a_{15})=\frac{15}{2}(1-27)=\frac{15\times(\cancelto{-13}{-26})}{\cancel{2}}=-195$$

---

۱۳ آ)

$$S_n=\frac{6n^2-5n}{12} \Rightarrow \begin{cases}S_1=a_1=\frac{6-5}{12}=\frac{1}{12}\\ S_2=a_1+a_2=\frac{6(4)-5(2)}{12}=\frac{14}{12}\end{cases}$$

$$a_2=S_2-S_1=\frac{14}{12}-\frac{1}{12}=\frac{13}{12}$$

$$d=a_2-a_1=\frac{13}{12}-\frac{1}{12}=\frac{12}{12}=1$$

ب)

$$S_{10}=\frac{6(10)^2-5(10)}{12}=\frac{600-50}{12}=\frac{550}{12}=\frac{275}{6}$$

۱۴

$$a_1 \overset{+d}{,} a_2 \overset{+d}{,} a_3 , a_4 ,\ldots, a_{20}$$

$+2d \quad +2d$

۱۰ جمله از دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت $2d$

$$\begin{cases}a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}=240\\ a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}=270\end{cases}$$

۱۰ جمله از دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_2 و قدرنسبت $2d$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{10}{2}(2a_1+9(2d))=240\\ \frac{10}{2}(2\underset{a_1+d}{\underset{\downarrow}{a_2}}+9(2d))=270\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5(2a_1+18d)=240\\ 5(2a_1+2d+18d)=270\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2a_1+18d=48\\ 2a_1+20d=54\end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}} 20d-18d=54-48$$

$$\Rightarrow 2d=6 \Rightarrow d=3$$

$$\xrightarrow{2a_1+18d=48} 2a_1+18(3)=48 \Rightarrow 2a_1=48-54=-6$$

$$\Rightarrow a_1=-3$$

۱۵

$$\begin{cases}a_1+a_2+\cdots+a_5=25 \Rightarrow \frac{5}{2}(2a_1+4d)=25\\ a_6+\cdots+a_{10}=100 \Rightarrow \frac{5}{2}(2a_6+4d)=100\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{5}{2}\times 2(a_1+2d)=25 \Rightarrow 5(a_1+2d)=25\\ \frac{5}{2}\times 2(a_6+2d)=100 \Rightarrow 5(a_1+5d+2d)=100\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a_1+2d=5\\ a_1+7d=20\end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}} 7d-2d=20-5 \Rightarrow 5d=15$$

$$\Rightarrow d=3 \xrightarrow{a_1+2d=5} a_1+2(3)=5 \Rightarrow a_1=5-6=-1$$

---

۱۶ آ)

$$S_{10}=\frac{10}{2}(2a_1+9d)=5(2a_1+9d)$$

$$S'_{10}=\frac{10}{2}(2a_1+9(d+1))=5(2a_1+9d+9)=5(2a_1+9d)+45$$

$\Rightarrow S'_{10}-S_{10}=45 \Rightarrow$ ۴۵ واحد افزوده می‌شود.

ب)

$$S_{10}=\frac{10}{2}(a_1+a_{10})$$

$S'_{10}=\frac{10}{2}(\underbrace{2a_1+2a_{10}}_{\text{فاکتور از ۲}})=2\left(\frac{10}{2}(a_1+a_{10})\right)=2S_{10} \Rightarrow$ ۲ برابر می‌شود.

۱۷

$$۱+۲+\cdots+n=\frac{۳}{۵}n^{۲} \Rightarrow \frac{n(n+۱)}{۲}=\frac{۳n^{۲}}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{n^{۲}+n}{۲}=\frac{۳n^{۲}}{۵} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۵n^{۲}+۵n=۶n^{۲}$$

$$\Rightarrow n^{۲}-۵n=۰ \xrightarrow{n\neq ۰} n=۵$$

---

۱۸ **روش اول:** از نقطهٔ اول به $(n-۱)$ نقطهٔ دیگر وصل می‌کنیم $\Leftarrow$ $(n-۱)$ پاره‌خط

از نقطهٔ دوم به $(n-۲)$ نقطهٔ دیگر (همه به غیر از نقطهٔ اول) وصل می‌کنیم. $\Leftarrow$ $(n-۲)$ پاره خط

از نقطهٔ سوم به $(n-۳)$ نقطهٔ دیگر (همه به غیر از نقاط اول و دوم) وصل می‌کنیم. $\Leftarrow$ $(n-۳)$ پاره خط

با ادامهٔ این روند، تعداد پاره‌خط‌های ایجادشده برابر است با:

$$(n-۱)+(n-۲)+(n-۳)+\cdots+۲+۱$$

$$=\frac{(n-۱)}{۲}\overbrace{((n-۱)+۱)}^{n}=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-۱)}{۲}=۵۵ \Rightarrow n(n-۱)=۱۱۰$$

$$\Rightarrow n(n-۱)=۱۱\times ۱۰ \Rightarrow n=۱۱$$

روش دوم (ترکیبیات): برای داشتن هر پاره‌خط کافی است دو نقطه از آن را انتخاب کنیم، در نتیجه:

$$\text{تعداد پاره‌خط‌ها}=\binom{n}{۲}=۵۵ \Rightarrow \frac{n(n-۱)}{۲}=۵۵$$

$$\Rightarrow n(n-۱)=۱۱۰=۱۱\times ۱۰ \Rightarrow n=۱۱$$

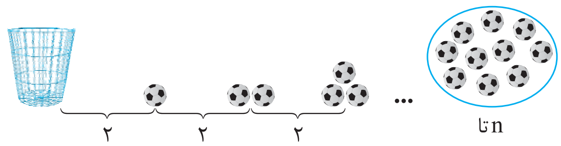
۱۹

$$a_{۱}=۵۰۰ \quad , \quad d=۴۰$$

$$\xrightarrow{S_n=\frac{n}{۲}(۲a_{۱}+(n-۱)d)} S_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}(۲a_{۱}+۹d)=۵(۲(۵۰۰)+۹(۴۰))$$

$$\Rightarrow S_{۱۰}=۵(۱۰۰۰+۳۶۰)=۱۳۶۰\times ۵=۶۸۰۰ \text{ خانوار}$$

۲۰



مجموع توپ‌هایی که دونده در سبد انداخته ۵۵ تاست، بنابراین داریم:

$$۱+۲+۳+\cdots+n=۵۵ \Rightarrow \frac{n(n+۱)}{۲}=۵۵$$

$$\Rightarrow n(n+۱)=۱۱۰=۱۰\times ۱۱ \Rightarrow n=۱۰$$

یعنی دونده تا ایستگاه ۱۰ اُم دویده است و مسافت طی‌شده توسط او برابر است با:

$$\text{برای ایستگاه اول } = ۲\times ۲$$

$$\text{برای ایستگاه دوم } = ۴\times ۲$$

$$\text{برای ایستگاه سوم } = ۶\times ۲$$

$$\vdots$$

$$\xrightarrow[a_{۱}=۴ , d=۴]{\text{دنبالهٔ حسابی}} S_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}(\overbrace{۲(۴)+۹(۴)}^{۱۱\times ۴})=۵\times ۴۴=۲۲۰ \text{ متر}$$

درسنامه ۲

مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

یادآوری از دنباله‌های هندسی

جملات دنباله‌های هندسی از ضرب عددی ثابت در جملهٔ قبل آن به‌دست می‌آیند:

$$a_{۱} \xrightarrow{\times q} \underbrace{a_{۱}q}_{a_{۲}} \xrightarrow{\times q} \underbrace{a_{۱}q^{۲}}_{a_{۳}} \xrightarrow{\times q} \underbrace{a_{۱}q^{۳}}_{a_{۴}} , \cdots \Rightarrow \boxed{a_n=a_{۱}q^{n-۱}}$$

(a_n جملهٔ عمومی(n اُم) و q قدرنسبت دنباله می‌باشد.)

بنابراین نسبت هر دو جملهٔ متوالی در دنبالهٔ هندسی، برابر با قدرنسبت دنباله است:

$$\frac{a_n}{a_{n-۱}}=q \Rightarrow \boxed{\frac{a_n}{a_m}=q^{n-m}}$$

نکته

اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی از دنبالهٔ هندسی باشند، b را واسطهٔ هندسی a و c می‌گویند و داریم:

$$b^{۲}=ac \text{ یا } b=\pm\sqrt{ac}$$

درسنامه ۲

مثال مقادیر x و y را در دنبالهٔ هندسی $۴, x, y, \frac{۱}{۲}, \dots$ بیابید.

پاسخ: روش اول:

$$۴, x, y, \frac{۱}{۲}, \dots \xrightarrow{\text{دنبالهٔ هندسی}} \begin{cases} x^۲ = ۴y \Rightarrow y = \frac{x^۲}{۴} \\ y^۲ = \frac{۱}{۲}x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^۲}{۴}\right)^۲ = \frac{x}{۲} \Rightarrow \frac{x^۴}{۱۶} = \frac{x}{۲} \Rightarrow ۲x^۴ = ۱۶x \xrightarrow{\div(۲x)} x^۳ = ۸ \Rightarrow x = ۲ \xrightarrow{y=\frac{x^۲}{۴}} y = \frac{۴}{۴} = ۱$$

روش دوم:

$$q^{۴-۱} = \frac{a_۴}{a_۱} \Rightarrow q^۳ = \frac{\frac{۱}{۲}}{۴} = \frac{۱}{۸} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۳ \Rightarrow q = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۴\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۲ \\ y = x\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۲\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۱ \end{cases}$$

مجموع جملات دنباله‌های هندسی

اگر $S_n = a_۱ + a_۲ + \dots + a_n$، مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی باشد، به‌کمک روش زیر می‌توان فرمولی برای S_n یافت:

$$S_n = a_۱ + a_۱q + a_۱q^۲ + \dots + a_۱q^{n-۱} \qquad (*)$$

طرفین رابطهٔ بالا را در q ضرب می‌کنیم:

$$qS_n = a_۱q + a_۱q^۲ + a_۱q^۳ + \dots + a_۱q^{n-۱} + a_۱q^n \quad (**)$$

حالا اگر طرفین دو رابطه را از هم کم کنیم، داریم:

$$\xrightarrow{(**)-(*)} qS_n - S_n = (\cancel{a_۱q} + \cancel{a_۱q^۲} + \dots + \cancel{a_۱q^{n-۱}} + a_۱q^n) - (a_۱ + \cancel{a_۱q} + \dots + \cancel{a_۱q^{n-۱}})$$

$$\Rightarrow \underbrace{qS_n - S_n}_{\text{فاکتور از } S_n} = \underbrace{a_۱q^n - a_۱}_{\text{فاکتور از } a_۱} \Rightarrow S_n(q-۱) = a_۱(q^n-۱) \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{a_۱(q^n-۱)}{q-۱}}$$

مثال مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $\frac{۱}{۲}, ۱, ۲, \dots$، چند برابر جملهٔ اول آن است؟

پاسخ: دنبالهٔ هندسی با $q = ۲ , a_۱ = \frac{۱}{۲} \Leftarrow \frac{۱}{۲}, ۱, ۲, \dots$ ($\times ۲$, $\times ۲$)

$$\Rightarrow S_{۱۰} = \frac{a_۱(q^{۱۰}-۱)}{q-۱} = \frac{\frac{۱}{۲}(۲^{۱۰}-۱)}{۲-۱} = \frac{۱}{۲}(۱۰۲۴-۱) = \frac{۱۰۲۳}{۲} \Rightarrow \frac{S_{۱۰}}{a_۱} = \frac{\frac{۱۰۲۳}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = ۱۰۲۳$$

مثال در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع ۱۰ جملهٔ اول برابر ۶۶ و مجموع ۵ جملهٔ اول برابر ۶۴ است. قدرنسبت دنباله را بیابید.

پاسخ:

$$\begin{cases} S_{۱۰} = \frac{a_۱(q^{۱۰}-۱)}{q-۱} = ۶۶ \\ S_۵ = \frac{a_۱(q^۵-۱)}{q-۱} = ۶۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم.}} \frac{S_{۱۰}}{S_۵} = \frac{\frac{a_۱(q^{۱۰}-۱)}{q-۱}}{\frac{a_۱(q^۵-۱)}{q-۱}} = \frac{۶۶}{۶۴}$$

$$\xrightarrow{\text{دور در دور، نزدیک در نزدیک}} \frac{\cancel{a_۱}(q^{۱۰}-۱)\cancel{(q-۱)}}{\cancel{a_۱}(q^۵-۱)\cancel{(q-۱)}} = \frac{۶۶}{۶۴} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{\cancel{(q^۵-۱)}(q^۵+۱)}{\cancel{q^۵-۱}} = \frac{۶۶}{۶۴}$$

$$\Rightarrow q^۵ + ۱ = \frac{۳۳}{۳۲} \Rightarrow q^۵ = \frac{۳۳}{۳۲} - ۱ \Rightarrow q^۵ = \frac{۱}{۳۲} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۵ \Rightarrow q = \frac{۱}{۲}$$

درسنامه ۲

نکته

برای مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی، یعنی S_n، نیز رابطه‌های روبه‌رو برقرار است: $۲)\ S_n - S_{n-۱} = a_n$ $\quad ۱)\ S_۱ = a_۱$

مثال **اگر مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی برابر با $S_n = ۲^n - ۱$ باشد، جملهٔ اول و قدرنسبت این دنباله را بیابید.**

پاسخ:

$$a_۱ = S_۱ = ۲^۱ - ۱ = ۱$$

روش اول:

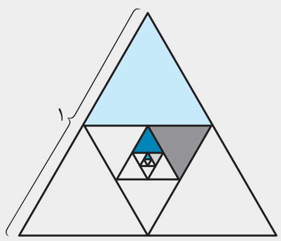
$$a_n = S_n - S_{n-۱} = (۲^n - ۱) - (۲^{(n-۱)} - ۱) = ۲^n - ۲^{n-۱} = ۲^{n-۱}(\underbrace{۲-۱}_{۱}) = ۲^{n-۱}$$

$$a_n = a_۱q^{n-۱} \xrightarrow[a_n = ۲^{n-۱}]{a_۱ = ۱} ۲^{n-۱} = ۱ \times q^{n-۱} \Rightarrow q = ۲$$

روش دوم:

$$S_n = ۲^n - ۱ \begin{cases} S_۱ = a_۱ = ۲ - ۱ = ۱ \\ S_۲ = a_۱ + a_۲ = ۲^۲ - ۱ = ۳ \end{cases} \Rightarrow ۱ + a_۲ = ۳ \Rightarrow a_۲ = ۲ \Rightarrow q = \frac{a_۲}{a_۱} = \frac{۲}{۱} = ۲$$

مثال **اگر هر بار وسط اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع روبه‌رو را به هم وصل کنیم، مساحت قسمت رنگی چقدر است؟**



پاسخ: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ برابر است با: $S = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۱^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$

در هر مرحله مساحت رنگ‌شده $\frac{۱}{۴}$ مساحت مثلث ایجادشده است و مساحت مثلث ایجادشده $\frac{۱}{۴}$ مساحت مثلث قبلی است:

$$a_۱ = \frac{۱}{۴}S = \frac{۱}{۴}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)$$

$$a_۲ = \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۴}S\right) = \left(\frac{۱}{۴}\right)^۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)$$

$$a_۳ = \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۴}S\right)\right) = \left(\frac{۱}{۴}\right)^۳\left(\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)$$

$$\vdots$$

بنابراین با دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\left(\frac{۱}{۴}\right)$ مواجهایم و مساحت قسمت رنگی ایجادشده برابر است با:

$$S_۵ = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_۵ = \frac{a_۱(q^۵ - ۱)}{q - ۱} = \frac{\frac{۱}{۴}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)\left(\left(\frac{۱}{۴}\right)^۵ - ۱\right)}{\left(\frac{۱}{۴} - ۱\right)} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴^۲} \times \frac{۱ - \overset{۱۰۲۴}{۴^۵}}{۴^۵}}{-\frac{۳}{۴}} = \frac{-\overset{۳۴۱}{\cancel{۱۰۲۳}} \times \sqrt{۳}}{-۴^۶ \times \cancel{۳}} = \frac{۳۴۱\sqrt{۳}}{۴۰۹۶}$$

– در هر یک از دنباله‌های هندسی زیر، مجموع ۱۰ جملهٔ اول را بیابید.

۲۱. $\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۹}, \frac{۱}{۲۷}, \ldots$ (نهایی- خرداد ۹۱، با کمی تغییر)

۲۲. $\frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۲۰}, \frac{۱}{۸۰}, \ldots$ (نهایی- شهریور ۹۵، با کمی تغییر)

۲۳. $\frac{۱}{۸}, \frac{-۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, \ldots$

– حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

۲۴. $\frac{۱}{۲} + ۱ + ۲ + ۴ + \cdots + ۲۰۴۸$

۲۵. $-۱ - ۳ - ۹ \cdots - ۷۲۹$

۲۶. $۱ + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۴} + \cdots + \frac{۱}{۷۲۹} - \frac{۱}{۱۲۸}$

۲۷. مجموع چند جملهٔ اول از دنبالهٔ هندسی ۶، ۱۲-، ۲۴، ۰۰۰ برابر ۱۲۶- خواهد شد؟ (نهایی- خرداد ۹۰)

۲۸. در یک دنبالهٔ اعداد، هر جمله دو برابر جملهٔ قبلی آن است. اگر مجموع ۵ جملهٔ اول آن برابر ۴۶/۵ باشد، جملهٔ اول دنباله را بیابید.

۲۹. در یک دنبالهٔ هندسی جملهٔ پانزدهم ۸ برابر جملهٔ دوازدهم است. مجموع ۸ جملهٔ اول این دنباله، چند برابر جملهٔ اول آن است؟

۳۰. مجموع ۱۲ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی ۹ برابر مجموع ۶ جملهٔ اول آن است. قدرنسبت را بیابید.

۳۱. مجموع ۱۰ جملهٔ دوم دنبالهٔ هندسی ۱، ۲، ۴، ۰۰۰ چند برابر مجموع ۱۰ جملهٔ اول آن است؟

۳۲. جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی به‌صورت $a_n = ۳\times ۲^n$ است، (مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

آ) مجموع ۵ جملهٔ اول آن را بیابید. ب) مجموع چند جمله از این دنباله برابر با ۳۰۶۶ است؟

۳۳. در یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت q، مجموع ۱۰ جملهٔ اول S می‌باشد،

آ) اگر جملهٔ اول را دو برابر کنیم، مجموع ۱۰ جملهٔ اول چند برابر می‌شود؟

ب) اگر قدرنسبت را به توان ۲ برسانیم، مجموع ۱۰ جملهٔ اول را بر حسب S و q بیابید.

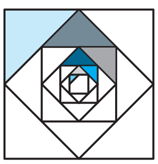
- درستی هر یک از تساوی‌های زیر را اثبات کنید. (مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

۳۴. $۱+a+a^۲+\cdots+a^{n-۱}=\dfrac{۱-a^n}{۱-a}$

۳۵. $a^n+۱=(a+۱)(a^{n-۱}-a^{n-۲}+\cdots-a+۱)$; (n فرد)

۳۶. $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-۱}+x^{n-۲}y+\cdots+xy^{n-۲}+y^{n-۱})$

۳۷. اگر ضلع مربع ۱ واحد باشد و در هر مرحله وسط اضلاع مربع را به هم وصل کنیم تا مربع جدیدی حاصل شود، مساحت قسمت رنگی چقدر است؟



۳۸. طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از مرحلهٔ قبل را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله، حداقل ۹۹ درصد از سطح مربع رنگ شده است؟

(تمرین ۶ صفحهٔ ۶ کتاب درسی و نهایی- دی ۹۴)

۳۹. برای از بین بردن ذرات معلق در یک محلول، آن را از صافی‌هایی عبور می‌دهیم. اگر در اثر عبور از هر صافی تعداد ذرات معلق موجود در محلول نصف شود، حداقل چند صافی نیاز است تا ذرات معلق موجود در محلول، حداقل ۹۶ درصد کاهش یابد؟

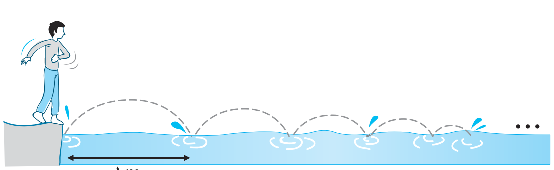
(مشابه مثال صفحهٔ ۵ کتاب درسی و نهایی- مدارس تهران)

۴۰. یک مثلث با محیط p را در نظر بگیرید و وسط اضلاع آن را به هم وصل کنید تا مثلث کوچک‌تری ایجاد شود. این عمل را به‌طور متوالی انجام دهید. مجموع محیط مثلث‌های به‌دست‌آمده از مثلث اول تا مثلث مرحلهٔ دهم، چند برابر p است؟ (نهایی- خرداد ۹۴، با کمی تغییر)

۴۱. توپی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی زمین بخورد، پس از زمین خوردن به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع اولیه‌اش بالا می‌رود. فرض کنید این توپ را به‌طور قائم از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع ۹ متری برسد. این توپ پس از شروع پرتاب تا ۶اُمین برخورد به زمین در کل مسافت عمودی طی‌شده چه‌قدر است؟ (نهایی- خرداد ۹۰، با کمی تغییر)

۴۲. علی می‌خواهد پول خود را پس‌انداز کند. او روز اول ۳۰۰۰۰ تومان پس‌انداز می‌کند و روزهای دیگر میزان آن را ۱۰ درصد نسبت به روز قبل افزایش می‌دهد، پس از یک هفته چند تومان پس‌انداز می‌کند؟ $((۱/۱)^۷ \simeq ۱/۹۵)$

۴۳. کودکی سنگی را بر روی سطح آب پرتاب می‌کند. این سنگ در مسیر نیم‌دایره‌هایی روی سطح آب حرکت می‌کند. اگر اولین برخورد سنگ با سطح آب ۱ متر جلوتر از کودک باشد و پس از هر برخورد سنگ با آب، قطر نیم‌دایره ۵۰ درصد کاهش یابد، پس از ۵اُمین برخورد با سطح آب:



آ) فاصلهٔ سنگ تا کودک چقدر است؟ (تا دو رقم اعشار) ب) سنگ چه مسافتی را پیموده است؟ $(\pi \simeq ۳/۲)$

۴۴. پدری برای کادوی سالگرد تولد فرزندش، سال اول ۱ سکه، سال دوم ۲ سکه، سال سوم ۴ سکه و به همین ترتیب هر سال دو برابر سال قبل سکه برای او پس‌انداز می‌کند. اگر بهای هر سکه ۱۰۰۰۰ تومان باشد، وقتی این فرزند به ۱۰ سالگی می‌رسد، چند سکه کادو گرفته و بهای کل آن‌ها چقدر است؟ (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

۴۵. در مسئلهٔ مخترع شطرنج، اگر وزن هر دانهٔ گندم ۱ گرم باشد، نشان دهید این مخترع بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن گندم جایزه دریافت خواهد کرد.

پاسخ‌های تشریحی

۲۱

$\times\frac{۱}{۳} \quad \times\frac{۱}{۳}$

$\underbrace{\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۹},\frac{۱}{۲۷},\dots}$

دنبالهٔ هندسی با $a_۱=\frac{۱}{۳}$ و $q=\frac{۱}{۳}$

$$\Rightarrow S_{۱۰}=\frac{a_۱(q^{۱۰}-۱)}{q-۱}=\frac{\frac{۱}{۳}((\frac{۱}{۳})^{۱۰}-۱)}{\frac{۱}{۳}-۱}=\frac{\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۳^{۱۰}}-۱)}{-\frac{۲}{۳}}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۳}(\frac{۱-۳^{۱۰}}{۳^{۱۰}})}{-\frac{۲}{۳}}=\frac{\frac{۱-۳^{۱۰}}{۳^{۱۱}}}{-\frac{۲}{۳}}=-\frac{\cancel{۳}(۱-۳^{۱۰})}{۲\times \underset{۳^{۱۰}}{\cancel{۳^{۱۱}}}}=\frac{۳^{۱۰}-۱}{۲\times ۳^{۱۰}}$$

۲۲

$\times\frac{۱}{۴} \quad \times\frac{۱}{۴}$

$\underbrace{\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۲۰},\frac{۱}{۸۰},\dots}$

دنبالهٔ هندسی با $a_۱=\frac{۱}{۵}$ و $q=\frac{۱}{۴}$

$$S_{۱۰}=\frac{a_۱(q^{۱۰}-۱)}{q-۱}\overset{a_۱=\frac{۱}{۵}}{\underset{q=\frac{۱}{۴}}{=}}\frac{\frac{۱}{۵}((\frac{۱}{۴})^{۱۰}-۱)}{\frac{۱}{۴}-۱}=\frac{\frac{۱}{۵}(\frac{۱}{۴^{۱۰}}-۱)}{\frac{-۳}{۴}}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۵}(\frac{۱-۴^{۱۰}}{۴^{۱۰}})}{-\frac{۳}{۴}}=\frac{(۴^{۱۰}-۱)}{۱۵\times ۴^{۹}}$$

۲۳

$\times(-۲) \quad \times(-۲)$

$\underbrace{\frac{۱}{۸},\frac{-۱}{۴},\frac{۱}{۲},\dots}$

دنبالهٔ هندسی با $a_۱=\frac{۱}{۸}$ و $q=-۲$

$$S_{۱۰}=\frac{a_۱(q^{۱۰}-۱)}{q-۱}\overset{a_۱=\frac{۱}{۸}}{\underset{q=(-۲)}{=}}\frac{\frac{۱}{۸}((-۲)^{۱۰}-۱)}{-۲-۱}=\frac{\frac{۱}{۸}(۲^{۱۰}-۱)}{-۳}$$

$$=\frac{۱۰۲۴-۱}{-۳\times ۸}=-\frac{\overset{۳۴۱}{\cancel{۱۰۲۳}}}{\cancel{۳}\times ۸}=\frac{-۳۴۱}{۸}$$

۲۴

$\times۲ \quad \times۲ \quad \times۲$

$\underbrace{\frac{۱}{۲},۱,۲,۴,\dots,۲۰۴۸}$

دنبالهٔ هندسی با $a_۱=\frac{۱}{۲}$ و $q=۲$

$$a_n=۲۰۴۸\Rightarrow a_۱q^{n-۱}=۲۰۴۸\Rightarrow\frac{۱}{۲}\times ۲^{n-۱}=۲۰۴۸\Rightarrow ۲^{n-۲}=۲^{۱۱}$$

$$\Rightarrow n-۲=۱۱\Rightarrow n=۱۳$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}+۱+۲+۴+\dots+۲۰۴۸=\frac{a_۱(q^{۱۳}-۱)}{q-۱}=\frac{\frac{۱}{۲}(۲^{۱۳}-۱)}{\underbrace{۲-۱}_{۱}}=\frac{۲^{۱۳}-۱}{۲}$$

$$=\frac{۸۱۹۲-۱}{۲}=\frac{۸۱۹۱}{۲}=۴۰۹۵/۵$$

۲۵

$-۱,-۳,-۹,\dots,-۷۲۹\Rightarrow$ دنبالهٔ هندسی با $a_۱=-۱$ و $q=۳$

$$a_n=-۷۲۹\Rightarrow a_۱q^{n-۱}=-۷۲۹\Rightarrow(-۱)۳^{n-۱}=-۷۲۹\Rightarrow ۳^{n-۱}=۳^{۶}$$

$$\Rightarrow n-۱=۶\Rightarrow n=۷$$

$$\Rightarrow -۱-۳-۹-\dots-۷۲۹=\frac{a_۱(q^{۷}-۱)}{q-۱}=\frac{(-۱)(۳^{۷}-۱)}{۳-۱}$$

$$=-\frac{۱}{۲}(۲۱۸۷-۱)=-\frac{۲۱۸۶}{۲}=-۱۰۹۳$$

۲۶

$$۱+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۴}+\dots+\frac{۱}{۷۲۹}-\frac{۱}{۱۲۸}$$

$$=\underbrace{(۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+\dots+\overset{\frac{۱}{۳^{۶}}}{\frac{۱}{۷۲۹}})}_{q=\frac{۱}{۳},n=۷}-\underbrace{(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\dots+\overset{\frac{۱}{۲^{۷}}}{\frac{۱}{۱۲۸}})}_{q=\frac{۱}{۲},n=۷}$$

$$=\frac{۱(۱-(\frac{۱}{۳})^{۷})}{۱-\frac{۱}{۳}}-\frac{\frac{۱}{۲}(۱-(\frac{۱}{۲})^{۷})}{۱-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱-\frac{۱}{۳^{۷}}}{\frac{۲}{۳}}-\frac{\frac{۱}{۲}(۱-\frac{۱}{۲^{۷}})}{\frac{۱}{۲}}$$

$$=\frac{۳-\frac{۱}{۳^{۶}}}{۲}-(۱-\frac{۱}{۲^{۷}})=\frac{۳^{۷}-۱}{۲\times ۳^{۶}}-\frac{۲^{۷}-۱}{۲^{۷}}$$

۲۷

$\times(-۲) \quad \times(-۲)$

$$۶,-۱۲,۲۴,\dots\Rightarrow q=-۲\ ,\ a_۱=۶$$

$$S_n=a_۱+a_۲+\dots+a_n=-۱۲۶\Rightarrow\frac{۶(۱-(-۲)^n)}{۱-(-۲)}=-۱۲۶$$

$$\Rightarrow\frac{\overset{۲}{\cancel{۶}}(۱-(-۲)^n)}{\cancel{۳}}=-۱۲۶\Rightarrow ۱-(-۲)^n=\frac{-۱۲۶}{۲}=-۶۳$$

$$\Rightarrow(-۲)^n=۱-(-۶۳)\Rightarrow(-۲)^n=۶۴\Rightarrow n=۶$$

۲۸ با یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $q=2$ سر و کار داریم، بنابراین:

$$S_5=46.5 \Rightarrow \frac{a_1(q^5-1)}{q-1}=46.5 \xrightarrow{q=2} \frac{a_1(2^5-1)}{2-1}=46.5$$

$$\Rightarrow a_1(32-1)=46.5 \Rightarrow 31a_1=46.5$$

$$\Rightarrow a_1=\frac{46.5}{31}=\frac{\frac{93}{2}}{31}=\frac{\overset{3}{\cancel{93}}}{2\times \underset{1}{\cancel{31}}}=\frac{3}{2}$$

۲۹

$$a_{15}=8a_{12} \xrightarrow{a_n=a_1q^{n-1}} a_1q^{14}=8a_1q^{11} \xrightarrow[\div a_1]{a_1\neq 0} q^{14}=8q^{11}$$

$$\Rightarrow \frac{q^{14}}{q^{11}}=8\Rightarrow q^3=8\Rightarrow q^3=2^3\Rightarrow q=2$$

$$S_8=\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=\frac{a_1(1-2^8)}{1-2}=-a_1(1-256)$$

$$=-(-255)a_1=255a_1$$

۳۰

$$S_{12}=9S_6 \Rightarrow \frac{\cancel{a_1}(1-q^{12})}{\cancel{1-q}}=9\frac{\cancel{a_1}(1-q^6)}{\cancel{1-q}}$$

$$\Rightarrow 1-q^{12}=9(1-q^6) \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \cancel{(1-q^6)}(1+q^6)=9\cancel{(1-q^6)}$$

$$\Rightarrow 1+q^6=9\Rightarrow q^6=8\Rightarrow q=\pm\sqrt{2}$$

۳۱

$$\underbrace{1 \overset{\times 2}{,} 2 \overset{\times 2}{,} 4 , \dots}_{}$$

دنبالهٔ هندسی با $a_1=1$ و $q=2$

$$\text{مجموع ۱۰ جملهٔ اول}=S_{10}=\frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1}=\frac{1(2^{10}-1)}{2-1}$$

$$=2^{10}-1=1024-1=1023$$

روش اول: ۱۰ جملهٔ دوم از a_{11} شروع و به a_{20} ختم می‌گردد، پس داریم:

$$\text{مجموع ۱۰ جملهٔ دوم}=a_{11}+a_{12}+\dots+a_{20} \overset{q=2}{=} \frac{a_{11}(2^{10}-1)}{2-1}$$

$$=\frac{a_1q^{10}(1024-1)}{1}=1\times 2^{10}(1023)=1024\times 1023$$

روش دوم:

$$\text{مجموع ۲۰ جملهٔ اول}=S_{20}=\frac{a_1(q^{20}-1)}{q-1}=\frac{1(2^{20}-1)}{2-1}=2^{20}-1$$

مجموع ۱۰ جملهٔ دوم = مجموع ۲۰ جملهٔ اول − مجموع ۱۰ جملهٔ اول

$$=(2^{20}-1)-(2^{10}-1)=2^{20}-2^{10}=2^{10}(2^{10}-1)=1024\times 1023$$

بنابراین:

$$\Rightarrow \frac{\text{مجموع ۱۰ جملهٔ دوم}}{\text{مجموع ۱۰ جملهٔ اول}}=\frac{1024\times\cancel{1023}}{\cancel{1023}}=1024$$

۳۲ آ)

$$a_1=6\ ,\ a_2=3\times 4=12\Rightarrow q=\frac{a_2}{a_1}=2$$

$$S_5=\frac{6(1-2^5)}{1-2}=\frac{6(1-32)}{-1}=(-6)(-31)=6\times 31=186$$

ب)

$$S_n=3066\Rightarrow \frac{6(1-2^n)}{1-2}=3066\Rightarrow 6(2^n-1)=3066$$

$$\Rightarrow 2^n-1=\frac{3066}{6}=511\Rightarrow 2^n=512=2^9\Rightarrow n=9$$

۳۳

$$S=\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}$$

آ)

$$S_{10}=\frac{(2a_1)(1-q^{10})}{1-q}=2\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}=2S\Rightarrow$$ ۲ برابر می‌شود.

ب)

$$S_{10}=\frac{a_1(1-(q^2)^{10})}{1-q^2}=\frac{a_1(1-(q^{10})^2)}{1-q^2}$$

$$\overset{\text{اتحاد مزدوج}}{=} \underbrace{\frac{a_1(1-q^{10})}{(1-q)}}_{S}\cdot\frac{(1+q^{10})}{(1+q)}=\frac{1+q^{10}}{1+q}S$$

۳۴

$$\overbrace{1+a+a^2+\dots+a^{n-1}}^{n\ \text{جمله}} \overset{\text{دنبالهٔ هندسی}}{\underset{q=a}{=}} \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

$$=\frac{1(a^n-1)}{a-1}=\frac{1-a^n}{1-a}$$

۳۵ **روش اول:** با توجه به درستی تساوی مسئلهٔ قبل کافی است به جای a، $(-a)$ قرار دهیم:

$$1+(-a)+(-a)^2+\dots+(-a)^{n-2}+(-a)^{n-1}=\frac{1-(-a)^n}{1-(-a)}$$

$$\xrightarrow{n\ \text{فرد}} 1-a+a^2+\dots-a^{n-2}+a^{n-1}=\frac{1+a^n}{1+a}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+\dots+a^2-a+1)$$

روش دوم:

$$1-a+a^2+\dots-a^{n-2}+a^{n-1} \overset{\text{دنبالهٔ هندسی}}{\underset{q=(-a)}{=}} \frac{1(1-(-a)^n)}{1-(-a)}$$

$$\overset{n\ \text{فرد}}{=} \frac{1+a^n}{1+a}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} a^n+1=(a+1)(1-a+a^2+\dots-a^{n-2}+a^{n-1})$$

۳۶

$$x^{n-۱}+x^{n-۲}y+\cdots+xy^{n-۲}+y^{n-۱}$$

$$\times\frac{y}{x}$$

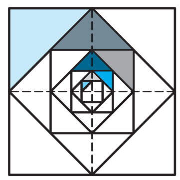
$$\xrightarrow[q=\frac{y}{x}]{\text{دنبالهٔ هندسی}}\frac{x^{n-۱}\left(\left(\frac{y}{x}\right)^n-۱\right)}{\frac{y}{x}-۱}=\frac{\cancel{x^{n-۱}}\left(\frac{y^n-x^n}{x\,\cancel{x^n}}\right)}{\frac{y-x}{x}}$$

$$=\frac{\frac{y^n-x^n}{x}}{\frac{y-x}{x}}\xrightarrow[\text{نزدیک در نزدیک}]{\text{دور در دور}}\frac{\cancel{x}(y^n-x^n)}{\cancel{x}(y-x)}=\frac{x^n-y^n}{x-y}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}x^n-y^n=(x-y)(x^{n-۱}+x^{n-۲}y+\cdots+y^{n-۱})$$

---

۳۷ در مربع اول (بزرگ‌ترین مربع) مساحت قسمت رنگی $\frac{۱}{۸}$ مساحت مربع است. به همین ترتیب در هر مرحله، مساحت قسمت رنگی از هر مربع، $\frac{۱}{۸}$ مساحت همان مربع است.



بنابراین اگر a_n مساحت مثلث رنگی در مربع nام باشد، چون مساحت مربع‌ها هر بار نصف می‌گردد، داریم:

$$\begin{cases}a_۱=\frac{۱}{۸} & (۱)\\ a_۲=\frac{۱}{۸}\left(\frac{۱}{۲}\times ۱\right)\\ a_۳=\frac{۱}{۸}\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times ۱\right)\\ \vdots\end{cases}$$

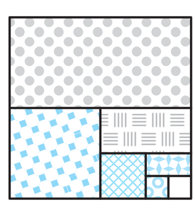
$\Rightarrow$ دنبالهٔ هندسی با $a_۱=\frac{۱}{۸}$ و قدرنسبت $q=\frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow$ مساحت رنگی $=S_۷=a_۱+a_۲+\cdots+a_۷=\frac{a_۱(q^۷-۱)}{q-۱}$

$$=\frac{\frac{۱}{۸}\left(\left(\frac{۱}{۲}\right)^۷-۱\right)}{\frac{۱}{۲}-۱}=\frac{\frac{۱}{۸}\left(\frac{۱}{۲^۷}-۱\right)}{-\frac{۱}{۲}}=-\frac{۲}{۸}\left(\frac{۱-۲^۷}{۲^۷}\right)$$

$$=-\frac{۱}{۴}\left(\frac{۱-۱۲۸}{۱۲۸}\right)=-\frac{۱}{۴}\left(\frac{-۱۲۷}{۱۲۸}\right)=\frac{۱۲۷}{۴\times ۱۲۸}=\frac{۱۲۷}{۵۱۲}$$

۳۸



$$a_۱=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{باقی‌مانده}}\frac{۱}{۲}$$

$$a_۲=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲\xrightarrow{\text{باقی‌مانده}}\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$$

$$a_۳=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳$$

$$\vdots$$

$$a_n=\left(\frac{۱}{۲}\right)^n$$

مجموع مساحت‌های رنگ‌شده در n مرحله $S_n=\frac{۱}{۲}+\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲+\cdots+\left(\frac{۱}{۲}\right)^n$

$$\xrightarrow[q=\frac{۱}{۲}]{a_۱=\frac{۱}{۲}}\frac{a_۱(q^n-۱)}{q-۱}=\frac{\frac{۱}{۲}\left(\left(\frac{۱}{۲}\right)^n-۱\right)}{\frac{۱}{۲}-۱}=\frac{\cancel{\frac{۱}{۲}}\left(\frac{۱}{۲^n}-۱\right)}{-\cancel{\frac{۱}{۲}}}=۱-\frac{۱}{۲^n}$$

$$S_n\geq\frac{۹۹}{۱۰۰}\times ۱\Rightarrow ۱-\frac{۱}{۲^n}\geq\frac{۹۹}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{۱}{۲^n}\leq ۱-\frac{۹۹}{۱۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow ۲^n\geq ۱۰۰\Rightarrow n\geq ۷$$

پس از ۷ مرحله، حداقل ۹۹ درصد از سطح مربع رنگ شده است.

---

۳۹ میزان کاهش ذرات در هر مرحله به‌صورت زیر است:

مرحلهٔ اول: $\frac{۱}{۲}$ ، مرحلهٔ دوم: $\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$ ، مرحلهٔ سوم: $\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$ ، ...

$\Rightarrow$ مرحلهٔ nام $=\left(\frac{۱}{۲}\right)^n$

بنابراین پس از n مرحله میزان کاهش ذرات برابر است با:

$$S_n=\frac{۱}{۲}+\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲+\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳+\cdots+\left(\frac{۱}{۲}\right)^n\xrightarrow[q=\frac{۱}{۲}]{a_۱=\frac{۱}{۲}}\frac{\cancel{\frac{۱}{۲}}\left(۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^n\right)}{\cancel{۱-\frac{۱}{۲}}}$$

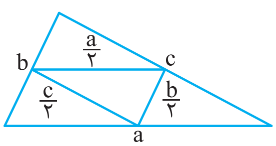
$$=۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^n$$

$$S_n>\frac{۹۶}{۱۰۰}\Rightarrow ۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^n\geq\frac{۹۶}{۱۰۰}\Rightarrow\left(\frac{۱}{۲}\right)^n\leq\frac{۴}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲۵}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲^n}\leq\frac{۱}{۲۵}\Rightarrow ۲^n\geq ۲۵\Rightarrow n\geq ۵$$

---

۴۰ بنابه قضیهٔ تالس، در هر بار طول اضلاع مثلث ایجادشده نصف طول اضلاع مثلث قبل است، بنابراین:



محیط مثلث اول: $a_۱=p$

محیط مثلث دوم: $a_۲=\frac{۱}{۲}p$

محیط مثلث سوم: $a_۳=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}p\right)=\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲p$

$$\vdots$$

محیط مثلث nاُم: $a_n=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}p$

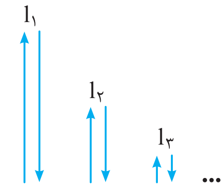
$$S_{۱۰}=p+\frac{۱}{۲}p+\cdots+\left(\frac{۱}{۲}\right)^۹p\xrightarrow[q=\frac{۱}{۲}]{a_۱=p}\frac{p\left(۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰}\right)}{۱-\frac{۱}{۲}}$$

$$=۲p\left(۱-\frac{۱}{۲^{۱۰}}\right)$$

$$S_{۱۰}=۲p\left(\frac{۲^{۱۰}-۱}{۲^{۱۰}}\right)=\frac{۲^{۱۰}-۱}{۲^۹}p=\frac{۱۰۲۴-۱}{۵۱۲}p=\frac{۱۰۲۳}{۵۱۲}p$$

۴۱ ارتفاع‌هایی که توپ پس از هر بار زمین خوردن بالا می‌آید، تشکیل یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $q=\frac{۱}{۳}$ می‌دهد:

$$\begin{cases} l_۱=۹ \\ l_۲=\frac{۱}{۳}l_۱ \\ l_۳=\frac{۱}{۳}l_۲=\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲ l_۱ \\ \quad\vdots \\ l_n=\left(\frac{۱}{۳}\right)^{n-۱} l_۱ \end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{مسافت طی‌شده}=۲(l_۱+l_۲+\cdots+l_۶)=۲S_۶=۲\times\frac{l_۱(q^۶-۱)}{q-۱}$$

$$\xrightarrow[l_۱=۹]{q=\frac{۱}{۳}} ۲\times\frac{۹\left(\left(\frac{۱}{۳}\right)^۶-۱\right)}{\frac{۱}{۳}-۱}=۲\times۹\frac{\frac{۱-۳^۶}{۳^۶}}{-\frac{۲}{۳}}=-\cancel{۲}^{-۱}\times۹\frac{\cancel{۳}(۱-۳^۶)}{\cancel{۲}\times\cancel{۳^۶}_{۳^۵}}$$

$$=-\frac{۱-۷۲۹}{۲۷}=\frac{۷۲۹-۱}{۲۷}=\frac{۷۲۸}{۲۷}\simeq ۲۶/۹۶ \text{ متر}$$

۴۲

$a_۱=۳۰۰۰۰$

$a_۲=a_۱+۰/۱a_۱=(۱/۱)a_۱$

$a_۳=a_۲+۰/۱a_۲=(۱/۱)a_۲=(۱/۱)^۲a_۱$

$\vdots$

$a_n=(۱/۱)^{n-۱}a_۱$

بنابراین با یک دنبالهٔ هندسی با $a_۱=۳۰۰۰۰$ و $q=(۱/۱)$ مواجه هستیم:

$$S_۷=\frac{a_۱(۱-(۱/۱)^۷)}{۱-۱/۱}=\frac{\cancel{۳۰۰۰۰}^{-۳۰۰۰۰۰}(۱-(۱/۱)^۷)}{\cancel{-۰/۱}}=۳۰۰۰۰۰((۱/۱)^۷-۱)$$

$$=۳۰۰۰۰۰(۱/۹۵-۱)=۳۰۰۰۰۰\times۰/۹۵=۳۰۰۰\times۹۵=۲۸۵۰۰۰ \text{ تومان}$$

۴۳ آ)

$d_۱=۱$ قطر

$d_۲=d_۱-۰/۵d_۱=۰/۵d_۱=۰/۵$

$d_۳=d_۲-۰/۵d_۲=۰/۵d_۲=(۰/۵)^۲$

$\vdots$

بنابراین قطر نیم‌دایره‌ها تشکیل یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $q=۰/۵$ می‌دهند.

$$\text{فاصلهٔ سنگ و کودک}=d_۱+d_۲+\cdots+d_۵=S_۵=\frac{a_۱(۱-q^۵)}{۱-q}$$

$$=\frac{۱(۱-(۰/۵)^۵)}{۱-۰/۵}=\frac{۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^۵}{\frac{۱}{۲}}$$

$$=\frac{۱-\frac{۱}{۳۲}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۳۱}{۳۲}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{\cancel{۲}\times۳۱}{\cancel{۳۲}_{۱۶}}=\frac{۳۱}{۱۶}\simeq ۱/۹۳ \text{ متر}$$

ب)

$$P_۱=\text{محیط نیم‌دایرهٔ اول}=\frac{۱}{۲}(\pi d_۱)=\frac{\pi}{۲}d_۱=\frac{\pi}{۲}$$

$$P_۲=\frac{۱}{۲}(\pi d_۲)=\frac{\pi}{۲}d_۲=\frac{\pi}{۲}(۰/۵) \qquad \times(۰/۵)$$

$$P_۳=\frac{۱}{۲}(\pi d_۳)=\frac{\pi}{۲}(۰/۵)^۲ \qquad \times(۰/۵)$$

$\vdots$

$$\Rightarrow \text{مسافت پیموده‌شده}=P_۱+P_۲+\cdots+P_۵$$

$$=S_۵=\frac{\frac{\pi}{۲}\left(۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^۵\right)}{۱-\frac{۱}{۲}}=\frac{\pi}{۲}\times\frac{۳۱}{۱۶}$$

$$=\frac{۳۱}{۳۲}\pi=\frac{۳۱\times\cancel{۳/۲}^{۰/۱}}{\cancel{۳۲}}=۳/۱ \text{ متر}$$

۴۴ دنبالهٔ تعداد سکه‌های کادو گرفته برابر است با:

$۱, ۲, ۴, ۸, \cdots$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل سکه‌ها}=S_{۱۰}=\frac{a_۱(۱-q^{۱۰})}{۱-q}=\frac{۱(۱-۲^{۱۰})}{۱-۲}$$

$$=-(\overbrace{۱-۲^{۱۰}}^{-۱۰۲۳})=۱۰۲۳$$

$$\text{بهای کل}=۱۰۲۳\times۱۰۰۰۰=۱۰,۲۳۰,۰۰۰ \text{ تومان}$$

۴۵ وزن کل گندم‌های جایزهٔ مخترع برابر است با:

$$\underbrace{۱+۲+۲^۲+۲^۳+\cdots+۲^{۶۴}}_{\text{دنبالهٔ هندسی با } q=۲ \text{ و } n=۶۵}=\frac{۱(۲^{۶۵}-۱)}{۲-۱}=۲^{۶۵}-۱$$

از طرفی داریم:

$$۲^{۱۰}\simeq۱۰۰۰\Rightarrow۲^{۱۰}\simeq۱۰^۳\xrightarrow{\text{توان } ۶}۲^{۶۰}\simeq(۱۰^۳)^۶=۱۰^{۱۸}$$

$$\Rightarrow۲^{۶۵}-۱\simeq۲^۵\times۱۰^{۱۸}=۳۲\times۱۰^{۱۸}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\text{۱ میلیارد تن}=۱۰^۹\times۱۰۰۰\times۱۰۰۰ \text{ گرم}=۱۰^{۱۵}$$

بنابراین جایزهٔ مخترع تقریباً ۳۲۰۰۰ میلیارد تن گندم است.