فهرست

۳) معادلهٔ مکان ـ زمان

معادلهٔ ریاضی‌ای که مکان متحرک را به صورت تابعی از زمان ارائه می‌دهد و توسط آن می‌توان مکان متحرک را در هر لحظه تعیین کرد، «معادلهٔ مکان ـ زمان» یا «معادلهٔ حرکت» می‌نامند. $x = t^2 - 1$ ، $x = \sin \pi t$ نمونه‌هایی از معادله‌های مکان ـ زمان هستند.

استراتژی و نکات لازم برای حل تست‌های این بخش

۱ یکی از مهم‌ترین مهارت‌هایی که در حل تست‌های این قسمت باید به آن دست پیدا کنید، تفسیر ریاضی داده‌ها و خواسته‌های تست است که در جدول (۱) نمونه‌هایی از این تفسیرها را آورده‌ایم.

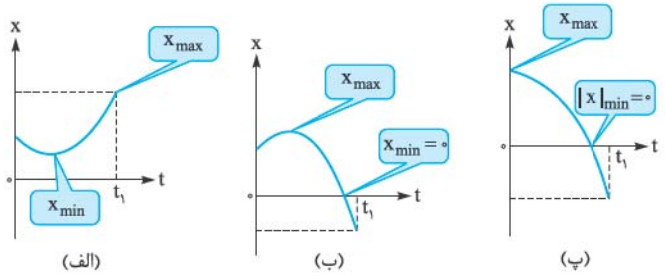
عبارت	تفسیر
۱- مکان اولیهٔ متحرک (x_0)	مکان متحرک در مبدأ زمان (لحظهٔ $t_0 = 0$)
۲- عبور متحرک از مبدأ حرکت (مبدأ مکان)	متحرک از مکان $x = 0$ عبور می‌کند.
۳- بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد.	متحرک از مکان $x = 0$ عبور می‌کند.
۴- متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند.	$\Delta x > 0$
۵- متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.	$\Delta x < 0$
۶- متحرک به بیشترین فاصله از مبدأ می‌رسد.	$\|x\|$ بیشینه می‌شود.

(جدول ۱)

۲ نحوهٔ محاسبهٔ بیشترین و کم‌ترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان: جواب پرسش زیر نشان می‌دهد که چه باید کرد!

پرسش **با توجه به شکل (۱۰)، در چه لحظه‌هایی فاصلهٔ متحرک از مبدأ ($|x|$)، بیشینه یا کمینه می‌شود؟**

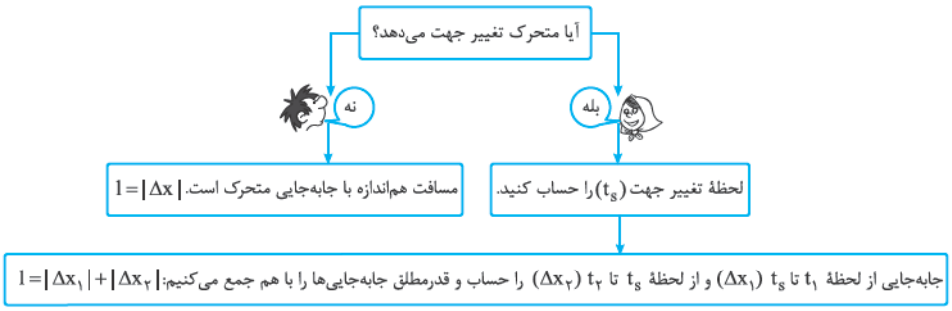
پاسخ فاصلهٔ متحرک از مبدأ در شکل (۱۰ـ پ) در اولین لحظه (لحظهٔ $t=0$)، در شکل (۱۰ـ الف) در آخرین لحظهٔ بررسی حرکت (لحظهٔ t_1) و در شکل (۱۰ـ ب) در نقطهٔ اکسترمم، بیشینه شده؛ یعنی برای تعیین x_{max} باید مکان متحرک رو در سه لحظه با هم مقایسه کنی: اول ـ آخر ـ اکسترمم. (توجه کنید که اگر معادله بیش از یک اکسترمم داشت، باید تمام اکسترمم‌ها با لحظه‌های اول و آخر مقایسه شوند.)



(شکل ۱۰)

برای محاسبهٔ $|x|_{min}$ هم همین‌کار رو می‌کنیم؛ فقط حواستون رو جمع کنید که اگه مطابق شکل‌های (۱۰ـ ب) و (۱۰ـ پ)، متحرک از مبدأ عبور کنه، $|x|_{min}=0$ می‌شه.

۳ نحوهٔ محاسبهٔ مسافت: برای محاسبهٔ مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، الگوریتم زیر را به کار می‌گیریم:



مثال **معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی در SI به صورت $x=t^2-2t-8$ است. مطلوب است:**

الف) مکان اولیهٔ متحرک

ب) لحظهٔ عبور دوبارهٔ متحرک از مکان اولیه‌اش

پ) لحظهٔ عبور متحرک از مبدأ حرکت

ت) لحظه‌ای که بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد

ث) جابه‌جایی متحرک در سه ثانیهٔ دوم حرکت

ج) رسم نمودار مکان ـ زمان متحرک

چ) تعیین لحظهٔ تغییر جهت متحرک

ح) مدتی که متحرک در مکان‌های منفی بوده است

خ) مدتی که متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده است

د) بیشترین و کم‌ترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ تا لحظهٔ $t=5\,s$

ذ) مسافت طی‌شده توسط متحرک تا لحظهٔ $t=5\,s$

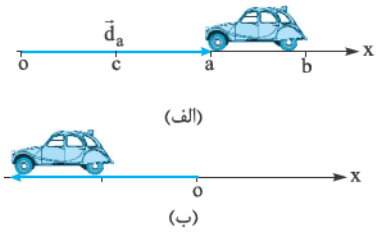
پاسخ **الف** کاری ساده‌تر از این در دنیا وجود نداره! $t_0=0$ را در معادلهٔ $x-t$ قرار بده: $x_0=0^2-2\times0-8=-8\,m$

ب باید ببینیم در چه لحظه‌ای دوباره $x=-8\,m$ می‌شود: $x=x_0 \Rightarrow t^2-2t-8=-8 \Rightarrow t^2-2t=0 \Rightarrow t(t-2)=0 \Rightarrow (t=0\times, t=2\,s\checkmark)$

پ در هنگام عبور از مبدأ $x=0$ می‌شود: $x=t^2-2t-8=0 \Rightarrow (t+2)(t-4)=0 \Rightarrow (t=-2\,s\times, t=4\,s\checkmark)$

(حرکت متحرک از لحظهٔ $t_0=0$ به بعد بررسی می‌شود و tهای منفی قابل پذیرش نیستند.)

ت فرض کنید مطابق شکل (الف)، اتومبیلی در مکان $x=a$ قرار دارد. بردار مکان سپر جلوی اتومبیل $(\vec{d}_a)$ در جهت محور x است. اگر اتومبیل در مکان‌های مثبت (مثل b یا c) قرار بگیرد، باز هم بردار مکان در جهت محور x خواهد بود و تغییر جهت نمی‌دهد. پس چه زمانی بردار مکان اتومبیل تغییر جهت می‌دهد؟



(الف)

(ب)

وقتی که مطابق شکل (ب)، از مبدأ عبور کند. در این صورت، بردار مکان اتومبیل در خلاف جهت محور x قرار می‌گیرد. بد نیست جدول تعیین علامت x را رسم کنیم. براساس جدول، متحرک از لحظهٔ $t_0=0$ تا $t=4\,s$ در مکان‌های منفی و از لحظهٔ $t=4\,s$ به بعد در مکان‌های مثبت بوده است. پس یک بار از مبدأ مکان رد شده و بردار مکان آن یک بار تغییر جهت می‌دهد.

t(s)	0		4		∞
x		−	0	+	

ث سه ثانیهٔ دوم یعنی از $t_1 = 3\,s$ تا $t_2 = 6\,s$؛ کافی است مکان متحرک را در این دو لحظه حساب و از هم کم کنید.

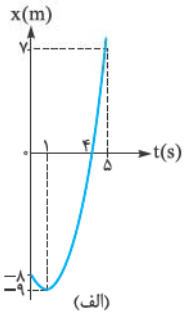
$t_1 = 3\,s : x_1 = 3^2 - 2\times 3 - 8 = 9 - 6 - 8 = -5\,m$ $\qquad$ $t_2 = 6\,s : x_2 = 6^2 - 2\times 6 - 8 = 36 - 12 - 8 = 16\,m$

$\Delta x = x_2 - x_1 = 16 - (-5) = 21\,m$

ج اول به یادداشت ریاضی زیر توجه کنید.

یادداشت ریاضی

اگر $y = ax^2 + bx + c$ باشد، نمودار $y - x$ به شکل یک سهمی است که اگر $a > 0$ باشد، این سهمی دارای نقطهٔ کمینه (مینیمم) و اگر $a < 0$ باشد، سهمی دارای نقطهٔ بیشینه (ماکزیمم) است که مختصهٔ x رأس از رابطهٔ $x = \frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید.



خب؛ چون x تابع درجهٔ دوم زمان است، نمودار $(x - t)$ به شکل یک سهمی است که (با توجه به ضریب مثبت t^2) دارای مینیمم است که مختصات آن به صورت زیر تعیین می‌شود:

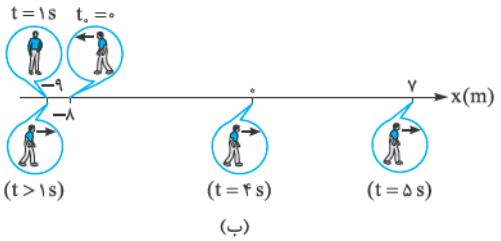
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = t^2 - 2t - 8 \end{cases} \xrightarrow{(a=1,\,b=-2)} t = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-2)}{2\times 1} = 1\,s$$

$t = 1\,s : x = 1^2 - 2\times 1 - 8 = -9\,m$

حالا وقتشه نمودار مکان ـ زمان متحرک را مطابق شکل (الف) رسم کنیم.

(در لحظهٔ $t = 5\,s$، $x = 7\,m$ می‌شود: $x = 5^2 - 2\times 5 - 8 = 7\,m$)

چ شکل (ب) مسیر حرکت متحرک را نشان می‌دهد. متحرک تا لحظهٔ $t = 1\,s$ در خلاف جهت محور x و بعد از آن در جهت محور x جابه‌جا شده است؛ پس متحرک در لحظهٔ $t = 1\,s$ تغییر جهت داده است.



ح متحرک از لحظهٔ $t_0 = 0$ تا $t = 4\,s$، یعنی مدت $4\,s$ در مکان‌های منفی بوده است. $(x < 0)$

خ متحرک در بازهٔ زمانی $t_0 = 0$ تا $t = 1\,s$ در خلاف جهت محور x جابه‌جا شده است.

د با توجه به شکل (ب)، در بازهٔ زمانی $t_0 = 0$ تا $t = 5\,s$، بیشترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ $9\,m$ می‌شود: $|x|_{max} = 9\,m$

در ضمن، متحرک در لحظهٔ $t = 4\,s$ از مبدأ مکان عبور می‌کند؛ یعنی فاصله‌اش تا مبدأ صفر می‌شود. *(کم‌تر از صفر که نداریم!)* $x_{min} = 0$

ذ متحرک اول $1\,m$ به چپ می‌ره: $\Delta x_1 = x_{t=1s} - x_{t_0=0} = -9 - (-8) = -1\,m$

بعد تغییر جهت می‌ده و تا لحظهٔ $t = 5\,s$، $16\,m$ به راست می‌ره: $\Delta x_2 = x_{t=5s} - x_{t=1s} = 7 - (-9) = 16\,m$

پس در مجموع مسافت $17\,m$ رو طی می‌کنه: $l = |\Delta x_1| + \Delta x_2 = 1 + 16 = 17\,m$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۸- معادلهٔ حرکت متحرکی در SI به صورت $x = t^2 - 2t - 3$ است. این متحرک چند ثانیه پس از لحظهٔ صفر، مجدداً از مکان اولیه‌اش عبور می‌کند؟

۱) ۱ $\qquad$ ۲) ۲ $\qquad$ ۳) ۳ $\qquad$ ۴) ۴

۲۹- معادلهٔ حرکت متحرکی در SI به صورت $x = t^2 - 2t - 3$ است. این متحرک پس از مبدأ زمان، چند بار از مبدأ حرکت عبور می‌کند؟

۱) ۱ $\qquad$ ۲) ۲ $\qquad$ ۳) ۳ $\qquad$ ۴) هیچ‌گاه

۳۰- معادلهٔ حرکت ذره‌ای در SI به صورت $x = t^2 - 2t + 1$ است. بردار مکان این متحرک در طول مسیر، چند بار تغییر جهت می‌دهد؟

۱) صفر $\qquad$ ۲) ۱ $\qquad$ ۳) ۲ $\qquad$ ۴) ۳

۳۱- معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی در SI به صورت $x = 3nt^2 - (n^2 + 9)t + 7$ است. اگر بردار مکان این متحرک در لحظهٔ $t_1 = 1\,s$ تغییر جهت دهد و فاصلهٔ متحرک از مبدأ در لحظهٔ $t_2 = 2\,s$ برابر $5\,m$ باشد، n کدام است؟

۱) ۱ $\qquad$ ۲) ۲ $\qquad$ ۳) ۳ $\qquad$ ۴) ۴

۳۲- معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی در SI به صورت $x = t^3 - 6t^2 + 9t + 1$ است. اگر متحرک در لحظه‌های $t = 1s$ و $t = 3s$ تغییر جهت دهد، مسافت طی‌شده توسط متحرک در فاصلهٔ زمانی ۲ تا ۴ ثانیه چند متر است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۳۳- معادله‌های مکان ـ زمان دو متحرک که روی محور x حرکت می‌کنند، در SI به صورت $x_1 = -t^2 + 2t$ و $x_2 = t^2 + 6t + 10$ می‌باشد. این دو متحرک چند بار از کنار هم می‌گذرند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ‌گاه

۳۴- معادلهٔ حرکت دو متحرک A و B در SI به ترتیب به صورت $x_A = 2t^3 - 4t$ و $x_B = t^2 - 3t + 1$ و موقعیت دو متحرک در لحظهٔ $t = 2s$ مطابق شکل مقابل است. A کدام‌یک از دو متحرک و d چند متر است؟

۱) (۱)، ۷ ۲) (۱)، ۹ ۳) (۲)، ۷ ۴) (۲)، ۹

۳۵- معادلهٔ حرکت دو متحرک روی محور x و در SI به صورت $x_1 = 2t^2 - 6t + 7$ و $x_2 = -t^2 + 2t - 3$ است. از کدام‌یک از مکان‌های زیر، قطعاً هیچ‌کدام از دو متحرک عبور نمی‌کنند؟

۱) $x = 1m$ و $x = -1m$ ۲) $x = 3m$ و $x = -1m$ ۳) $x = 1m$ و $x = -3m$ ۴) $x = 3m$ و $x = -3m$

جنبهٔ ریاضی تست‌های زیر قوی‌تر از جنبهٔ فیزیکی اون‌هاست. به نظرم بد نیست قبل از حل تست‌ها، نگاهی به درس‌نامهٔ معادلهٔ مکان - زمان بندازید.

۳۶- معادلهٔ حرکت جسمی در SI به صورت $x = t^2 - 6t + 10$ است. کم‌ترین فاصلهٔ جسم از مبدأ مکان $(x = 0)$ چند متر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۱۰

۳۷- معادلهٔ حرکت متحرکی در SI به صورت $x = t^2 - 6t + 8$ است. کم‌ترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان چند متر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

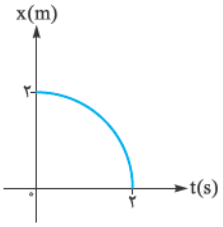
۳۸- معادلهٔ حرکت ذره‌ای در SI به صورت $x = -t^2 + 2t + 8$ است. بیشینهٔ فاصلهٔ ذره از مبدأ مکان، در ۵ ثانیهٔ اول حرکت چند متر است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۳۹- معادلهٔ مکان ـ زمان ذره‌ای که بر روی خط راست حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = 4 - 3\sin \pi t$ است. ذره در چه لحظه‌ای (برحسب ثانیه) برای اولین بار تغییر جهت می‌دهد؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

یه تست برای اونایی که ریاضیشون خوبه!



۴۰- مطابق شکل، نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، ربع دایره است. مسافتی که متحرک در ثانیهٔ دوم می‌پیماید، چند برابر مسافتی است که در ثانیهٔ اول می‌پیماید؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{3} - 3$ ۴) $2\sqrt{3} + 3$

این همه گفتیم معادلهٔ حرکت! اصلاً می دونی معادلهٔ حرکت چیه؟!

۴۱- کدام‌یک از رابطه‌های زیر، می‌تواند بیانگر معادلهٔ حرکت یک جسم باشد؟ (x، نماد مکان، v، نماد سرعت و t، نماد زمان حرکت جسم است.)

۱) $v = -2t + 4$ ۲) $x = \pm(t^2 - 1)$ ۳) $v^2 = 2x$ ۴) $x = 1 + \cos \pi t$

۵) نیروی مقاومت شاره

نیروی مقاومت شاره: وقتی جسمی در یک شاره به حرکت درمی‌آید، نیرویی از طرف شاره در خلاف جهت حرکت جسم به آن وارد می‌شود که به آن «نیروی مقاومت شاره» می‌گوییم و آن را با $\vec{f}_D$ نشان می‌دهیم. وقتی جسم در هوا سقوط می‌کند، به این نیرو «نیروی مقاومت هوا» می‌گوییم.

نیروی مقاومت هوا: تا الان با مقاومت هوا کار نداشتیم و فرض می‌کردیم همهٔ اجسام در خلأ با شتاب مساوی $(\vec{g})$ سقوط می‌کنند. اگر اجسام در هوا سقوط کنند، این تساوی از بین می‌رود. هوا به اجسامی که داخل خود حرکت می‌کنند، نیرویی وارد می‌کند که حاصل برخورد مولکول‌های هوا با جسم است و به آن «نیروی مقاومت هوا» می‌گوییم.

ویژگی‌های نیروی مقاومت هوا:

۱ نیروی مقاومت هوا همیشه در خلاف جهت حرکت جسم است.

۲ هر چه تندی جسم بیشتر باشد، تعداد مولکول‌های هوایی که در هر ثانیه به جسم برخورد می‌کنند، بیشتر می‌شود و نیروی مقاومت هوا افزایش می‌یابد.

۳ هر چه مساحت مقطعی از جسم که در معرض برخورد مولکول‌های هوا است، بیشتر باشد، نیروی مقاومت هوا هم بیشتر است.

تندی حدی: به شکل (۵) نگاه کنید. وقتی جسمی در هوا سقوط می‌کند، ابتدا به سمت پایین شتاب می‌گیرد و سرعتش لحظه‌به‌لحظه افزایش می‌یابد. با افزایش سرعت، نیروی مقاومت هوا هم زیاد می‌شود؛ بالأخره زمانی می‌رسد که نیروی مقاومت هوا هم‌اندازه با نیروی وزن و در خلاف جهت آن می‌شود. در این شرایط، برایند نیروها و شتاب جسم، صفر می‌شود.

$$\sum F_y = W - f_D = 0 \Rightarrow f_D = W$$

از این لحظه به بعد جسم با تندی ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد که به این تندی می‌گوییم «تندی حدی». تندی حدی اجسام مختلف با هم فرق دارد، ولی برای یک چترباز در حدود $5\,m/s$ است.

شکل (۵)

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۴۵۰- نیروی مقاومت شاره در برابر حرکت جسم به کدام‌یک از عوامل زیر بستگی ندارد؟

۱) مساحت سطحی از جسم که بر مسیر حرکت عمود است.
۲) تندی جسم
۳) شکل جسم
۴) جرم جسم

۴۵۱- گلوله‌ای را در هوا در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد نیروی مقاومت هوا درست است؟

۱) در بالاترین نقطهٔ مسیر بیشینه است.
۲) در موقع بالارفتن هم‌سو با حرکت و در موقع پایین‌آمدن در خلاف جهت حرکت است.
۳) در موقع بالارفتن کاهش و در موقع پایین‌آمدن افزایش می‌یابد.
۴) در تمام طول مسیر افزایش می‌یابد.

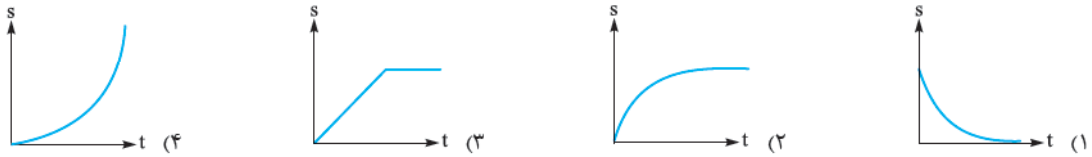
۴۵۲- جسمی در هوا از ارتفاع بسیار بلند سقوط می‌کند. تندی جسم چگونه تغییر می‌کند؟

۱) همواره افزایش می‌یابد.
۲) ابتدا افزایش، سپس کاهش می‌یابد.
۳) ابتدا افزایش می‌یابد، سپس ثابت می‌ماند.
۴) همواره ثابت می‌ماند.

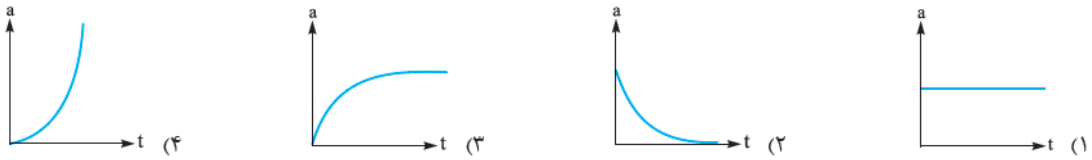
۴۵۳- جسمی در هوا از ارتفاع بسیار بلند سقوط می‌کند. شتاب حرکت جسم چگونه تغییر می‌کند؟

۱) ابتدا افزایش می‌یابد، سپس صفر می‌شود.
۲) ابتدا کاهش می‌یابد، سپس صفر می‌شود.
۳) همواره افزایش می‌یابد.
۴) همواره کاهش می‌یابد.

۴۵۴- نمودار تندی ـ زمان جسمی که در هوا از ارتفاع بلند سقوط می‌کند، مطابق کدام‌یک از شکل‌های زیر است؟



۴۵۵- نمودار بزرگی شتاب برحسب زمان برای جسمی که در هوا از ارتفاع بلند سقوط می‌کند، مطابق کدام‌یک از شکل‌های زیر است؟



۴۵۶- چتربازی پس از چند متر پرش آزاد از ارتفاع بالا، ناگهان چترش را باز می‌کند. بلافاصله پس از آن، اندازهٔ مقاومت هوا از مقدار ناچیز اولیه به ۲ برابر وزن چترباز می‌رسد. جهت و اندازهٔ بردار شتاب چترباز پس از بازکردن چتر، چگونه تغییر می‌کند؟

۱) ابتدا روبه‌بالا و سپس روبه‌پایین است و اندازه‌اش ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.
۲) ابتدا روبه‌پایین و سپس روبه‌بالا است و اندازه‌اش ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.
۳) همواره روبه‌بالا است و اندازه‌اش همواره کاهش می‌یابد تا به صفر برسد.
۴) همواره روبه‌پایین است و اندازه‌اش همواره کاهش می‌یابد تا به صفر برسد.

۴۵۷- یک چترباز در هنگام سقوط، مطابق شکل روبه‌رو، بدن خود را به حالت افقی و به شکل گسترده درمی‌آورد. چترباز با این کار نیروی مقاومت هوا را ..... و تندی حدی خود را ..... می‌دهد.

۱) افزایش، افزایش
۲) افزایش، کاهش
۳) کاهش، افزایش
۴) کاهش، کاهش

۴۵۸- رابطهٔ نیروی مقاومت هوا و سرعت جسم به صورت کدام گزینه می‌تواند باشد؟ (b عددی ثابت و مثبت است.)

۱) $f = \frac{b}{v}$
۲) $f = -\frac{b}{v}$
۳) $\vec{f} = b\vec{v}$
۴) $\vec{f} = -b\vec{v}$

۴۵۹- در یک هوای آرام توپی به جرم g ۲۰۰ را در راستای مایل به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اگر نیرویی که هوا به توپ در بالاترین نقطهٔ مسیر وارد می‌کند، N ۱ باشد، شتاب توپ در این نقطه چند متر بر مربع ثانیه است؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$

۱) ۵ ۲) $۵\sqrt{۲}$ ۳) $۵\sqrt{۵}$ ۴) ۶

۴۶۰- چتربازی با تندی حدی $۵\ m/s$ به سمت زمین سقوط می‌کند. در یک لحظه چترباز از کنار سنگی می‌گذرد که در همان لحظه از بالای ساختمانی به ارتفاع m ۴۵ رها می‌شود. اگر مقاومت هوا در برابر حرکت سنگ ناچیز باشد، چند ثانیه پس از برخورد سنگ به زمین، چترباز به زمین می‌رسد؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

۴۶۱- یک قطرهٔ باران به قطر mm ۲ در هوا سقوط می‌کند. اگر رابطهٔ بین بزرگی نیروی مقاومت هوا و سرعت قطره در SI به صورت $f = ۲/۵\times۱۰^{-۶}\ v^۲$ باشد، قطره با تندی تقریبی چند متر بر ثانیه به سطح زمین می‌رسد؟ ($g = ۱۰\ m/s^۲$ ، $\pi \simeq ۳$ و چگالی آب $۱۰۰۰\ kg/m^۳$ است.)

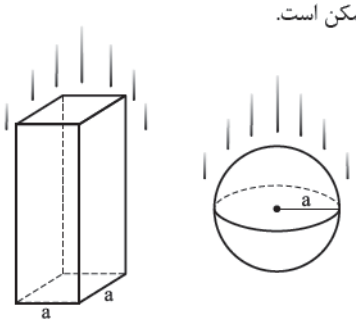
۱) ۴×۱۰^{-۲} ۲) ۱۶×۱۰^{-۲} ۳) ۴ ۴) ۱۶

۴۶۲- اگر تندی حدی یک قطرهٔ باران و یک قطرهٔ تگرگ با ابعاد مشابه را به ترتیب با $s_۱$ و $s_۲$ نشان دهیم، کدام گزینه درست است؟

۱) $s_۱ = s_۲$ ۲) $s_۲ > s_۱$

۳) $s_۱ > s_۲$ ۴) هر یک از گزینه‌های قبلی ممکن است.

۴۶۳- یک کره و یک مکعب هم‌جرم به شکل مقابل را در هوا رها می‌کنیم. نیروی مقاومت هوای وارد بر هر دو جسم از رابطهٔ $f = \frac{۱}{۴}Av^۲$ به دست می‌آید (v بزرگی سرعت و A مساحت مقطعی از جسم است که عمود بر مسیر حرکت است). تندی حدی کره تقریباً چند برابر تندی حدی مکعب است؟ $(\pi \simeq ۳)$



۱) ۱ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۳

۲۸- گزینهٔ ۲ می‌خواهیم ببینیم چند ثانیه پس از لحظهٔ $t = ۰$، مجدداً $x = x_۰ = -۳\ m$ می‌شود. کافی است ریشه‌های معادلهٔ $x = -۳\ m$ را به دست آوریم:

$$x = t^۲ - ۲t - ۳ = -۳ \Rightarrow t^۲ - ۲t = ۰ \Rightarrow t = ۰ \times \quad , \quad t = ۲s \checkmark$$

۲۹- گزینه۱ از حل معادلهٔ $x=0$، لحظه‌های عبور متحرک از مبدأ به دست می‌آید.

$$t^2-2t-3=0 \Rightarrow (t-3)(t+1)=0 \Rightarrow t=-1s \times \quad , \quad t=3s \checkmark$$

توجه داشته باشید که ما حرکت را از لحظهٔ $t=0$ به بعد بررسی می‌کنیم و به زمان‌های قبل از آن، حتی اگر حرکتی وجود داشته باشد، کاری نداریم (یعنی $t\in\mathbb{R}^+$). بنابراین، متحرک فقط یک بار (در لحظهٔ $t=3s$) از مبدأ مکان عبور می‌کند. *(اونایی که ۳ رو زدید! طراح تست که لحظهٔ عبور از مبدأ رو نخواسته! این‌جور اشتباه‌ها خیلی سوختن داره! حواستونو بیشتر جمع کنید!)*

۳۰- گزینه۱ معادلهٔ حرکت ذرهٔ مطرح‌شده در صورت تست، برابر است با: $x=t^2-2t+1=(t-1)^2$

این ذره هرگز در مکان‌های منفی قرار نمی‌گیرد ($x\geq 0$). پس، بردار مکان آن مادام‌العمر در جهت محور x است و هیچ‌گاه تغییر جهت نمی‌دهد.

۳۱- گزینه۲ بردار مکان در لحظهٔ $t_1=1s$ تغییر جهت می‌دهد، بنابراین:

$$t_1=1s \Rightarrow x_1=0 \Rightarrow 3n\times(1)^2-(n^2+9)\times1+7=0 \Rightarrow 3n-n^2-9+7=0 \Rightarrow n^2-3n+2=0 \Rightarrow n=1,2$$

از طرفی چون فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان در لحظهٔ $t_2=2s$ برابر $5m$ است، داریم: $t_2=2s \Rightarrow x_2=5 \Rightarrow 3n(2)^2-(n^2+9)\times2+7=5$

$$\Rightarrow 12n-2n^2-18+7=5 \Rightarrow 2n^2-12n+16=0 \Rightarrow n^2-6n+8=0 \Rightarrow n=2,4$$

بنابراین به ازای $n=2$ هر دو خواستهٔ تست محقق می‌شود.

۳۲- گزینه۳ جابه‌جایی متحرک را از لحظهٔ $t_1=2s$ تا لحظهٔ تغییر جهت ($t_2=3s$) و از لحظهٔ $t_2=3s$ تا $t_3=4s$ حساب می‌کنیم و بزرگی این دو مقدار را با هم جمع می‌کنیم.

$$\begin{cases} t_1=2s \Rightarrow x_1=(2)^3-6(2)^2+9(2)+1=3m \\ t_2=3s \Rightarrow x_2=(3)^3-6(3)^2+9(3)+1=1m \\ t_3=4s \Rightarrow x_3=(4)^3-6(4)^2+9(4)+1=5m \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow \Delta x_1=x_2-x_1=1-3=-2m \\ \Rightarrow \Delta x_2=x_3-x_2=5-1=4m \end{matrix}$$

$$l=|\Delta x_1|+\Delta x_2=2+4=6m$$

۳۳- گزینه۴ **در لحظهٔ به هم رسیدن، دو متحرک در یک مکان قرار می‌گیرند**؛ یعنی xشان برابر می‌شود؛ پس باید ریشه‌های قابل پذیرش معادلهٔ $x_1=x_2$ را به دست آوریم.

$$x_2=x_1 \Rightarrow t^2+6t+10=-t^2+2t \Rightarrow 2t^2+4t+10=0$$

Δ ی معادلهٔ بالا منفی است ($\Delta=4^2-4\times2\times10=-64$). پس هیچ لحظه‌ای پیدا نمی‌شود که به ازای آن، دو متحرک در کنار یکدیگر دیده شوند.

۳۴- گزینه۲ مکان متحرک A در لحظهٔ $t=2s$:

$$x_A=2t^3-4t=2\times2^3-4\times2=16-8=8m$$

مکان متحرک B در لحظهٔ $t=2s$:

$$x_B=t^2-3t+1=2^2-3\times2+1=-1m$$

فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر:

$$d=x_A-x_B=8-(-1) \Rightarrow d=9m$$

چون $x_A>x_B$ است، متحرک (۱) همان A و متحرک (۲)، B است.

۳۵- گزینه۱ هر دو معادلهٔ داده‌شده، تابع درجهٔ دوم از زمان هستند. پس یادی از ریاضی یازدهم کنیم!

یادداشت ریاضی

در سهمی با ضابطهٔ $y=ax^2+bx+c$، طول (x) رأس سهمی برابر $x=-\frac{b}{2a}$ است. اگر $a>0$ باشد، دهانهٔ سهمی رو به بالا است (∪) و رأس سهمی کم‌ترین مقدار y (مینیمم) سهمی را نشان می‌دهد. در حالی که اگر $a<0$ باشد، دهانهٔ سهمی رو به پایین است (∩) و رأس سهمی بیشترین مقدار y (ماکزیمم) سهمی را بیان می‌کند.

در مقایسهٔ رابطه‌های درجهٔ دوم $x-t$ داده‌شده با ضابطهٔ سهمی در یادداشت بالا، t جایگزین x و x جایگزین y شده است. در رابطهٔ مکان ـ زمان اول (x_1)، $(a=2)>0$ است (این a را با a شتاب اشتباه نگیرید!) بنابراین، تابع دارای مینیمم (کم‌ترین مقدار) است.

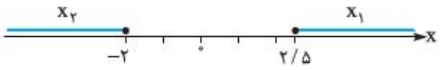
$$x_1=2t^2-6t+7 \xrightarrow[(b=-6)]{(a=2)} t_{min}=-\frac{b}{2a}=-\frac{(-6)}{2\times2}=\frac{3}{2}s$$

$$x_{1min}=2t_{min}^2-6t_{min}+7=2\times(\frac{3}{2})^2-6\times\frac{3}{2}+7=\frac{9}{2}-9+7=\frac{9-18+14}{2}=\frac{5}{2}=2/5m \Rightarrow x_1\geq(x_{1min}=2/5m)\ (I)$$

در رابطهٔ مکان ـ زمان دوم (x_2)، $(a=-1)<0$ است. بنابراین، تابع دارای ماکزیمم (بیشترین مقدار) است.

$$x_2=-t^2+2t-3 \xrightarrow[(b=2)]{(a=-1)} t_{max}=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\times(-1)}=1s$$

$$x_{2max}=-t_{max}^2+2t_{max}-3=-1^2+2\times1-3=-2m \Rightarrow x_2\leq(x_{max}=-2m)\ (II)$$



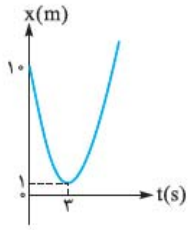
عبارت‌های (I) و (II) را روی محور x نمایش می‌دهیم (شکل روبه‌رو).

همان‌گونه که می‌بینید، بازهٔ $(-2\,m, 2/5\,m)$، محدوده‌ای است که نه در معادلهٔ x_1 و نه در معادلهٔ x_2 جای می‌گیرد و گزینهٔ درست باید عددی بین $-2\,m$ و $2/5\,m$ و نه خود این دو مقدار را دربر بگیرد که فقط ۱ به طور کامل این شرایط را دارد و ۲ و ۳ نیم‌بند (یکی از xها) را با این شرط دربر می‌گیرد و گزینهٔ آخر هم شاگرد آخر گزینه‌ها است! و هیچ xای در این محدودهٔ ممنوعه ندارد!

۳۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول:** x تابع درجه دوم زمان و نمودار $x-t$ متحرک به شکل سهمی است. برای پیداکردن مختصات نقطهٔ کمینه از رابطهٔ $t=-\frac{b}{2a}$ استفاده می‌کنیم:

$$t=-\frac{b}{2a}=-\frac{(-6)}{2\times1}=3\,s$$

$$x_{min}=3^2-6\times3+10=9-18+10=1\,m$$



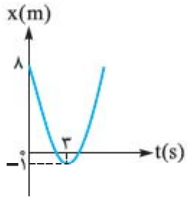
راه‌حل دوم: x را به شکل مجموع یک اتحاد و یک عدد ثابت می‌نویسیم:

$$x=t^2-6t+10=(t^2-6t+9)+1=(t-3)^2+1 \xrightarrow{(t=3\,s\ \Rightarrow\ t-3=0)} x_{min}=1\,m$$

۳۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول:** برای تعیین مختصات نقطهٔ اکسترمم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$t=-\frac{b}{2a}=-\frac{(-6)}{2\times1}=3\,s \Rightarrow x=3^2-6\times3+8=9-18+8=-1\,m$$

یه‌دفعه عجله نکنی ۲ رو بزنی!



مکان اولیهٔ متحرک $x_0=8\,m$ است و برای رسیدن به مکان $x=-1\,m$، قطعاً از مبدأ عبور می‌کند، پس $|x|_{min}=0$ است. برای درک بهتر مطلب، نمودار مکان ـ زمان متحرک *رو هم براتون رسم کردیم!*

راه‌حل دوم: « t^2-6t » *به علاوه چی می‌شه یک اتحاد نوع دوم؟!*

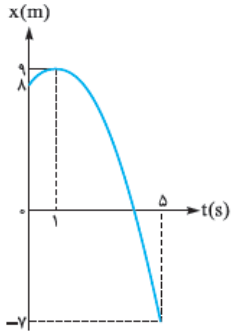
$$x=t^2-6t+8=(t^2-6t+9)-1=(t-3)^2-1$$

در رابطهٔ بالا، اگر به جای عدد « -1 » یک عدد مثبت قرار داشت، امکان نداشت x برابر *صفر بشه*؛ ولی حالا که یک عدد منفی در کنار عبارت $(t-3)^2$ قرار گرفته، x دو بار *صفر می‌شه*؛ یک بار قبل از لحظهٔ $t=3\,s$ (در لحظهٔ $t=2\,s$) و یک بار بعد از لحظهٔ $t=3\,s$ (در لحظهٔ $t=4\,s$).

۳۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول:** ضریب t^2 منفی است؛ پس سهمی دارای نقطهٔ بیشینه است که مختصات آن به صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$t=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\times(-1)}=1\,s \Rightarrow x=-1^2+2\times1+8=9\,m$$

با توجه به نمودار مکان ـ زمان، بیشترین فاصلهٔ ذره از مبدأ حرکت در ۵ ثانیهٔ اول، $9\,m$ است. $x_{max}=9\,m$



راه‌حل دوم:

$$x=-t^2+2t+8=-(t^2-2t-8)=-(t^2-2t+1)+9=9-(t-1)^2$$

بیشترین فاصلهٔ ذره از مبدأ در مکان‌های مثبت برابر است با:

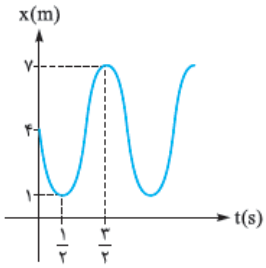
$$t=1\,s: t-1=0 \Rightarrow x_{max}=9\,m$$

و در مکان‌های منفی:

$$t=5\,s: x=-5^2+2\times5+8=-25+10+8=-7\,m \Rightarrow |x|=7\,m$$

یادتون نره که دعوا بین سه‌تا نقطه‌س: اول، آخر، اکسترمم که در این تست، نقطهٔ اکسترمم بیشترین x رو داشت.

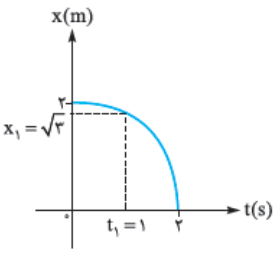
۳۹- گزینهٔ ۱ نمودار مکان ـ زمان متحرک مطابق شکل مقابل است. در لحظهٔ $t=\frac{1}{2}\,s$، مقدار $\sin \pi t$ برای اولین بار به بیشینهٔ مقدار خود $(+1)$ و فاصلهٔ ذره از مبدأ مکان به کم‌ترین مقدار خود $(+1\,m)$ می‌رسد. در بازهٔ زمانی $t=0$ تا $t=\frac{1}{2}\,s$ متحرک در خلاف جهت محور x جابه‌جا می‌شود و در لحظهٔ $t=\frac{1}{2}\,s$ تغییر جهت می‌دهد و حرکت خود را در جهت محور x از سر می‌گیرد.



۴۰- گزینهٔ ۴ **گام اول:** در ابتدا معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک را که دایره‌ای به مرکز $(0,0)$ و شعاع ۲ است به دست می‌آوریم و سپس با استفاده از آن، مکان متحرک را در لحظهٔ $t_1=1\,s$ محاسبه می‌کنیم:

$$x^2+t^2=2^2=4 \quad t\geq0, x\geq0$$

$$t_1=1\,s \Rightarrow x_1^2+1=4 \Rightarrow x_1^2=3 \Rightarrow x_1=\sqrt{3}\,m$$



گام دوم: مسافتی را که متحرک در ثانیهٔ اول می‌پیماید با l_1 و مسافتی را که در ثانیهٔ دوم می‌پیماید با l_2 نشان می‌دهیم.

$$l_1 = |x_1 - x_0| = |\sqrt{3} - 2| = 2m - \sqrt{3}\,m$$

$$l_2 = |x_2 - x_1| = |0 - \sqrt{3}| = \sqrt{3}\,m$$

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{4-3} = 2\sqrt{3} + 3$$

۴۱- گزینه ۴ یکایک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) معادلهٔ حرکت، رابطهٔ مکان و زمان حرکت را بیان می‌کند؛ نه رابطهٔ سرعت و زمان حرکت را!

۲) *قیافش که نشون می‌ده یک معادلهٔ حرکته!* اما حرکتی با این معادله تا به حال دیده نشده! چرا که به ازای هر t، دوتا x به دست می‌آید (یکی مثبت، یکی منفی). یعنی متحرک در هر لحظه، می‌تواند در دو جا حضور داشته باشد! *می‌شه؟!*

۳) *دل‌بندم!* مکان ـ زمان؛ نه سرعت ـ مکان!

۴) این معادله، مکان را به صورت تابعی از زمان نشان می‌دهد؛ *پس خود خودشه!*

۴۵۰- گزینه ٤ راجع به تأثیر مساحت سطحی از جسم که بر مسیر حرکت عمود است (یعنی در معرض برخورد مولکول‌های شاره است) و تندی جسم بر نیروی مقاومت شاره قبلاً صحبت کردیم. فرض کنید که یک تکه خمیر را یک بار به شکل *نون بربری* و بار دیگر به شکل *نون قلقلی* درمی‌آوریم(!!) و آن‌ها را در هوا رها می‌کنیم. جرم خمیرها برابر است، اما خمیری که تخت شده در معرض برخورد با مولکول‌های بیشتری از هوا قرار می‌گیرد و نیروی بزرگ‌تری از طرف هوا به آن وارد می‌شود. این مثال ساده نشان می‌دهد شکل جسم در نیروی مقاومت شاره مؤثر است، اما جرم آن نه!

۴۵۱- گزینه۳ تک‌تک گزینه‌ها را با هم ببینیم!

(۱) تندی گلوله در موقع بالارفتن کاهش و در موقع پایین‌آمدن افزایش می‌یابد. سرعت گلوله در نقطهٔ اوج یک لحظه صفر می‌شود و سپس تغییر جهت می‌دهد. نیروی مقاومت هوا به اجسام ساکن وارد نمی‌شود؛ پس نیروی مقاومت هوا بر گلوله در نقطهٔ اوج صفر است.

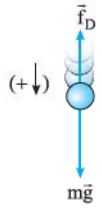
(۲) نیروی مقاومت هوا در هر صورتی در خلاف جهت حرکت جسم است.

(۳) بله! نیروی مقاومت هوا تابع اندازهٔ سرعت جسم است و در مدت بالارفتن گلوله، کاهش و موقع پایین‌آمدن گلوله، افزایش می‌یابد.

(۴) وقتی (۳) درسته، (۴) غلطه دیگه!

۴۵۲- گزینه۳ جسم اول به سمت پایین شتاب می‌گیرد و تندی‌اش افزایش می‌یابد. وقتی برایند نیروهای وارد بر جسم صفر شد، شتاب حرکت آن صفر می‌شود و جسم با تندی ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد.

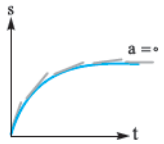
۴۵۳- گزینه۲ شکل روبه‌رو جسمی را نشان می‌دهد که در هوا سقوط می‌کند. با توجه به جهت حرکت جسم برایند نیروهای وارد بر آن برابر است با:



$$\sum F = mg - f_D \quad , \quad a = \frac{\sum F}{m} = \frac{mg - f_D}{m}$$

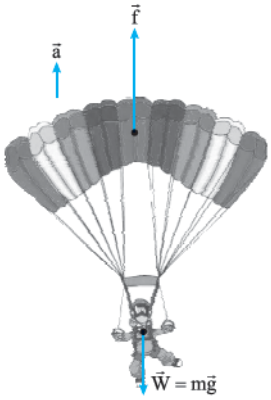
با افزایش سرعت جسم، نیروی مقاومت هوا افزایش و برایند نیروهای وارد بر جسم $(\sum F = W - f_D)$ و شتاب جسم کاهش می‌یابد $(f_D \uparrow \Rightarrow a \downarrow)$. تا کی؟ تا زمانی که $f_D = mg$ شود. در این حالت، شتاب حرکت جسم صفر می‌شود و از این به بعد تندی جسم تغییر نمی‌کند.

۴۵۴- گزینه۲ تندی جسم باید به تدریج زیاد شود (رد (۱)) تا به مقدار ثابتی برسد (رد (۴)). از طرفی شیب خط مماس بر نمودار تندی ـ زمان بیانگر اندازهٔ شتاب متحرک است. چون به تدریج شتاب متحرک کاهش می‌یابد، شیب نمودار $s - t$ باید به تدریج کم شود (رد (۳)) تا این که در پایان که جسم به حد تندی خود می‌رسد، شتاب صفر می‌شود. نمودار رسم‌شده در (۲) این ویژگی را دارد.



۴۵۵- گزینه۲ قرار است شتاب به تدریج کم شود تا به صفر برسد؛ یعنی (۲)!

۴۵۶- گزینه۳ باتوجه‌به‌شکل، پس‌ازبازکردن‌چتر، دونیروی $\vec{f}$ (مقاومت‌هواروبه‌بالا) و $\vec{W} = m\vec{g}$ (وزن‌روبه‌پایین) به سامانهٔ چتروچترباز وارد می‌شوند. (مانند کتاب درسی، از جرم چتر در برابر جرم چترباز چشم‌پوشی کردیم!) قانون دوم نیوتون می‌گوید:



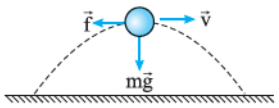
$$\vec{f} + \vec{W} = m\vec{a} \Rightarrow f - W = ma \xrightarrow[(W=mg)]{(f=2mg)} 2mg - mg = ma \Rightarrow mg = ma \Rightarrow a = g$$

جهت بردار شتاب در این شرایط، هم‌جهت با نیروی بزرگ‌تر ($\vec{f}$) یعنی روبه‌بالا است. چون چترباز روبه‌پایین حرکت می‌کند (به دلیل سرعت اولیهٔ روبه‌پایین که پیش از بازشدن چتر داشته است)، چترباز ابتدا حرکت کندشونده‌ای را تجربه می‌کند و اندازهٔ سرعت روبه‌پایین آن کاهش می‌یابد؛ به طور هم‌زمان، با کاهش سرعت، اندازهٔ $\vec{f}$ هم کم می‌شود تا اندازه‌اش از $2mg$ به mg برسد؛ در این شرایط، $\vec{f}$ و $\vec{W}$ موازنه شده $(f = mg)$ و نیروی خالص وارد بر سامانه صفر و حرکت آن یکنواخت می‌شود. در این حالت اندازهٔ سرعت روبه‌پایین جسم ثابت می‌ماند (شتاب صفر)، ولی بردار $\vec{f}$ همواره روبه‌بالا می‌ماند؛ پس در کل، بردار شتاب $\vec{a}$ همواره روبه‌بالا است و اندازه‌اش از g (روبه‌بالا) به صفر کاهش می‌یابد.

۴۵۷- گزینه۲ چتربازها سعی می‌کنند بدن خود را به شکل افقی و عمود بر مسیر حرکت (عمود بر $\vec{v}$) درآورند (به این شکل بدن می‌گویند «spread eagle» به معنی «عقاب گسترده‌بال»!). این وضعیت باعث می‌شود نیروی مقاومت هوا به بیشترین مقدار و تندی حدی به کم‌ترین مقدار ممکن برسد.

۴۵۸- گزینه۴ نیروی مقاومت هوا: الف) با افزایش سرعت جسم، افزایش می‌یابد (رد (۱) و (۲))؛ ب) در خلاف جهت سرعت جسم است (رد (۳)).

۴۵۹- گزینه۳ شکل روبه‌رو مسیر حرکت توپ را نشان می‌دهد. بردار سرعت همیشه مماس بر مسیر حرکت است و در بالاترین نقطهٔ مسیر به شکل افقی است. نیروی مقاومت هوا در خلاف جهت حرکت توپ به آن وارد می‌شود. پس در بالاترین نقطهٔ مسیر، نیروی مقاومت هوا عمود بر وزن جسم است و برایند این دو نیرو (F) برابر است با:



$$F = \sqrt{(mg)^2 + f^2} = \sqrt{(0/2 \times 10)^2 + 1^2} = \sqrt{5}\ N \qquad a = \frac{F}{m} = \frac{\sqrt{5}}{0/2} = 5\sqrt{5}\ m/s^2$$

۴۶۰- گزینه۳ مبدأ زمان را لحظهٔ رهاشدن سنگ (۱) در نظر می‌گیریم و چترباز (۲) در همین لحظه، با تندی حدی $5\ m/s$ (یعنی با حرکت یکنواخت) و هم‌زمان با سقوط آزاد سنگ، سقوط غیرآزاد (یکنواخت) می‌کند.

برای سنگ (۱): $\Delta y = \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow 45 = \frac{1}{2} \times 10 t_1^2 \Rightarrow t_1^2 = \frac{45}{5} = 9 \Rightarrow t_1 = \sqrt{9} = 3\ s$

برای چترباز (۲): $\Delta y = v_{حدی} t_2 \Rightarrow 45 = 5t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{45}{5} = 9\ s$

بنابراین، ابتدا در لحظهٔ $t_1 = 3\ s$، سنگ و سپس در لحظهٔ $t_2 = 9\ s$، چترباز به زمین می‌رسند. چند ثانیه پس از برخورد سنگ به زمین، چترباز به زمین می‌رسد؟

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 9 - 3 = 6\ s$$

۴۶۱- گزینه۳ **گام اول:** شعاع قطره ۱mm و حجم تقریبی آن برابر است با:

$$V=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}\simeq\frac{۴}{۳}\times ۳\times(۱\times ۱۰^{-۳})^{۳}=۴\times ۱۰^{-۹}\ m^{۳}$$

گام دوم: جرم قطره برابر است با:

$$m=\rho V=۱۰۰۰\times ۴\times ۱۰^{-۹}=۴\times ۱۰^{-۶}\ kg$$

گام سوم: تندی یک جسم زمانی به مقدار حدی خود می‌رسد که نیروی مقاومت هوا دقیقاً نیروی وزن جسم را خنثی کند.

$$f=mg\Rightarrow ۲/۵\times ۱۰^{-۶}v^{۲}=۴\times ۱۰^{-۶}\times ۱۰\Rightarrow v^{۲}=\frac{۴۰}{۲/۵}=۱۶\Rightarrow v=۴\ m/s$$

۴۶۲- گزینه۳ چگالی آب بیشتر از چگالی یخ است؛ پس جرم یک قطرهٔ باران $(m_۱)$ از جرم یک قطرهٔ تگرگ با همان حجم $(m_۲)$ بیشتر است:

$$m=\rho V\xrightarrow{(\rho_{\text{باران}}>\rho_{\text{تگرگ}})}m_۱>m_۲\Rightarrow m_۱g>m_۲g\Rightarrow W_۱>W_۲$$

زمانی قطره‌ها به تندی حدی می‌رسند که وزنشان برابر نیروی مقاومت هوا شود:

$$f=W$$

پس نیرویی که هوا به قطره وارد می‌کند، بزرگ‌تر از نیرویی است که هوا به تگرگ وارد می‌کند:

$$W_۱>W_۲\Rightarrow f_۱>f_۲$$

نیروی مقاومت هوا تابع تندی جسم است؛ پس تندی حدی قطرهٔ باران بزرگ‌تر از تندی حدی تگرگ است:

$$s_۱>s_۲$$

۴۶۳- گزینه۲ زمانی تندی جسم به مقدار حدی‌اش می‌رسد که نیروی وزن آن با نیروی مقاومت هوا موازنه شود؛ یعنی:

$$f=mg\Rightarrow\frac{۱}{۴}Av^{۲}=mg\Rightarrow v=\sqrt{\frac{۴mg}{A}}$$

چون وزن دو جسم یکسان است، تندی حدی دو جسم با جذر A نسبت عکس دارد (مساحت مقطعی از کره که عمود بر مسیر حرکت است برابر $A=\pi r^{۲}$ است.):

$$\frac{v_{\text{کره}}}{v_{\text{مکعب}}}=\sqrt{\frac{A_{\text{مکعب}}}{A_{\text{کره}}}}=\sqrt{\frac{a^{۲}}{\pi a^{۲}}}=\sqrt{\frac{۱}{\pi}}\simeq\sqrt{\frac{۱}{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$