



حسابان ۱

پازدهم

آموزش و تست

پُر از تست‌های دوست‌داشتنی

• عباس اشرفی • حامد فرضعلی‌بیک • علیرضا نداف‌زاده
• همکاران تألیف: رضا ادیبی، محمد امین مولایی
• مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی



مهروماه

Maryam Mirzakhani
May 3, 1977 - July 14, 2017
Professor of Mathematics at
Stanford University



تقدیم به همه فرزندان افتخارآفرین ایران

به مناسبت تقارن زمانی تدوین این کتاب با ضایعه درگذشت پروفیسور مریم میرزاخانی بر آن شدیم تا برای ادای احترام، مختصری از افتخارات این نابغه بزرگ را برای شما بیان کنیم:

مریم میرزاخانی اولین دختری بود که به تیم المپیاد ریاضی ایران راه یافت و هم‌چنین اولین دختری بود که در المپیاد ریاضی ایران، مدال طلا گرفت. وی اولین کسی بود که دو سال متوالی مدال طلا کسب کرد و اولین فردی بود که در آزمون المپیاد ریاضی نمره کامل گرفت. او دوره لیسانس و فوق لیسانس ریاضی را در دانشگاه صنعتی شریف سپری کرد و بعد از آن، با دریافت بورسیه از طرف دانشگاه هاروارد به آنجا رفت و دوره دکتری خود را در آن دانشگاه پشت سر گذاشت.

مریم در سال ۲۰۰۴ با اخذ مدرک دکترا از دانشگاه هاروارد به سرپرستی کورتیس مک‌مولن، از برندگان جایزه فیلدز فارغ‌التحصیل شد، در دانشگاه‌های پرینستون و استنفورد به تدریس مشغول شد. یک سال بعد، در سال ۲۰۰۵ نشریه پایپولار ساینس آمریکا، او را به عنوان یکی از ده ذهن جوان جهان برگزید و تجلیل کرد. او مدتی در پرینستون درس می‌داد ولی بعد به استنفورد رفت و کار تدریس و پژوهش را در آنجا پی گرفت. مریم در شهریور ۱۳۸۷ و در ۳۱ سالگی به درجه استادی این دانشگاه رسید.

مریم میرزاخانی، نخستین بانوی ریاضی‌دان تاریخ لقب گرفته که توانسته است مدال فیلدز را دریافت کند. این مدال معتبرترین جایزه دنیای ریاضیات است و به دانشمندان برگزیده زیر ۴۰ سال اهدا می‌شود. متأسفانه، پروفیسور مریم میرزاخانی در تاریخ ۲۴ تیرماه ۱۳۹۶، در ۴۰ سالگی جان به جان آفرین تسلیم کرد و در میان بهت همگان، وجودش از جهان دریغ شد.

مقدمه



«سنگ تراشی از کار خود ناراضی بود. روزی بازرگانی را دید و با خود گفت این بازرگان چقدر قدرتمند است. آرزو کرد که مانند بازرگان شود و در یک لحظه تبدیل به بازرگانی با جاه و جلال شد. مدتی بعد حاکم شهر را دید که مورد احترام همه حتی بازرگانان بود. آرزو کرد حاکم شود و در همان لحظه تبدیل به حاکمی قدرتمند شد. چند روز بعد حاکم بر تخت نشسته بود که احساس کرد نور خورشید آزارش می‌دهد. با خودش فکر کرد که خورشید چقدر قدرتمندتر از حاکم است. دوباره آرزو کرد خورشید باشد و تبدیل به خورشید شد و با تمامی نیرو سعی کرد به زمین بتابد و آن را گرم کند. پس از مدتی ابری بزرگ جلوی تابش او را گرفت. با خود فکر کرد که نیروی ابر از خورشید بیشتر است و تبدیل به ابر شد. کمی نگذشته بود که بادی آمد و او را به این طرف و آن طرف هل داد ولی وقتی نزدیک کوهی رسید دیگر قدرت تکان دادن آن را نداشت.

با خود گفت قوی‌ترین چیز در دنیا، صخره است و تبدیل به صخره بزرگ و عظیمی شد. همانطور که با غرور ایستاده بود، ناگهان صدایی شنید و احساس کرد خرد می‌شود. نگاهی به پائین انداخت و سنگ تراشی را دید که با چکش و قلم به جان او افتاده بود!»

این داستان رو تعریف کردم که بگم خودت باش! ولی ساکن نباش! لازم نیست جای شاگرد اول کلاس یا شاگرد اول کنکور یا باشی! فقط لازمه حرکت کنی و اون چیزی که میخوای بشی!

به قول جرج برنارد شاو: سعی کنید چیزهایی رو که دوست دارید به دست بیارید و گرنه مجبور میشید، چیزهایی رو که دارید، دوست بدارید. بریم سراغ کتاب حسابان:

امسال اولین سالیه که وارد ریاضی پیشرفته میشی و از ترم دوم به بعد درسهات رنگ و بوی دانشگاهی می‌گیرن. اگه امسال بتونی مفاهیم مهمی مثل حد و ... رو خوب یاد بگیری، خیلی از مشکلات سال‌های بعدت کم میشه و برعکس اگه خشت اول رو کج بذاری تا ثریا می‌رود این درس کج! 😊

برای این که زحمت تو رو کم کنیم و فهمیدن حسابان رو برات ساده کنیم، با دبیرهای برجسته‌ای مثل استاد نداف‌زاده (دبیر باسابقه و نام‌آشنای دیفرانسیل و مدرس دبیرستان‌های علامه حلی و علامه طباطبایی و) و استاد فرضعلی بیک دبیر مدارس برتر تهران نشستیم و بعد از کلی رایزنی، این کتاب رو نوشتیم.

ویژگی‌های این کتاب

- ۱ درسنامه‌های جامع و مفهومی داره! هم مطالب کتاب درسی توش هست و هم مطالب عمیق‌تر.
- ۲ طبقه‌بندی موضوعی شده، یعنی درس‌نامه‌های هر فصل به بخش‌های سلولی تقسیم شده تا مجبور نشی کل فصل رو به جا بخونی!
- ۳ اصلاً به مطالب خارج از کتاب درسی نپرداخته، موضوعات فضایی (که نه به درد این دنیا می‌خوره، نه به درد اون دنیا) رو تو کتاب راه ندادیم. باور کن برای دعوت هر کدوم از موضوع‌ها به کتابمون، کلی جلسه گذاشتیم و بحث کردیم. خیلی کار سختی بود ولی می‌ارزید.
- ۴ توی محدوده مطالب کتاب درسی، عمق مطالب در حد چاه عمیقه، یعنی تهش رو برات درآوردیم. با خیال راحت بخونش و مطمئن باش هیچی جا نمونده.
- ۵ هیچ مطلبی رو بدون مثال برات باقی نذاشتیم. همه مثال‌هامون هم از فیلتر استادای عالی و باتجربه گذشتن و بعدش به همشون به طور کامل و آموزشی جواب دادیم.
- ۶ پُر از تست‌های دوست‌داشتنی! تست‌ها رو هم از ساده به سخت چیدیم که اولش با دیدن به تست سخت، سخته نکنی 😊 و از ریاضی فراری نشی.
- ۷ همه تست‌های کنکورهای جدید، حتی کنکور امسال! تو کتابمون هست، البته فقط تست‌هایی رو آوردیم که مربوط به کتاب جدید.
- ۸ پاسخ‌نامه‌ش پُر از راهبردهای عالی! این راهبردها مثل GPS می‌مونن. به کمک اون‌ها، توی حل سؤال‌ها گیر نمی‌کنی و می‌دونی که چه مسیری رو باید دنبال کنی. پاسخ‌نامه این کتاب به جز راهبرد، به کلی نکته‌های تستی و تکنیک‌های محاسباتی و... مسلح شده!

۹ مثل کتاب درسی، تست‌هامون رویکرد مسائل واقعی گرفتن، مثلاً وقتی می‌خوایم فاصله دو نقطه رو بهت یاد بدیم، از فاصله نیمکت بین تو و دوستت استفاده کردیم.

۱۰ تعداد تست‌هاش خیلی زیاده و البته متناسب با اهمیت هر مبحثه! اینقدر که اگه همشون رو کار کنی، به اون مبحث در حد تیم ملی مسلط می‌شی. پُل هالموس می‌گه: تمرین قلب ریاضیات است. اگه اینطوره پس کتاب ما متخصص قلبه! ❤️

ساختار کتاب

حالا چند جمله‌ای هم راجع به ساختار کتاب برات بگم. توی هر درس اگه لازم بوده، مطالب رو به چند بخش تقسیم کردیم و درسنامه و مثال حل شده براش آوردیم، ولی مطالب فنی و تکنیکی رو نگه داشتیم واسه حل تست‌های خفن و اون‌ها را تحت عنوان «راهبرد» توی قسمت پاسخ تشریحی آوردیم. «راهبردها» برای کسانی که می‌خوان صد بزنن! بعد از درسنامه هر قسمت، تست‌های مربوط به اون قسمت اومده. فصل که تموم میشه به آزمون جامع از کل فصل برات گذاشتیم تا خودتو محک بزنی. بعد از آزمون، پاسخ کلیدی تست‌ها اومده و بعدشم پاسخ‌های تشریحی اون فصل. تست‌ها رو براتون دستچین کردیم تا سوال‌های بی‌کیفیت و کم‌کیفیت توی کتاب نباشه. توی پاسخ‌های تشریحی هم تا می‌شده توضیح دادیم، چون می‌دونیم خیلی از شماها به معلم‌های کنکوری خوب دسترسی ندارید تا سوال‌هایی رو که براتون پیش میاد بپرسید.

راهنمای استفاده از کتاب

خوب بذار بگم چطوری از کتاب استفاده کنی! اول درسنامه رو با مثالاش خوب بخون، بعد برو سراغ حل تست‌ها. هر وقت دیدی نمی‌تونی به سؤال رو حل کنی، برو سراغ پاسخ‌نامه تشریحی، شاید راهبردی داره که تو بلد نیستی. اگه وقت نداری، تست‌ها رو دو یا چند قسمت کن! مثلاً فقط شماره‌های زوجش رو بزن. نکته‌هایی رو که یاد می‌گیری حاشیه‌نویسی کن و سعی کن لااقل هر دو هفته به بار اون‌ها رو دوره کنی. در انتهای فصل یا برای جمع‌بندی می‌تونی از آزمون انتهای فصل استفاده کنی و ببینی توی زمان پیشنهادی می‌تونی چه درصدی بزنی.

و اما قدردانی...

اول: از جناب آقای احمد اختیاری مدیر انتشارات تشکر می‌کنم که با تجربه ده سال و اندی کار انتشاراتی، به ظرافت‌های کار به صورت بصری و محتوایی اشراف دارند. خارج از هرگونه تعارف با این همه سابقه آموزشی که خود من دارم، در زمینه شیوه نگارش و پرداخت مطالب و... از ایشان بسیار آموختم.

دوم: از استاد گرانقدر محمد حسین انوشه، مدیر شورای تألیف تشکر می‌کنم که اگر حرص و جوش خوردن‌ها و همراهی‌های این استاد ارجمند نبود، شاید این کتاب حالا حالاها چاپ نمی‌شد. استاد انوشه از دبیران نام‌آشنای شیمی کشور هستند ولی با یک ذهن دقیق ریاضی، نصایح گرانقدری را در اختیار ما قرار دادند.

سوم: از جناب استاد بهمن اصلاح‌پذیر که از بزرگان آموزش ریاضی کشور هستند تشکر می‌کنم که جلسات متعددشان با مؤلفان باعث ارتقای سطح آموزشی کتاب شد.

از همه دوستان مهروماهی که با تمام وجود تلاش کردند این کتاب به بهترین شیوه چاپ بشه تشکر و قدردانی می‌کنم: مدیر اجرایی تألیف دروس اختصاصی، سرکار خانم زهرا خوشنود به خاطر زحمات‌های زیادی که کشیدن و لطف بی‌دریغی که داشتن. صفحه‌آرای کتاب، سرکار خانم رویا طبسی برای صبر و حوصله مثال‌زدنی‌شون.

مدیر تولید انتشارات، سرکار خانم سمیه جباری، برای کمک‌ها و همکاری‌های بی‌شائبه‌شون.

حروف چین کتاب، خانم‌ها مینو فرخ و آرزو راضی که زحمت اصلی کار بر عهده ایشان بود.

رسم تصاویر کتاب، آقای ساسان اسدی که رسم تصاویر رو به بهترین نحو انجام دادن.

گروه هنری خلاق انتشارات که با طراحی‌های زیبا و بی‌نظیر، جلوه متفاوتی به کتاب دادن! آقایان حسین شیرمحمدی، تایماز کاویانی و حسام طلایی.

ویراستاران دقیق مهروماه که واقعاً مو رو از ماست بیرون می‌کشن، خانم‌ها سنور حریری و کیانا معظمی و آقای افشین فرزانه. در پایان هم لازم می‌دونم که از مدیر فروش توانمند انتشارات جناب آقای عباس گودرزی، مدیر روابط عمومی سرکار خانم فرزانه قنبری و مدیر سایت جناب آقای امیر انوشه تشکر کنم، به خاطر همراهی‌های بی‌دریغی که با من داشتن.

امیدوارم زحمات این گروه فعال برای شما نتیجه‌بخش باشه و کمکی باشه هر چند کوچک برای دست‌یابی به موفقیت.

مدیر گروه ریاضی مهروماه

عباس اشرفی

فهرست

فصل اول جبر و معادله

۹

فصل دوم تابع

۱۲۷

فصل سوم توابع نمایی و لگاریتمی

۲۰۹

فصل چهارم مثلثات

۲۷۵

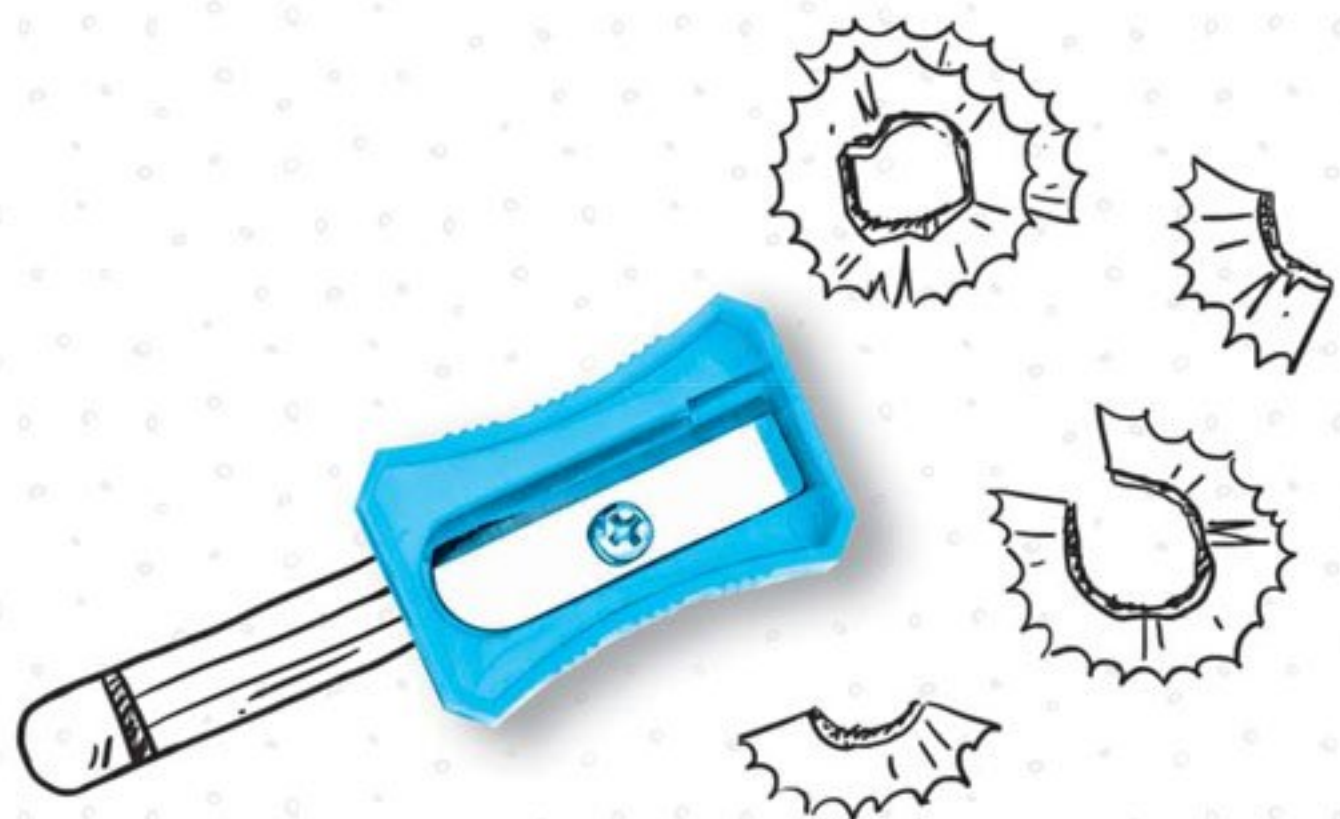
فصل پنجم حد و پیوستگی

۳۴۹

فصل دوم

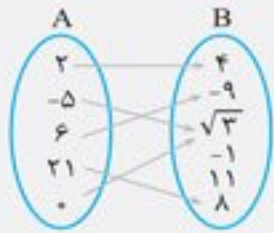
تابع

تابع یکی از مهم‌ترین مفهومی‌های ریاضیه!
خیلی مهمه که بفهمی اکثر فرمول‌هایی که حتی توی درس‌هایی مثل فیزیک و شیمی می‌خونی تابع‌اند.
اول فصل تابع بهت یادآوری میشه و بعدش تابع‌های شاخص و مهم بهت معرفی میشه. در ادامه یاد می‌گیری که وارون تابع چیه و اگه یه تابع رو سر و ته بگیری چی از آب درمیاد!
در انتها هم یاد می‌گیری چطور می‌تونی چند تا تابع رو با هم جمع، تفریق، ضرب، تقسیم یا ترکیب کنی.
حدس ما اینکه از این فصل ۲ تا تست توی کنکور بیاد.



آشنایی بیشتر با تابع

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B ، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو A ، دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود. A (مجموعه آغاز) را دامنه تابع و B (مجموعه انجام یا پایان) را هم‌دامنه تابع می‌نامند. مثلاً



تابع f از مجموعه $A = \{2, -5, 6, 21, 0\}$ به مجموعه $B = \{4, -9, \sqrt{3}, -1, 11, 8\}$ به شکل مقابل تعریف شده است:

در نتیجه نمایش زوج مرتبی این تابع به صورت زیر است:

$$f = \{(2, 4), (-5, \sqrt{3}), (0, \sqrt{3}), (6, -9), (21, 8)\}$$

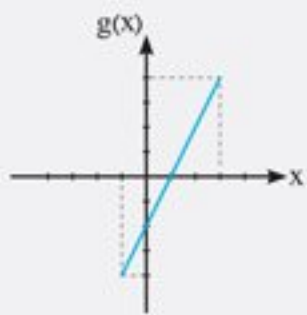
برد تابع شامل اعضای از مجموعه B است که به اعضای A نسبت داده شده‌اند، یعنی برد این تابع، مجموعه $\{4, -9, \sqrt{3}, 8\}$ است که زیرمجموعه هم‌دامنه می‌باشد. در واقع هم‌دامنه تابع را می‌توان هر مجموعه دلخواهی شامل برد تابع در نظر گرفت.

نکته

برای مشخص کردن یک تابع، باید ۱ دامنه، ۲ هم‌دامنه، ۳ ضابطه (دستور یا قانونی که نحوه ارتباط بین اعضای دامنه و اعضای هم‌دامنه را نشان می‌دهد) معلوم باشد.

مثلاً $f: [-1, 3] \rightarrow [0, +\infty)$
نمایش تابعی با برد $[1, 10]$ است.
 $f(x) = x^2 + 1$

مثال: کدام نمایش برای تابع مقابل مناسب است؟



$$g: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (2)$$

$$g(x) = 2x - 2$$

$$g: [-1, +\infty) \rightarrow [-4, 4] \quad (4)$$

$$g(x) = x - 2$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1)$$

$$g(x) = 2x - 2$$

$$g: [-1, 3] \rightarrow [-5, 5] \quad (3)$$

$$g(x) = 2x - 2$$

پاسخ: ضابطه این تابع خطی را با دو نقطه $(-1, -4)$ و $(3, 4)$ می‌نویسیم:

$$m = \frac{4 - (-4)}{3 - (-1)} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow y - 4 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 2 \Rightarrow g(x) = 2x - 2$$

دامنه این تابع (از روی نمودار) بازه $[-1, 3]$ و برد آن $[-4, 4]$ است. بنابراین نمایشی قابل قبول است که $D_g = [-1, 3]$ و ضابطه $g(x) = 2x - 2$ را عیناً نشان داده و هم‌دامنه آن شامل $R_g = [-4, 4]$ باشد.

پس گزینه «۳» درست است.

تابع به عنوان ماشین

تابع را می‌توان به عنوان ماشین در نظر گرفت که یک ورودی (از دامنه) دریافت می‌کند و در ازای آن یک خروجی (از هم‌دامنه) تحویل می‌دهد که خروجی یا خروجی‌ها برد تابع را تشکیل می‌دهند. هر ورودی دقیقاً یک خروجی دارد، البته ممکن است چند ورودی مختلف، خروجی یکسانی داشته باشند. باتوجه به شکل روبه‌رو، $x \in D_f$ را متغیر مستقل و $y \in R_f$ را متغیر وابسته می‌نامند و می‌گویند y تابعی از x است.

مثال: ماشین مقابل به ازای ورودی $2 - \sqrt{5}$ کدام خروجی را می‌دهد؟

$$3 \quad (2) \quad \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$2 \quad (4) \quad \frac{1}{5} \quad (3)$$

پاسخ: ورودی تابع، $2 - \sqrt{5}$ است، پس $x - 1 = 2 - \sqrt{5}$ است و در نتیجه $x = 3 - \sqrt{5}$ می‌باشد. سعی می‌کنیم خروجی ماشین را به شکل ساده‌تری درآوریم تا محاسبه راحت‌تر انجام شود.

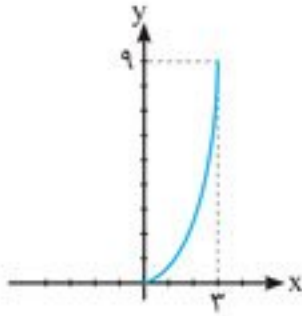
$$\frac{x^2 - 6x + 13}{x^2 - 6x + 7} = \frac{x^2 - 6x + 9 + 4}{x^2 - 6x + 9 - 2} = \frac{(x-3)^2 + 4}{(x-3)^2 - 2} \xrightarrow{x=3-\sqrt{5}} \frac{(3-\sqrt{5}-3)^2 + 4}{(3-\sqrt{5}-3)^2 - 2} = \frac{5+4}{5-2} = \frac{9}{3} = 3$$

پس گزینه «۲» درست است.

۱. کدام عبارت صحیح نیست؟

- (۱) هر تابع می‌تواند بی‌شمار هم دامنه داشته باشد، اما بُرد تابع منحصر به فرد است.
 (۲) تعداد اعضای بُرد تابع، کوچک‌تر یا مساوی با تعداد اعضای هم‌دامنه است.
 (۳) برای معرفی و مشخص کردن هر تابع، باید دامنه و بُرد آن مشخص باشند.
 (۴) تابع، رابطه‌ای از مجموعه A به B است که در آن هر عضو A دقیقاً به یک عضو B نسبت داده می‌شود.

۲. نمودار مقابل می‌تواند مربوط به کدام یک از توابع زیر باشد؟



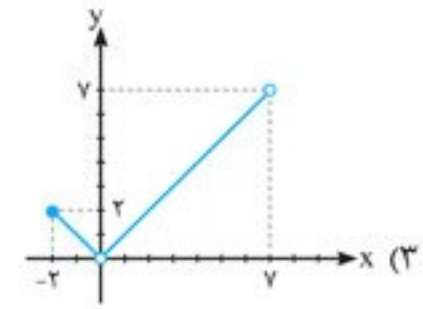
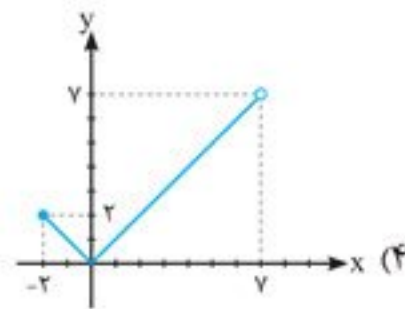
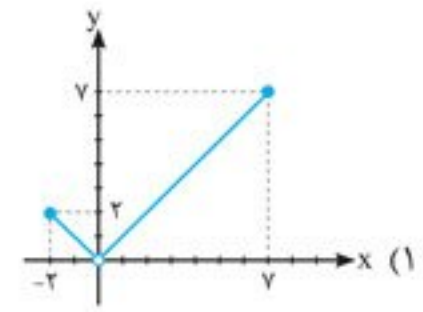
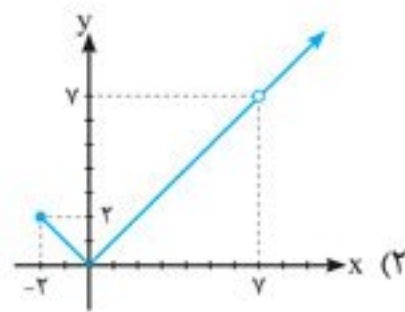
(۲) $f: [0, 3] \rightarrow [0, 10]$
 $f(x) = x^2$

(۴) $f: [0, 3] \rightarrow [0, 9]$
 $f(x) = x^2$

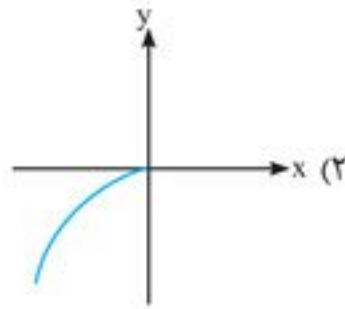
(۱) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 9]$
 $f(x) = x^2$

(۳) $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $f(x) = x^2$

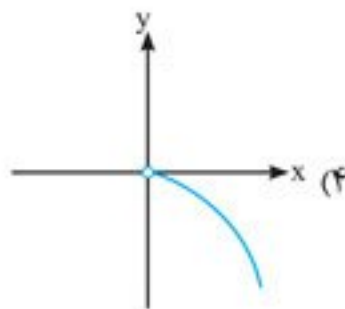
۳. نمودار تابع $f: [-2, 0) \cup (0, 7) \rightarrow \mathbb{R}^+$ کدام است؟
 $f(x) = |x|$



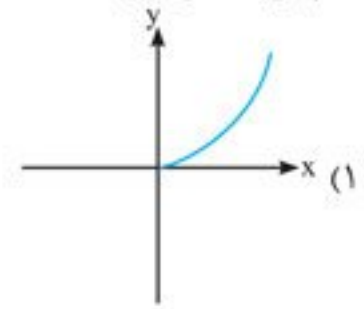
۴. در کدام گزینه نمودار با مشخصات داده شده همخوانی ندارد؟



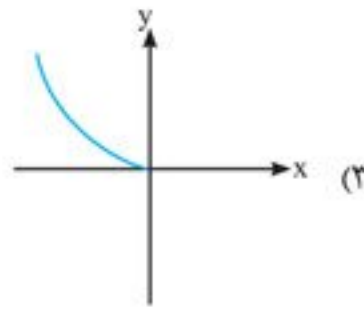
(۲) $g(x): (-\infty, 0] \rightarrow (-\infty, 0]$
 $g(x) = -x^2$



(۴) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^-$
 $f(x) = -x^2$



(۱) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $f(x) = x^2$



(۳) $h: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$
 $h(x) = x^2$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۵. اگر A مجموعه‌ای m عضوی و B مجموعه‌ای n عضوی باشند، چند تابع از A به B می‌توان تعریف کرد؟

- (۱) $m \times n$ (۲) m^n (۳) $m+n$ (۴) n^m

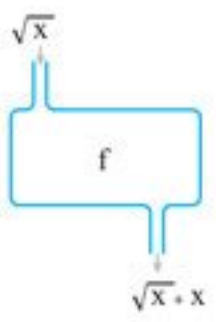
۶. با حذف حداقل چند عضو، رابطه $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}, 2x + y \leq 7\}$ تابع خواهد بود؟

- (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵



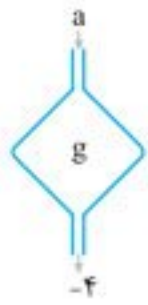
۷. اگر تابع f به شکل ماشین مقابل باشد، حاصل $f(2) + f(1)$ کدام است؟

- (۱) ۶
- (۲) ۸
- (۳) ۴
- (۴) ۲



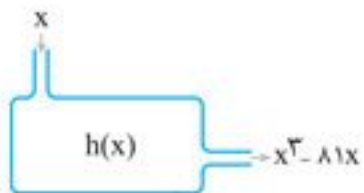
۸. تابع g به این ترتیب عمل می‌کند که مجذور هر مقدار ورودی را از یک کم می‌کند و نصف عدد حاصل را به عنوان خروجی می‌دهد. در این تابع مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) صفر
- (۲) -۳
- (۳) $\sqrt{5}$
- (۴) وجود ندارد.



۹. در تابع h به شکل مقابل اگر مقدار خروجی صفر باشد، مقدار ورودی کدام نمی‌تواند باشد؟

- (۱) صفر
- (۲) ۹
- (۳) -۹
- (۴) ۱



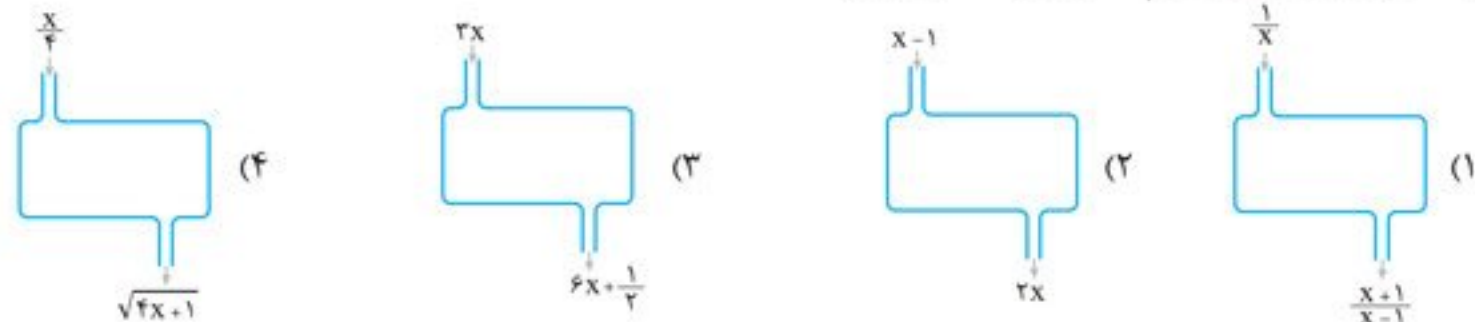
۱۰. تابعی به این ترتیب عمل می‌کند که ریشه دوم مثبت «ورودی» را به عنوان «خروجی» می‌دهد. عدد ۲۵۶ وارد این ماشین شده و خروجی آن مجدداً به این ماشین داده می‌شود. اگر این کار (ورود خروجی به ماشین) سه بار متوالی انجام شود، خروجی نهایی کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
- (۲) ۲
- (۳) $\sqrt[4]{2}$
- (۴) ۴

۱۱. تابعی داریم که اگر ورودی آن عدد منفی باشد، از آن قدر مطلق گرفته و ۳ واحد به حاصل اضافه می‌کند. اگر هم ورودی یک عدد نامنفی باشد، یک واحد از آن کم کرده، حاصل را به توان ۲ می‌رساند و در نهایت ریشه سومش را به دست می‌آورد. اگر (-۶) وارد این ماشین شود و خروجی مجدداً در نقش یک ورودی دیگر ظاهر گردد، خروجی نهایی کدام است؟

- (۱) ۴
- (۲) -۴
- (۳) ۶
- (۴) -۶

۱۲. کدام ماشین به ازای ورودی $\frac{1}{4}$ ، خروجی متفاوتی می‌دهد؟



۱۳. اگر $\frac{f(x)}{\cos x} + \frac{f(-x)}{\sin x} = 2$ باشد، آن‌گاه $f(\frac{\pi}{4}) + f(-\frac{\pi}{4})$ برابر کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{2}$
- (۲) $-\frac{1}{2}$
- (۳) $\sqrt{2}$
- (۴) $\frac{1}{2}$

۱۴. اگر $f(x) = 6f(x-2) + f(x-1)$ ، $f(1) = 1$ و $f(2) = 2$ باشند، آن‌گاه $f(4)$ کدام است؟

- (۱) ۱۰
- (۲) ۲۰
- (۳) ۸
- (۴) ۱۶

تساوی توابع

• دو تابع f و g را مساوی گویند هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

① $D_f = D_g$ ضابطه یکسان (در نتیجه برد یکسان) داشته باشند.

مثال: اگر دو تابع $f = \{(a-1, -4), (2, -7)\}$ و $g = \{(2, b-5), (3, -4)\}$ مساوی باشند، در تابع h ، حاصل $h(10) - h(7)$ کدام است؟

• **پاسخ:** $D_f = \{a-1, 2\}$ و $D_g = \{2, 3\}$ هستند، بنابراین باید $a-1 = 3$ باشد، پس $a = 4$ است.

همچنین $f(2) = -7$ و $g(2) = b-5$ ؛ بنابراین باید $b-5 = -7$ باشد، پس $b = -2$ است.

حال تابع h را تشکیل می‌دهیم:
پس گزینه «۱» درست است.

$$h = \{(10, 2), (7, 1), (4, 9)\} \Rightarrow h(10) - h(7) = 2 - 1 = 1$$

مثال: در کدام گزینه توابع داده شده مساوی هستند؟

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)\sqrt{x-1}, \quad g(x) = \sqrt{(x-1)^2} \quad (۲) & f(x) &= \sqrt{x^2-4}, \quad g(x) = \sqrt{x-2} \times \sqrt{x+2} \quad (۱) \\ f(x) &= \sqrt{9-|x|^2}, \quad g(x) = \sqrt{(3-x)(x+3)} \quad (۴) & f(x) &= \sqrt[4]{x^4}, \quad g(x) = x \quad (۳) \end{aligned}$$

پاسخ:

گزینه ۱:

$$f: x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 4 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x| \geq 2 \Rightarrow D_f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$g: \begin{cases} x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} D_g = [2, +\infty)$$

$\Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f$ و g نمی‌توانند مساوی باشند.

$$\left. \begin{aligned} f: x-1 \geq 0 \Rightarrow D_f &= [1, +\infty) \\ g: (x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow D_g &= [1, +\infty) \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_f = D_g \quad \checkmark$$

گزینه ۲:

$$g(x) = \sqrt{(x-1)^2(x-1)} = \sqrt{\underbrace{x-1}_{\geq 0}} \sqrt{(x-1)} = (x-1)\sqrt{(x-1)} \neq f(x)$$

حال ضابطه‌ها را بررسی می‌کنیم:

پس شرط دوم (برابری ضابطه‌ها) برقرار نیست، در نتیجه f و g مساوی نیستند.

$$\left. \begin{aligned} f: x^4 \geq 0 \Rightarrow D_f &= \mathbb{R} \\ D_g &= \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_f = D_g \quad \checkmark$$

گزینه ۳:

$$f(x) = \sqrt[4]{x^4} = |x| \neq g(x)$$

حال ضابطه‌ها را بررسی می‌کنیم:

پس شرط دوم (برابری ضابطه‌ها) برقرار نیست، در نتیجه f و g مساوی نیستند.

گزینه ۴: می‌دانیم $|x|^2 = \sqrt{x^2} = x^2$ پس:

$$\left. \begin{aligned} f: 9-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x| \leq 3 \Rightarrow D_f &= [-3, 3] \\ g: (3-x)(x+3) \geq 0 \Rightarrow 9-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \xrightarrow{\text{مشابه بالا}} D_g &= [-3, 3] \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_f = D_g \quad \checkmark$$

$$f(x) = \sqrt{9-|x|^2} = \sqrt{9-x^2} = \sqrt{(3-x)(3+x)} = g(x) \quad \checkmark$$

حال ضابطه‌ها را بررسی می‌کنیم:

شرط دوم (برابری ضابطه‌ها) نیز برقرار است، در نتیجه f و g مساوی هستند.

پس گزینه «۴» درست است.

تذکره: در صورتی اجازه داریم ضابطه تابعی را ساده کنیم که دامنه‌اش را تعیین کرده باشیم، یعنی پیش از تعیین دامنه، حق ساده کردن نداریم. مثلاً زمانی می‌توانیم $y = \frac{x^2-9}{x-3}$ را برابر $y = x+3$ در نظر بگیریم که قید کنیم $D = \mathbb{R} - \{3\}$ است.

مثال: تابع $f(x) = |x+1|$ با تابع $y = |g(x)|$ برابر است. $g(x)$ کدام است؟

$$\begin{aligned} \frac{(x+1)^2}{x+1} \quad (۴) & \quad \frac{x^2+x^2+x+1}{x^2+1} \quad (۳) & \quad \frac{x^2+x}{|x|} \quad (۲) & \quad \frac{|x^2-1|}{x-1} \quad (۱) \end{aligned}$$

پاسخ: $D_f = \mathbb{R}$ است در حالی که در گزینه (۱) $D = \mathbb{R} - \{1\}$ ، در گزینه (۲) $D = \mathbb{R} - \{0\}$ و در گزینه (۴) $D = \mathbb{R} - \{-1\}$ هستند.

در گزینه (۳) $D = \mathbb{R}$ است (شرط اول برای تساوی دو تابع وجود دارد). حال ضابطه $g(x)$ را بررسی می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{x^2(x+1) + (x+1)}{(x^2+1)} = \frac{(x+1)(x^2+1)}{(x^2+1)} = (x+1) \Rightarrow |g(x)| = |x+1| = f(x)$$

شرط دوم (برابری ضابطه‌ها) هم برقرار است، بنابراین $f(x)$ و $|g(x)|$ مساوی‌اند.

پس گزینه «۳» درست است.

تذکره:

۱ $D_g = \mathbb{R}$ ، در نتیجه $D_{|g|} = \mathbb{R}$.

۲ در ضابطه $g(x)$ چون $D_g = \mathbb{R}$ تعیین شده بود، اجازه ساده کردن داشتیم.



۱۵. اگر دو تابع $f = \{(2, x^2 - x), (1, 7), (x, -5), (x-2, 5-x), (11, 9x)\}$ و $g = \{(2, 0), (y+3, 6), (t, -9), (1, 7), (-1, z)\}$ با هم مساوی باشند، مجموع تمام مقادیر ممکن برای مجهول‌ها کدام است؟

- (۱) -۱۲ (۲) -۶ (۳) ۵ (۴) -۱

۱۶. کدام تابع با $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ مساوی نیست؟

- (۱) $\frac{|(x-2)(x^2+1)|}{1+x^2}$ (۲) $\frac{|x^2-1|}{x^2+2x+4}$ (۳) $\left| \frac{x^2+3x-10}{x+5} \right|$ (۴) $\sqrt[6]{(2-x)^6}$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۷. دو تابع f و g مفروض‌اند. در کدام گزینه دو تابع مساوی‌اند؟

- (۱) $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x-1}, g(x) = x+4$ (۲) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|}, g(x) = 1$
 (۳) $f(x) = (\sqrt{x})^2, g(x) = x$ (۴) $f(x) = \frac{x}{|x|}, g(x) = \frac{|x|}{x}$

۱۸. در کدام گزینه، توابع داده شده با هم مساوی‌اند؟

- (۱) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & ; x \neq -2 \\ 4 & ; x = -2 \end{cases}, g(x) = x-2$
 (۲) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}+1}, g(x) = \sqrt{1+x^2}-1$
 (۳) $h(x) = \sqrt{x(x-2)}, k(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-2}$ (۴) $q(x) = \sqrt{x^2-6x+9}, p(x) = x-3$

۱۹. تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2-5x-2}{x-2} & ; x \neq 2 \\ 2a-11 & ; x = 2 \end{cases}$ و $g(x) = 3x+1$ با هم برابرند. مقدار a کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۹ (۳) ۷ (۴) -۷

۲۰. تابع $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-15}{x-m} & ; x \neq m \\ fn+2 & ; x = m \end{cases}$ و $k(x) = x-5$ با هم برابر هستند. حاصل fmn کدام است؟

- (۱) $\frac{27}{2}$ (۲) $-\frac{27}{2}$ (۳) -۳۳ (۴) ۳۳

انواع توابع

تابع گویا

هر تابع کسری که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای‌های جبری باشند، به طوری که مخرج صفر نشود، تابع گویا نام دارد. مانند:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 5}{3x - 1}$$

طبق تعریف، $3x-1$ نباید صفر شود، بنابراین می‌گوییم دامنه تعریف تابع $f(x)$ برابر $\mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}$ است.

در حالت کلی، دامنه تعریف عبارت گویا $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ عبارت است از: $D_f = \mathbb{R} - \{x | q(x) = 0\}$

مثال: دامنه تابع $y = \frac{2x+5}{x^4-13x^2+36}$ شامل چند عدد طبیعی نمی‌شود؟

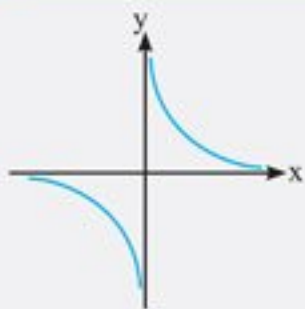
- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

پاسخ: مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \Rightarrow (x^2 - 9)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+3)(x-2)(x+2) = 0$$

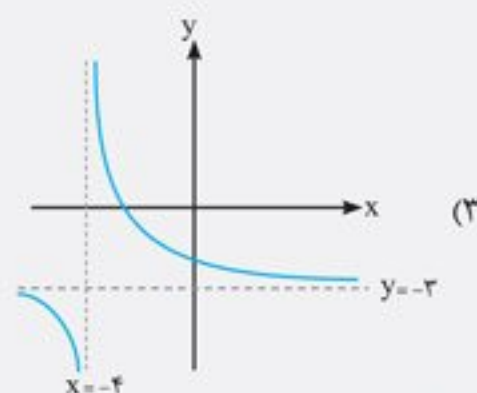
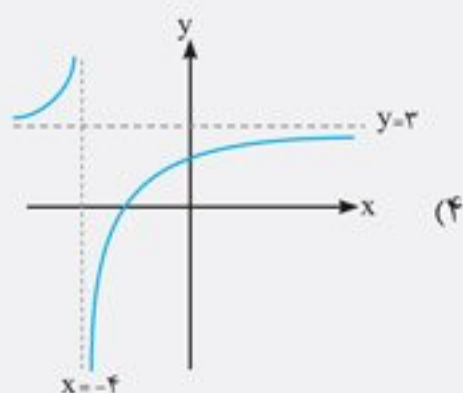
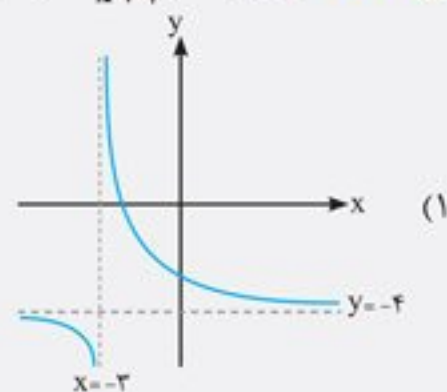
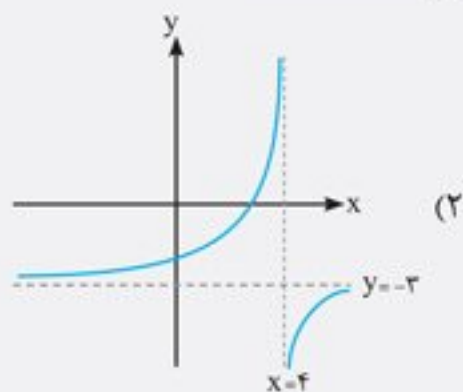
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ x = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{\pm 2, \pm 3\}$$

یعنی دامنه این تابع از میان اعداد طبیعی، شامل ۲ و ۳ نمی‌شود. پس گزینه «۳» درست است.



ساده‌ترین تابع گویا به فرم $y = \frac{1}{x}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{0\}$ است که به شکل مقابل می‌باشد:
 در انتقال تابع $y = \frac{1}{x}$ ، خطوطی موازی محورهای مختصات ظاهر می‌شوند. یعنی اگر نمودار این تابع a واحد به چپ یا راست برود، انگار محور y ها هم جابه‌جا می‌شود و خط $x = -a$ یا $x = a$ ظاهر می‌گردد. هم‌چنین اگر نمودار $y = \frac{1}{x}$ به اندازه b واحد بالا یا پایین برود، انگار محور x ها جابه‌جا می‌شود و خط $y = b$ یا $y = -b$ ظاهر می‌گردد.

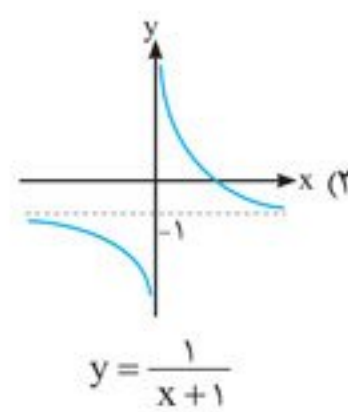
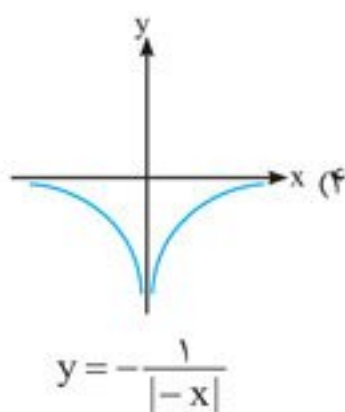
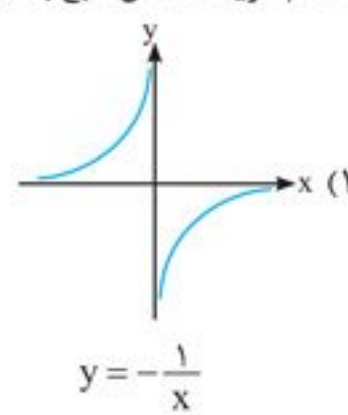
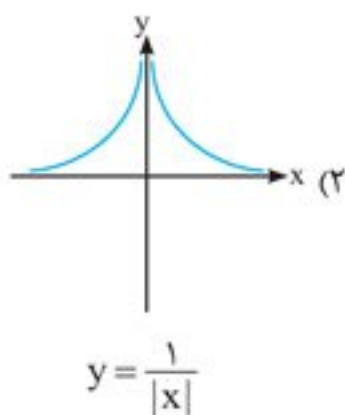
مثال: نمودار $y = \frac{1}{x+4} - 3$ در کدام گزینه به درستی نمایش داده شده است؟



پاسخ: $y = \frac{1}{x+4} - 3$ همان $y = \frac{1}{x}$ است که ابتدا 4 واحد به سمت چپ و سپس 3 واحد پایین می‌رود. پس خطوط $x = -4$ و $y = -3$ ظاهر می‌شوند. بنابراین گزینه «3» درست است.

21. در کدام گزینه، شکل تابع به درستی رسم نشده است؟

(مشابه تمرین کتاب درس)



(مشابه تمرین کتاب درسی)

۳۹. دامنه کدام تابع متفاوت از سایرین است؟

(۴) $\sqrt{x^2 + 2x + 7}$

(۳) $\sqrt{x + |x|}$

(۲) $\frac{\sqrt{x^4 + 1}}{3x^2 + 5}$

(۱) $\sqrt{x^2 + x}$

۴۰. دامنه تابع $y = \frac{1}{\sqrt{x - |x|}}$ کدام است؟

(۴) \emptyset

(۳) $(0, 1)$

(۲) $(-\infty, 0)$

(۱) $(0, +\infty)$

۴۱. دامنه تابع با ضابطه $y = \sqrt{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}}$ کدام است؟

(۴) \emptyset

(۳) $[-3, -1]$

(۲) $[-3, +\infty)$

(۱) $[-1, +\infty)$

۴۲. دامنه تابع $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{1 - 2x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۴) ۸

(۳) ۹

(۲) ۷

(۱) ۶

۴۳. عبارت $\sqrt{2nx^2 + 4nx + 1}$ به ازای چه مقادیری از n همواره تعریف شده است؟

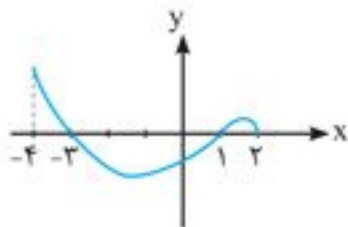
(۴) $(-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$

(۳) $[\frac{1}{2}, +\infty)$

(۲) $(0, \frac{1}{2}]$

(۱) $[0, \frac{1}{2}]$

(ریاضی ۹۲)



۴۴. شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

(۱) $[0, 2]$

(۲) $[-3, 2]$

(۳) $[-4, -3] \cup [1, 2]$

(۴) $[-3, 0] \cup [1, 2]$

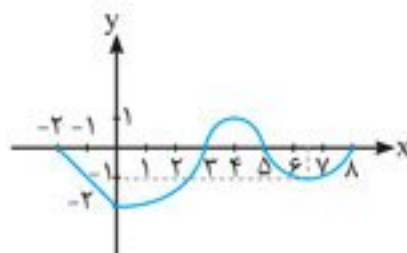
۴۵. اگر تابع $f(x)$ به صورت مقابل باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{-\frac{f(x)}{x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) ۸

(۲) ۷

(۳) ۵

(۴) ۴



(تمرین فارغ ۹۶)

۴۶. اگر عبارت $\sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}} + \sqrt{2x - x^2}$ عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x در کدام بازه است؟

(۴) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]$

(۳) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, 2]$

(۲) $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$

(۱) $[\frac{2}{3}, 2]$

معادلات و توابع

معادلاتی که دارای دو متغیر x و y هستند، یک «رابطه» را مشخص می‌کنند اما هر رابطه‌ای الزاماً «تابع» نیست. معادلات دو متغیره، زمانی یک تابع را مشخص می‌کنند که به ازای هر مقدار x ، فقط و فقط یک مقدار برای y وجود داشته باشد. در این صورت می‌گوییم y تابعی از x است.

برای تشخیص تابع بودن رابطه‌ای که معادله آن داده شده، سعی می‌کنیم y را بر حسب x به دست آوریم و بررسی کنیم که آیا به ازای هر مقدار x (از دامنه تعریف) یک مقدار برای y حاصل می‌شود یا بیشتر از یک مقدار؟ به بیان دیگر اگر از فرض $x_1 = x_2$ بتوانیم به تساوی $y_1 = y_2$ برسیم، تابع بودن رابطه داده شده را اثبات کرده‌ایم.



معادلاتی که y در آن‌ها توان زوج یا قدرمطلق دارد، معمولاً تابع نیستند. در رابطه با این معادلات، اکثراً به روش مثال نقض، می‌توان به x یک مقدار مناسب نسبت داد و مشاهده نمود که بیشتر از یک مقدار برای y به دست می‌آید.

مثال: کدام یک از گزینه‌های زیر معرف تابع نیست؟

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 \quad (1) \quad y^2 + 5x - 1 = 2y(y-1) \quad (2) \quad y^2 + 5x - 1 = \pm \sqrt{1-x} \quad (3) \quad |x| + |y| = 4 \quad (4)$$

• پاسخ:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 0 \Rightarrow (x-y)^2 = 0 \Rightarrow x = y$$

گزینه ۱:

تابع است، چون به ازای هر x ، فقط و فقط یک y داریم.

گزینه ۲: معادله داده شده را به صورت زیر در می آوریم:

$$5x + (y^2 - 1 - 2y^2 + 2y) = 0 \Rightarrow 5x + (y-1)^2 = 0 \Rightarrow (y-1)^2 = -5x \Rightarrow y-1 = \sqrt{-5x} \Rightarrow y = \sqrt{-5x} + 1$$

y را بر حسب x به دست آوردیم. مشخص است که به ازای هر مقدار x ، یک مقدار برای y حاصل می شود، پس تابع است.

به روشی دیگر، زمانی که به $(y-1)^2 = -5x$ رسیدیم، می توانیم چنین عمل کنیم:

$$x_1 = x_2 \xrightarrow{x(-)} -5x_1 = -5x_2 \Rightarrow (y_1-1)^2 = (y_2-1)^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} y_1-1 = y_2-1 \xrightarrow{+1} y_1 = y_2$$

مشاهده می شود که از فرض $x_1 = x_2$ به $y_1 = y_2$ رسیدیم، پس معادله داده شده تابع است.

$$\left. \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \end{array} \right\} \cap \rightarrow x=1 \rightarrow D = \{1\}$$

گزینه ۳: ابتدا دامنه تعریف این رابطه را تعیین می کنیم:

یعنی دامنه این رابطه تنها شامل یک عضو است که خروجی به ازای آن برابر صفر می شود، بنابراین رابطه یک عضوی $R = \{(1,0)\}$ را داریم که تابع است.

گزینه ۴: y قدرمطلق دارد، پس احتمالاً تابع نیست. از مثال نقض استفاده می کنیم:

$$(مقدار دلخواه مناسب) \quad x=1 \Rightarrow |1| + |y| = 4 \Rightarrow |y| = 3 \Rightarrow y = \pm 3$$

به ازای یک مقدار x ، بیش از یک مقدار برای y به دست آمد، بنابراین معادله داده شده تابع نیست.

پس گزینه «۴» درست است.

۴۷. کدام یک از ضابطه‌های زیر، y را به صورت تابعی از x نمایش می دهد؟

$$y^2 = x^2 \quad (1) \quad x^2 = y^2 + y \quad (2) \quad x = |y| + 3 \quad (3) \quad x^2 + y^2 = 50 \quad (4)$$

۴۸. چند مورد از رابطه‌های زیر می توانند تابع باشند؟

$$x^2 + y^2 = 0, \quad (x-6)^2 + (y+2)^2 = 5, \quad (x^2-4)^2 + (y+2)^2 = 0, \quad (x-5)^2 + (y^2-4)^2 = 0$$

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

۴۹. کدام رابطه بیانگر یک تابع نیست؟

$$|y+7| = -25x^2 + 30x - 9 \quad (1)$$

$$4x^2 + 9y^2 - 4x - 12y + 5 = 0 \quad (2)$$

۵۰. به ازای کدام مقدار b رابطه $R = \{(1,-1), (2,|b|), (2,1), (2b,-3)\}$ بیانگر یک تابع است؟

$$1 \quad (1) \quad -1 \quad (2) \quad \pm 1 \quad (3) \quad \text{صفر} \quad (4)$$

۵۱. کدام رابطه x را به صورت تابعی از y بیان می کند؟

$$7y + \sqrt{6x-5} - x = 0 \quad (1)$$

$$3x = y^2 + 2 \quad (2)$$

$$y = x^2 - 5x + 7 \quad (3)$$

$$y = |3x+1| - 4 \quad (4)$$

۵۲. کدام یک از رابطه‌های زیر بیانگر تابع است؟

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \leq 2 \\ 3x-2 & ; x \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+5} & ; x \geq 0 \\ x^2 + 3x & ; x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$k(x) = \begin{cases} 9-x & ; x \leq -1 \\ 2x+7 & ; x \geq -1 \end{cases} \quad (3)$$

$$h(x) = \begin{cases} \pm\sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ 3x-2 & ; x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

۵۳. اگر $f(x) = \begin{cases} x^2-2 & ; x \leq 3 \\ 2k-5x & ; x \geq 3 \end{cases}$ تابع باشد، مقدار $f(5)$ کدام است؟

$$-3 \quad (1) \quad 7 \quad (2) \quad -5 \quad (3) \quad 11 \quad (4)$$

تابع پله‌ای و تابع جزء صحیح

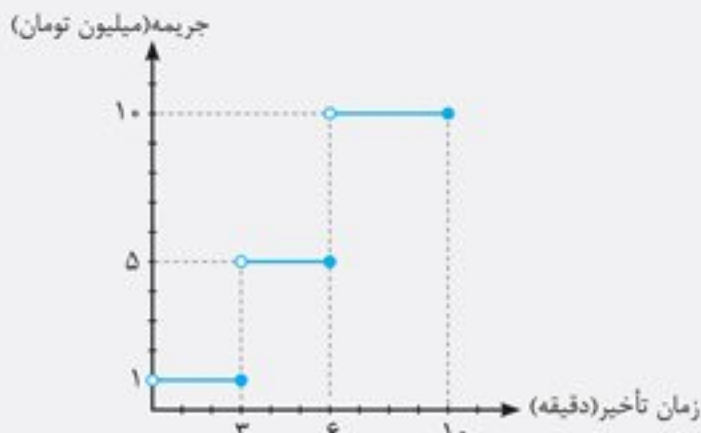
توابعی که بتوان دامنه آن‌ها را به تعدادی بازه تقسیم کرد، به طوری که تابع روی تمام این بازه‌ها «ثابت» باشد، توابع پله‌ای نام دارند. به عنوان مثال، برای تیم‌های فوتبال لیگ برتر کشورمان که در آغاز بازی یا در شروع نیمه دوم، حضورشان در میدان با تأخیر همراه باشد، جریمه این چینی در نظر گرفته‌اند:

تا ۳ دقیقه تأخیر، یک میلیون تومان جریمه نقدی
بین ۳ تا ۶ دقیقه تأخیر، پنج میلیون تومان جریمه نقدی
بین ۶ تا ۱۰ دقیقه تأخیر، ده میلیون تومان جریمه نقدی
(بیشتر از ۱۰ دقیقه تأخیر، بازی را ۳ بر صفر به نفع حریف اعلام می‌کنند.)

تابع نقدی جریمه تیم‌ها برحسب دقایق تأخیر را می‌توان به صورت یک تابع پله‌ای نوشت:

$$y = \begin{cases} 1 & ; 0 < x \leq 3 \\ 5 & ; 3 < x \leq 6 \\ 10 & ; 6 < x \leq 10 \end{cases}$$

نمودار تابع فوق نیز به صورت زیر است:



تابع جزء صحیح

جزء صحیح: هر عدد حقیقی x بین دو عدد صحیح متوالی $(n \leq x < n+1)$ قرار دارد که جزء صحیح (قسمت صحیح) آن برابر n است و می‌نویسیم:

(می‌خوانیم: براکت عدد x برابر n است.)

تذکره: $x - [x]$ را جزء اعشاری عدد x می‌نامند که همواره بین صفر و یک است. (می‌تواند خود صفر هم باشد). مثلاً عدد $3/4$ را می‌توان به صورت $3 + 0/4$ نوشت که ۳ جزء (قسمت) صحیح و $0/4$ جزء (قسمت) اعشاری آن به حساب می‌آید و می‌نویسیم: $[3/4] = 3$

به بیان دیگر، چون $3 \leq 3/4 < 4$ می‌باشد، بنابراین $[3/4] = 3$ است؛ در واقع اگر بتوان موقعیت دقیق یا حدودی یک عدد حقیقی را روی محور اعداد مشخص کرد، جزء صحیح آن، عدد صحیح سمت چپش می‌باشد.



اگر خود عدد، صحیح باشد، جزء صحیح آن برابر با خود عدد است.

مثال: کدام گزینه صحیح است؟

$$[1 + \sqrt{93}] = 9 \quad (4) \quad [\sqrt{7} - 2\sqrt{2}] = -1 \quad (3) \quad [3 - \sqrt{2}] = 2 \quad (2) \quad [-7/8] = -7 \quad (1)$$

پاسخ:

گزینه ۱:

گزینه ۲:

گزینه ۳:

گزینه ۴:

$$-8 \leq -7/8 < -7 \Rightarrow [-7/8] = -8$$

$$\sqrt{2} \approx 1/4 \Rightarrow 1 \leq 3 - \sqrt{2} < 2 \Rightarrow [3 - \sqrt{2}] = 1$$

$$2\sqrt{2} = \sqrt{8} \Rightarrow -1 \leq \sqrt{7} - \sqrt{8} < 0 \Rightarrow [\sqrt{7} - \sqrt{8}] = -1$$

$$\sqrt{81} < \sqrt{93} < \sqrt{100} \Rightarrow 10 \leq 1 + \sqrt{93} < 11 \Rightarrow [1 + \sqrt{93}] = 10$$

پس گزینه «۳» درست است.



[x]



f(x)

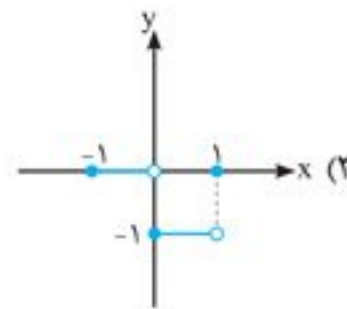
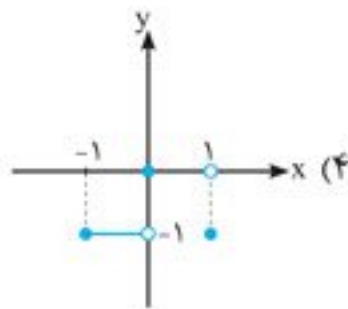
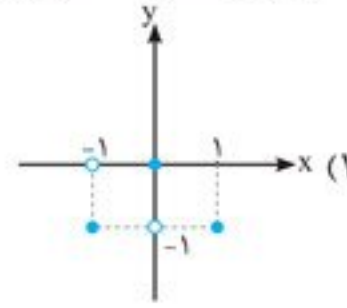
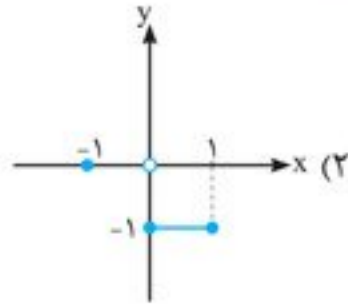
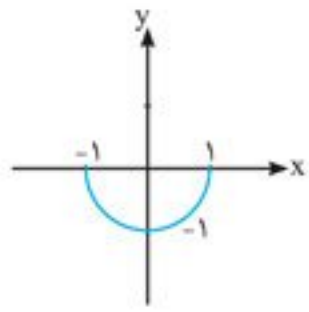
کتاب تست

۱۴۲

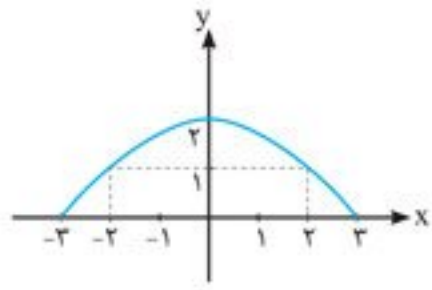
حسابان (۱)



۶۰. اگر نمودار f به صورت شکل زیر باشد، نمودار $y = f(|x|)$ کدام است؟



۶۱. اگر نمودار f به صورت شکل زیر باشد، آن گاه برد تابع $g(x) = \frac{1}{|f(x)|}$ کدام است؟



(۱) $[\frac{1}{2}, 1)$

(۳) $(0, \frac{1}{2}]$

(۲) $\{\frac{1}{2}, 1\}$

(۴) $\{1, 2\}$

۶۲. در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2[x]$ مقدار $f(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3}))$ کدام است؟

(۴) $2/75$

(۳) $2/5$

(۲) $2/25$

(۱) $1/75$

۶۳. اگر $f(x) = [4 - 2x]$ باشد، حاصل $f(2 - \sqrt{3})$ کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) -۳

(۱) -۴

۶۴. اگر $a = (2 + \sqrt{3})^{10} + (2 - \sqrt{3})^{10}$ باشد، حاصل $[(2 + \sqrt{3})^{10}]$ کدام است؟

(۴) $a - 2$

(۳) $a + 1$

(۲) a

(۱) $a - 1$

۶۵. با فرض این که $n \in \mathbb{N}$ باشد، حاصل $[\sqrt{25n^2 + 10n}]$ کدام است؟

(۴) $5n + 1$

(۳) $5n - 1$

(۲) $5n$

(۱) $5(n + 1)$

۶۶. برای هر عدد طبیعی $n > 2$ ، حاصل $[\sqrt{4n^2 - 2n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}]$ کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۶۷. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{|x| + [-x]}$ کدام است؟

(۴) \emptyset

(۳) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

(۲) \mathbb{Z}

(۱) \mathbb{R}

۶۸. دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x+2}{|x| + [-x] + 1}$ کدام است؟

(۴) \emptyset

(۳) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

(۲) \mathbb{Z}

(۱) \mathbb{R}

۶۹. دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - [x]}}$ کدام است؟

(۴) \emptyset

(۳) اعداد غیر صحیح منفی

(۲) اعداد صحیح منفی

(۱) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

۷۰. دامنه تابع $f(x) = \sqrt{|x| + [x + \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}]} - 15$ کدام است؟

(۴) $(5, +\infty)$

(۳) $(4, +\infty)$

(۲) $(5, +\infty)$

(۱) $(4, +\infty)$

۷۱. برد تابع $h(x) = \sqrt{6x + 6 - 3 \cdot [\frac{x}{5}]}$ چند عضو طبیعی دارد؟

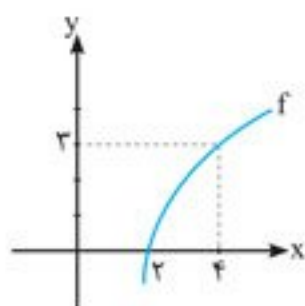
(۴) بی شمار

(۳) ۵

(۲) ۴

(۱) ۳

(تمرین خارج ۹۰)



۱۰۰. شکل زیر، نمودار تابع f است. دامنه تابع $y = \sqrt{f^{-1}(x)} - 4$ کدام است؟

- (۱) $[2, +\infty)$
 (۲) $[4, +\infty)$
 (۳) $[3, +\infty)$
 (۴) $[2, 4]$

۱۰۱. بزرگ‌ترین بازه‌ای که می‌توان $f(x) = x^2 - 3x$ را در آن محدود کرد تا وارون پذیر شود، کدام است؟

- (۱) $[-\frac{3}{2}, +\infty)$ (۲) $(-\infty, \frac{3}{2}]$ (۳) $[4, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 0]$

۱۰۲. تابع با ضابطه $f(x) = |x+2| + |2-x|$ در کدام بازه یک‌به‌یک است؟

- (۱) $[-3, 2]$ (۲) $(-\infty, -2]$ (۳) $(-\infty, -3]$ (۴) $[1, +\infty)$

۱۰۳. به ازای کدام مقدار m ، تابع $y = |3x - m|$ در بازه $[-2, 2]$ وارون پذیر است؟

- (۱) $(-6, 9)$ (۲) $\mathbb{R} - [-6, 9]$ (۳) $\mathbb{R} - (-6, 9)$ (۴) $[-6, 9]$

۱۰۴. تابع $f(x) = \begin{cases} |2x+1| & ; x \geq 3 \\ -x+h & ; 0 < x < 3 \\ -\sqrt{-x}-2 & ; x \leq 0 \end{cases}$ مفروض است. بیشترین مقدار h چقدر باشد تا f یک‌به‌یک شود؟

- (۱) -2 (۲) 1 (۳) 7 (۴) 10

۱۰۵. اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، ضابطه تابع $f^{-1}(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}(1+2x+\sqrt{1+4x}) ; x \geq 0$
 (۲) $\frac{1}{2}(1+2x-\sqrt{1+4x}) ; x \geq 0$
 (۳) $\frac{1}{2}(1+2x-\sqrt{1+4x}) ; x \geq -\frac{1}{4}$
 (۴) $\frac{1}{2}(1+2x+\sqrt{1+4x}) ; x \geq -\frac{1}{4}$

۱۰۶. ضابطه معکوس تابع $f(x) = \frac{2x+1}{1-x} ; x > 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{x-1}{x+2} ; x > -2$
 (۲) $\frac{x+1}{x-2} ; x > 2$
 (۳) $\frac{x+1}{x-2} ; x < 2$
 (۴) $\frac{x-1}{x+2} ; x < -2$

۱۰۷. ضابطه معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $y = x^2 - 4x + 5 ; (x \leq 2)$
 (۲) $y = -x^2 - 4x + 5 ; (x \leq 2)$
 (۳) $y = x^2 - 4x + 5 ; (x \geq 1)$
 (۴) $y = x^2 + 4x - 5 ; (x \geq 1)$

۱۰۸. ضابطه وارون تابع $y = \frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟

- (۱) $y = \frac{x}{1-|x|} ; |x| < 1$
 (۲) $y = \frac{1-|x|}{|x|} ; |x| > 1$
 (۳) $y = \frac{x}{|x|-1} ; |x| > 1$
 (۴) $y = \frac{|x|-1}{x} ; |x| < 1$

۱۰۹. ضابطه وارون تابع $y = x + 2[x]$ کدام است؟

- (۱) $y = x - \frac{2}{3}[x]$ (۲) $y = x + \frac{2}{3}[x]$ (۳) $y = x - \frac{1}{2}[x]$ (۴) $y = x + \frac{1}{2}[x]$

۱۱۰. تابع با ضابطه $f(x) = 2x - |4 - 2x|$ در بازه‌ای وارون پذیر است. ضابطه $f^{-1}(x)$ در آن بازه کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}x + 1 ; x \geq 4$
 (۲) $\frac{1}{4}x - 1 ; x \leq 4$
 (۳) $\frac{1}{4}x - 1 ; x \geq 4$
 (۴) $\frac{1}{4}x + 1 ; x \leq 4$

۱۱۱. تابع خطی $f(x)$ محورهای مختصات را در نقطه A به طول ۳ و در نقطه B به عرض ۴ قطع می‌کند. دامنه تعریف $y = \sqrt{xf^{-1}(x)}$ کدام است؟

- (۱) $[0, 3]$ (۲) $[3, 4]$ (۳) $[0, 4]$ (۴) $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$



۱۱۲. اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ باشد، ضابطه تابع $f^{-1}(\sin x)$ کدام است؟

- (۱) $\tan x$
- (۲) $\cot x$
- (۳) $\frac{|\cos x|}{\sin x}$
- (۴) $\frac{\sin x}{|\cos x|}$

(ریاضی ۹۰)

۱۱۳. در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{|x|}{x} \sqrt{1-x^2}$; $x^2 \neq 1$ و $f(0) = 0$ ضابطه تابع وارون آن برابر کدام است؟

- (۱) $f(x)$
- (۲) $-f(x)$
- (۳) $x.f(x)$
- (۴) $-x.f(x)$

(ریاضی خارج ۹۱)

۱۱۴. ضابطه معکوس تابع $y = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $y = x\sqrt{|x|}$; $x \in \mathbb{R}$
- (۲) $y = x\sqrt{|x|}$; $x \in \mathbb{R}$
- (۳) $y = x|x|$; $x \in \mathbb{R} - \{0\}$
- (۴) $y = x|x|$; $x \in \mathbb{R}$

(تجربی خارج ۹۲)

۱۱۵. ضابطه وارون تابع $y = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) $y = x|x|$ ($x \in \mathbb{R}$)
- (۲) $y = -x^2$ ($x < 0$)
- (۳) $y = \pm x^2$ ($x \in \mathbb{R}$)
- (۴) $y = \pm x|x|$ ($x \in \mathbb{R}$)

(تجربی خارج ۹۱)

۱۱۶. اگر $f(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$ به ازای $x > 0$ تعریف شده باشد، حاصل $f^{-1}(\frac{1}{x}) - f^{-1}(-\frac{1}{x})$ کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) $\frac{2}{x}$
- (۳) $\frac{2x^2 + 2}{2x}$
- (۴) $\frac{2}{x} \sqrt{x^2 + 1}$

۱۱۷. معکوس تابع $f(x) = 2x + [x]$ با دامنه $0 < x < 2$ کدام است؟

- (۱) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & ; 0 < x < 2 \\ \frac{x-1}{2} & ; 2 \leq x < 4 \end{cases}$
- (۲) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & ; 0 < x < 1 \\ \frac{x+1}{2} & ; 1 \leq x < 2 \end{cases}$
- (۳) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & ; 0 < x < 2 \\ \frac{x-1}{2} & ; 3 \leq x < 5 \end{cases}$
- (۴) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & ; 0 < x < 2 \\ \frac{x+1}{2} & ; 3 \leq x < 5 \end{cases}$

۱۱۸. در تابع معکوس پذیر $f(x) = \frac{mx+2}{x+3}$ اگر $f^{-1} = f$ باشد، m کدام است؟

- (۱) ۳
- (۲) -۳
- (۳) -۲
- (۴) ۲

۱۱۹. تابع خطی g با g^{-1} تقاطعی ندارد و داریم $g^{-1}(7) = 4$ ؛ در این صورت حاصل $g(-2)$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) -۵
- (۳) ۴
- (۴) صفر

۱۲۰. نمودار تابع $g(x) = -x^2 + ax + b$ ، نمودار تابع وارونش را در نقطه $(-1, 1)$ قطع می‌کند. حاصل ab کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) صفر
- (۳) -۱
- (۴) ۲

۱۲۱. اگر $-1 < x < 0$ باشد، ضابطه تابع معکوس تابع $f(x) = x^2 - 2x^2$ به صورت $f^{-1}(x) = a\sqrt{1+b}\sqrt{1+x}$ است. مقدار $2a - 3b$ چقدر است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۵
- (۳) -۵
- (۴) -۱

۱۲۲. اگر تابع با ضابطه $f(x) = (a+1)x^2 + (a+2)x^2 + (a+4)x^2 + 3x$ با دامنه \mathbb{R} معکوس پذیر باشد، معکوس آن خط $y = x$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) یک نقطه
- (۲) سه نقطه
- (۳) دو نقطه
- (۴) قطع نمی‌کند

(ریاضی خارج ۸۸)

۱۲۳. اگر به ازای $x \geq 1$ ، $f(x) = x^2 - 3x$ باشد، نمودارهای دو تابع f و f^{-1} با کدام طول متقاطع‌اند؟

- (۱) $\sqrt{2}$
- (۲) ۲
- (۳) ۴
- (۴) غیرمتقاطع

(ریاضی ۹۲)

۱۲۴. تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1$ با دامنه $(-1, +\infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع f و f^{-1} در چند نقطه متقاطع هستند؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) غیرمتقاطع

۱۲۵. منحنی وارون تابع $y = -(x+2)^2 - 2$ ، نمودار این تابع را در چند نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) صفر

اعمال روی توابع

اعمال جبری روی توابع

برای دو تابع f و g ، اعمال جبری این چنین تعریف می‌شوند:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

البته پیش از این باید به دامنه این توابع اشاره کرد تا مشخص شود چه مقادیری می‌توانند وارد آن‌ها شوند.

$$D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$



نکته

توان و ضرب تابع، روی دامنه تأثیری ندارد. مثلاً D_{f^2} همان D_f یا $D_{f \times f}$ همان D_f است. (چون $f^2 = f \times f$ و در نتیجه $D_{f^2} = D_f \cap D_f = D_f$ به همین ترتیب مورد دوم را نیز می‌توان اثبات کرد.)

مثال: اگر $f = \{(-2, 5), (-3, 1), (4, 2), (0, 9), (-4, 0)\}$ و $g = \{(2, 6), (-2, 1), (0, 5), (-4, \sqrt{3})\}$ باشند، کدام یک از گزینه‌های زیر وجود دارد؟

(۴) $(2f + 3g)(-3)$

(۳) $(f - g)(0)$

(۲) $(g.f)(4)$

(۱) $\left(\frac{g}{f}\right)(-4)$

پاسخ: ابتدا D_f و D_g را مشخص می‌کنیم:

$$D_f = \{-2, -3, 4, 0, -4\}, \quad D_g = \{2, -2, 0, -4\}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x \mid f(x) = 0\} = \{-2, 0, -4\} - \{-4\} = \{-2, 0\}$$

مشاهده می‌شود که $-4 \notin D_{\frac{g}{f}}$ پس $\left(\frac{g}{f}\right)(-4)$ وجود ندارد.

$$D_{g.f} = D_g \cap D_f = \{-2, 0, -4\}$$

مشاهده می‌شود که $4 \notin D_{g.f}$ پس $(g.f)(4)$ وجود ندارد.

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{-2, 0, -4\} \Rightarrow (f - g)(0) = f(0) - g(0) = 9 - 5 = 4$$

گزینه ۳:

$$D_{2f+3g} = D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{-2, 0, -4\}$$

گزینه ۴:

مشاهده می‌شود که $-3 \notin D_{2f+3g}$ پس $(2f + 3g)(-3)$ وجود ندارد.
پس گزینه «۳» درست است.

مثال: اگر $f(x) = \frac{7}{x-3}$ و $g(x) = \frac{6x}{5-x}$ باشند، دامنه $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ شامل چند عدد صحیح نمی‌شود؟

۴ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x \mid f(x) = 0\}$$

پاسخ: می‌دانیم:

پس ابتدا D_f و D_g و همچنین ریشه معادله $f(x) = 0$ (در صورت وجود) را به دست می‌آوریم:

$$D_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{5\}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{7}{x-3} = 0 \Rightarrow \text{معادله جواب (ریشه) ندارد} \Rightarrow D_{\frac{g}{f}} = \frac{D_g \cap D_f}{\mathbb{R} - \{3, 5\}} - \frac{\{x \mid f(x) = 0\}}{\emptyset} = \mathbb{R} - \{3, 5\}$$

بنابراین $D_{\frac{g}{f}}$ شامل دو عدد صحیح ۳ و ۵ نمی‌شود.

پس گزینه «۲» درست است.



۱۲۶. اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ باشند، مقدار $(2f-g)(3)$ کدام است؟

- (۱) -۱
- (۲) صفر
- (۳) ۱
- (۴) ۲

۱۲۷. اگر $f = \{(-1, 2), (3, 0), (4, 9), (-2, 5), (0, 4)\}$ و $g = \{(3, -2), (2, 6), (4, -1), (0, 10)\}$ باشند، کدام گزینه صحیح نیست؟

- (۱) $2g(4) - (f+2g)(0) = -27$
- (۲) $(f^2 - g^2)(4) = 80$
- (۳) $\frac{(f+g)(0)}{(f.g)(3)} = 7$
- (۴) $\frac{2f(-2)}{g^2(4)} = -10$

۱۲۸. اگر $f = \{(3, 1), (2, 5), (4, 3), (1, 6)\}$ باشد، برد تابع $f + f^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $\{5, 8\}$
- (۲) $\{3, 9\}$
- (۳) $\{5, 9\}$
- (۴) $\{4, 8\}$

۱۲۹. اگر $f(x) = x^2 + 1$ ، $g = \{(1, 2), (3, 1), (5, 2)\}$ و $f + g = \{(1, a), (b, 11), (5, fc)\}$ باشند، مقدار $\frac{a+b}{c}$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۱۳۰. اگر $h(x) = \sqrt{x+5}$ و $k(x) = x+3$ باشند، چند عدد صحیح منفی در دامنه تابع $(\frac{h}{k})(x)$ قرار دارد؟

- (۱) ۷
- (۲) ۵
- (۳) ۴
- (۴) ۳

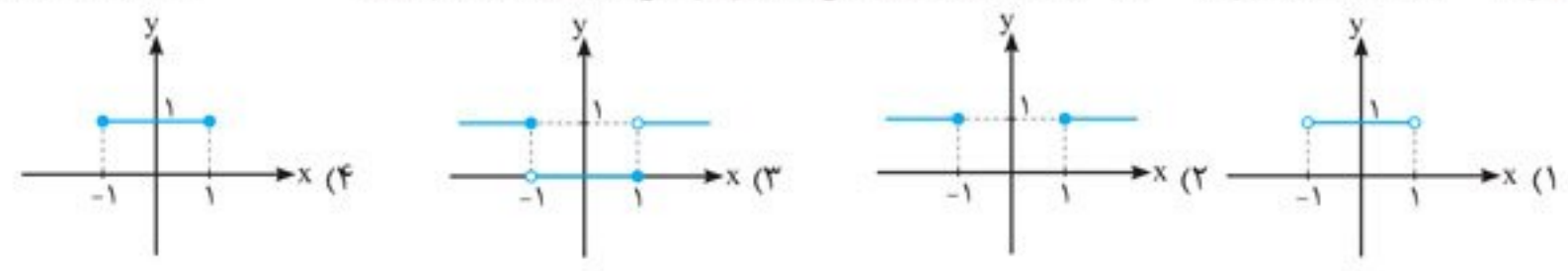
۱۳۱. اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}}$ و $g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+4}}$ باشند، دامنه تابع با ضابطه $\frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟

- (۱) $(-3, +\infty) - \{1\}$
- (۲) $\mathbb{R} - \{1\}$
- (۳) $(-3, +\infty)$
- (۴) $(-3, +\infty) - \{0\}$

۱۳۲. اگر $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ x-1 & x \leq 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x & x \geq -2 \\ x-1 & x < -2 \end{cases}$ باشند، حاصل $f+2g$ به ازای $x = f(0)$ چقدر است؟

- (۱) ۲
- (۲) -۴
- (۳) -۶
- (۴) ۳

۱۳۳. اگر $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$ و $g(x) = x - \sqrt{x^2-1}$ باشند، آن گاه نمودار تابع $(f.g)(x)$ کدام است؟



۱۳۴. اگر $f(x) = \sqrt{x+4}$ و $g(x) = [x]+3$ باشند، دامنه $(\frac{f}{g})(x)$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - [-3, -2)$
- (۲) $(-4, +\infty) - \{-3\}$
- (۳) $(-4, -3) \cup (-2, +\infty)$
- (۴) $(-4, -3) \cup [-2, +\infty)$

۱۳۵. اگر $h(x) = \begin{cases} x+2 & x \geq 0 \\ 1-x & x < 0 \end{cases}$ و $k(x) = \begin{cases} x^2-1 & x > 0 \\ 3 & x \leq 0 \end{cases}$ باشند، ضابطه تابع $(h-k)(x)$ کدام است؟

- (۱) $\begin{cases} -x^2+x+3 & x \geq 0 \\ -(x+2) & x < 0 \end{cases}$
- (۲) $\begin{cases} -x^2+x+3 & x > 0 \\ 4-x & x \leq 0 \end{cases}$
- (۳) $\begin{cases} x-x^2+1 & x > 0 \\ -x-2 & x < 0 \end{cases}$
- (۴) $\begin{cases} x-x^2+3 & x > 0 \\ -(x+2) & x < 0 \end{cases}$

۱۳۶. اگر $f(x) = \begin{cases} 1-x^2+x & x \geq 1 \\ 5x-4 & x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 2-x & x \geq 3 \\ -7 & x < 3 \end{cases}$ باشند، ضابطه تابع $f+g$ کدام است؟

- (۱) $\begin{cases} 3-x^2 & x \geq 1 \\ 5x-11 & x < 1 \end{cases}$
- (۲) $\begin{cases} 3-x^2 & x \geq 3 \\ 5x-11 & x < 3 \end{cases}$
- (۳) $\begin{cases} -x^2+x-6 & 1 \leq x < 3 \\ 5x-11 & x < 1 \end{cases}$
- (۴) $\begin{cases} 3-x^2 & x \geq 3 \\ 4x-2 & 1 \leq x < 3 \\ 5x-11 & x < 1 \end{cases}$

(کنکور پرفکت)

(مشابه تمرین کتاب درسی)



۱۴۲. اگر $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ تابعی با ضابطه $f(x) = 2x + 1$ و $g = \{(2, 3), (5, 4), (1, 5), (3, -2)\}$ باشند، برد تابع $f \circ g$ چند عضوی است؟

- (۱) ۴
- (۲) ۳
- (۳) ۱
- (۴) صفر

۱۴۳. اگر $f = \{(5, 2), (3, 5), (0, 7), (-4, 11)\}$ و $g = \{(3, -6), (5, 9), (1, 1), (4, 0)\}$ باشند، حاصل $(g \circ f)(3)$ کدام است؟

- (۱) ۲۴
- (۲) ۱۸
- (۳) -۱
- (۴) -۶

۱۴۴. دو تابع $f = \{(1, 2), (0, -1), (3, 1)\}$ و $g = \{(0, 1), (3, 2)\}$ مفروض‌اند. تابع $f \circ g^{-1} + g^{-1} \circ f$ کدام است؟

- (۱) $\{(1, 2)\}$
- (۲) $\{(1, 4)\}$
- (۳) $\{(2, 2), (5, 1)\}$
- (۴) \emptyset

۱۴۵. اگر $f = \{(0, 1), (2, a), (b, -3), (4, 5)\}$ و $f \circ f^{-1} = \{(1, m), (3, 3), (n, n), (k^2 + 4, p)\}$ باشند، مجموع مقادیر مجهول‌ها، به غیر از b کدام است؟

- (۱) ۷ یا ۵
- (۲) ۳ یا ۵
- (۳) ۳ یا ۷
- (۴) ۳ یا ۵ یا ۷

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۴۶. اگر $f = \{(2, 1), (1, 6), (4, 6)\}$ و $g = \{(1, 2), (2, 4), (6, 1)\}$ باشند، آن‌گاه برد تابع $\frac{2f+g}{f \circ g}$ کدام است؟

- (۱) $\{1, \frac{3}{2}\}$
- (۲) $\{1, 14\}$
- (۳) $\{\frac{3}{2}\}$
- (۴) $\{14\}$

۱۴۷. اگر $f(x) = \sqrt{x+2|x|}$ باشد، مقدار $f(f(-144))$ کدام است؟

- (۱) تعریف نشده
- (۲) ۶
- (۳) ۸
- (۴) ۱۲

(تمرین ۸۸)

۱۴۸. اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1$ ، آن‌گاه حاصل $(f \circ g)(1 - \sqrt{2}) - (g \circ f)(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) $4(1 - \sqrt{2})$
- (۲) $4(\sqrt{2} - 1)$
- (۳) ۴
- (۴) $4\sqrt{2}$

(تمرین ۸۹)

۱۴۹. اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$ ، $g(f(a)) = 5$ و آن‌گاه عدد a کدام است؟

- (۱) ۹
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

(تمرین ۹۱)

۱۵۰. در توابع $f(x) = 2x - 5$ و $g = \{(2, 5), (3, 4), (1, 6), (4, 7), (8, 1)\}$ اگر $(f^{-1} \circ g)(a) = 6$ باشد، a کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

(کنکور (یرفائی))

۱۵۱. اگر $f(\frac{1}{x}) = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}$ و $g(x) = 2 \cos^2 x$ باشند، مقدار $(f \circ g)(\frac{\pi}{3})$ کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۴) ۲

(تمرین ۹۰)

۱۵۲. در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & ; x > 3 \\ 2x+3 & ; x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟

- (۱) ۶
- (۲) ۷
- (۳) ۸
- (۴) ۹

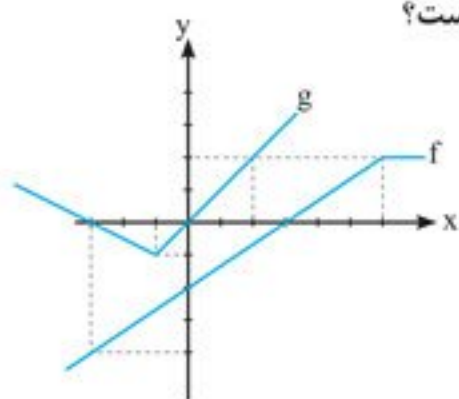
(کنکور (یرفائی))

۱۵۳. اگر $f(x) = [x]$ باشد، مجموعه مقادیر $f(x - f(x))$ کدام است؟

- (۱) $\{0\}$
- (۲) $\{1\}$
- (۳) $\{0, 1\}$
- (۴) $\{-1, 0, 1\}$

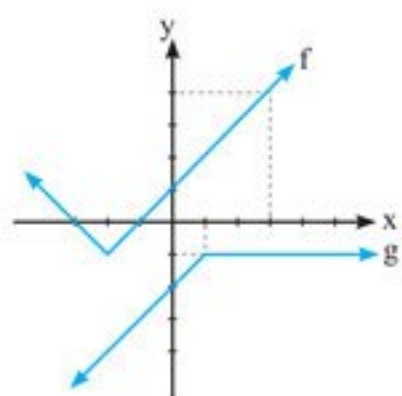
۱۵۴. نمودارهای توابع f و g در دستگاه مختصات زیر رسم شده‌اند. حاصل $(f \circ g)(-3) - (\frac{g}{f})(6)$ کدام است؟

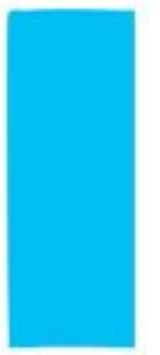
- (۱) ۵
- (۲) ۱
- (۳) -۵
- (۴) -۱



۱۵۵. با توجه به شکل زیر، حاصل $(g \circ f)(17) - f \circ g(-5)$ کدام است؟

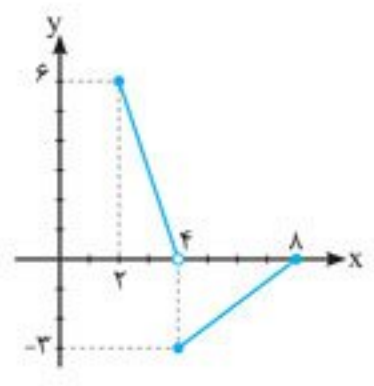
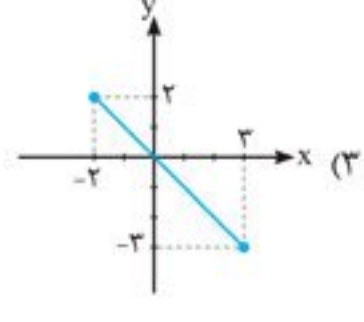
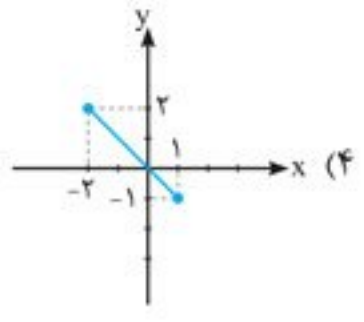
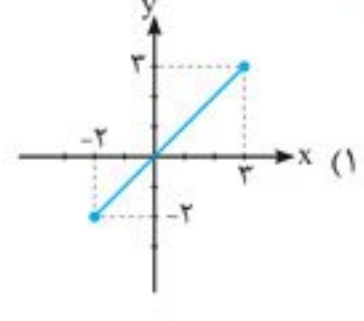
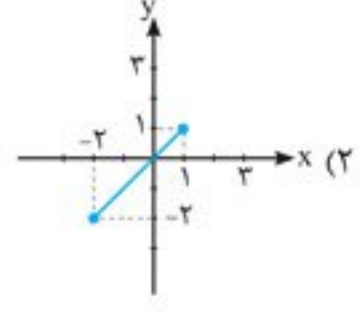
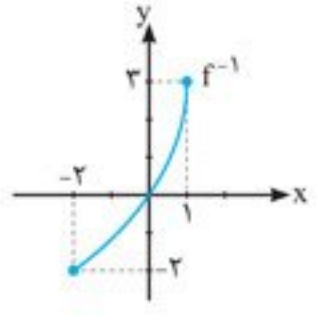
- (۱) -۸
- (۲) -۵
- (۳) ۶
- (۴) ۱۱





۱۹۱. دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + x - 2$ مفروض‌اند؛ اگر $g(f(x)) = -2$ باشد، آن‌گاه مجموعه مقادیر x کدام است؟
 (ریاضی ۸۹) (۴) \emptyset (۳) \mathbb{R} (۲) \mathbb{Z} (۱) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

۱۹۲. نمودار تابع f^{-1} به صورت زیر است. نمودار تابع $y = f^{-1} \circ f(x)$ کدام است؟
 (مشابه تمرین کتاب درسی)



(ریاضی فارغ ۹۶)

۱۹۳. اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، دامنه $g(x) = \frac{f \circ f^{-1}(x)}{f^{-1} \circ f(x)}$ کدام است؟
 (۱) $[2, 6]$
 (۲) $[-3, 6]$
 (۳) $[4, 6]$
 (۴) $[4, 8]$

(۴) $\{0, 1\}$

۱۹۴. اگر $f(x) = x - [x]$ باشد، آن‌گاه برد تابع $g(x) = f(2x - 3) - 2f(x)$ کدام است؟
 (۱) $[-1, 0]$ (۲) $[0, 1]$ (۳) $\{-1, 0\}$

۱۹۵. ماشین $x \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow x$ و تابع $f(x) = 2x - 1$ مفروض‌اند. $g(0)$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) صفر (۳) $\frac{1}{2}$

(۴) ۲

(کنکور (پرشاکی))

۱۹۶. اگر خروجی ماشین شکل مقابل برای ورودی ۲، برابر ۵- باشد، A کدام است؟

خروجی $\rightarrow \sqrt{x - 2x - 4} \rightarrow 2x + A \rightarrow$ ورودی

(۴) $\frac{15}{4}$

(۳) ۳

(۲) -۳

(۱) $-\frac{15}{4}$

(ریاضی ۸۶)

۱۹۷. اگر خروجی ماشین مقابل $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟

خروجی $\rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} \rightarrow 2x - 2 \rightarrow$ ورودی

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) $\frac{7}{2}$

(۱) $\frac{11}{9}$

(تمرین فارغ ۹۱)

۱۹۸. اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $x \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow 2x$ و $g(x) = 3x + 4$ باشند، آن‌گاه مقدار $f(5)$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۹۹. اگر $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 4x + 7$ و $g(x) = 2x + 1$ باشند، $f(x)$ کدام است؟

(۴) $2x^2 + 6$

(۳) $4x^2 - 8x$

(۲) $x^2 + 6$

(۱) $2x^2 + 6x$

(ریاضی ۹۱)

۲۰۰. اگر $g(x) = 2x - 1$ و $(f \circ g)(x) = \frac{x}{x-3}$ باشند، مقدار $f(3)$ کدام است؟
 (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

(تمرین ۹۰)

۲۰۱. اگر $f(x - 3) = x^2 - 4x + 5$ باشند، آن‌گاه $f(1 - x)$ کدام است؟

(۴) $x^2 - 4x + 5$

(۳) $x^2 + 4x + 5$

(۲) $x^2 + 3$

(۱) $x^2 + 1$



آزمون پایانی فصل دوم

مدت زمان پیشنهادی: ۲۵ دقیقه

۱. تابع $y = \sqrt{9-x^2}$ با کدام یک از توابع زیر برابر است؟

$x\sqrt{\frac{9-x^2}{x^2}}$ (۴)
 $\sqrt[4]{(9-x^2)^2}$ (۳)
 $\sqrt[3]{(x-3)^5(3+x)^5}$ (۲)
 $\sqrt[4]{(9-x^2)^4}$ (۱)

۲. دامنه تابع $f(x) = \frac{-2x+5}{x^2+(m-2)x+2-m}$ فاقد تنها دو عدد حقیقی غیرهم علامت است. حدود m کدام است؟

$(2, +\infty)$ (۴)
 $[-2, +\infty)$ (۳)
 $\mathbb{R} - (-2, 2)$ (۲)
 $\mathbb{R} - [-2, 2]$ (۱)

۳. مجموعه جواب معادله $2[x] + [-4-x] + 1 = 0$ زیرمجموعه کدام گزینه است؟

$[4, 5) \cup \{3\}$ (۴)
 $[4, 5)$ (۳)
 $[3, 5)$ (۲)
 $(4, 5) \cup \{3\}$ (۱)

۴. اگر $R_f = [0, +\infty)$ باشد، برد تابع $y = \frac{2f(x)-3}{f(x)+3}$ کدام است؟

$[-1, 2)$ (۴)
 $(-3, 0]$ (۳)
 $[-1, 2)$ (۲)
 $[0, 2)$ (۱)

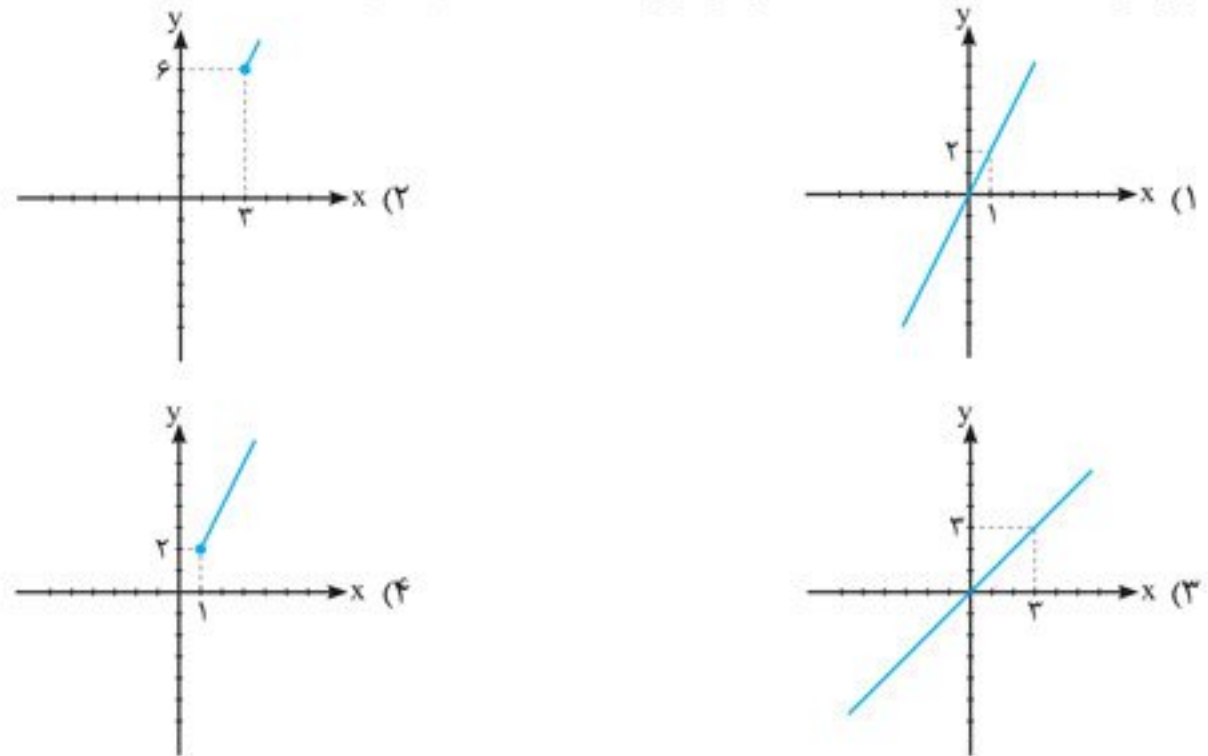
۵. اگر $f(x) = x-1$ و $g(x) = \begin{cases} x^2-1 & ; x \geq 0 \\ 2x-2 & ; x < 0 \end{cases}$ باشند، تابع $(g \circ f)(x)$ محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟

-2 (۴)
 2 (۳)
 -1 (۲)
 1 (۱)

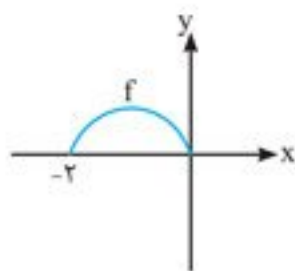
۶. f و g توابعی چند جمله ای هستند، به طوری که $(f+g)(x) = 4$ و $(f \circ g)(x) = 7-4x$ می باشند، حاصل جمع مقادیر ممکن برای $g(2)$ کدام است؟

-7 (۴)
 5 (۳)
 -2 (۲)
 2 (۱)

۷. با فرض آن که $f(x) = 4\sqrt{x-1} + 3$ ، نمودار تابع $y = 2f(f^{-1}(x))$ کدام است؟



۸. اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت شکل زیر باشد، دامنه تابع $g(x) = \frac{f(1-x)}{f(-x)}$ کدام است؟



$[1, 2)$ (۱)
 $(0, 2)$ (۲)
 $(1, 2]$ (۳)
 $[1, 3]$ (۴)

۹. دو تابع $f = \{(3, 2x-1), (2, 7)\}$ و $g = \{(3x-6, -1), (-5, 1)\}$ مفروض اند. اگر $(-1, 3) \in (g \circ f)^{-1}$ باشد، مقدار x کدام است؟

3 (۴)
 -1 (۳)
 -2 (۲)
 5 (۱)

۱۰. دامنه تابع $\frac{\sqrt{|x|}-5}{4-x^2}$ شامل چند عدد طبیعی نیست؟

2 (۴)
 3 (۳)
 4 (۲)
 5 (۱)



۱۱. تابع $f(x) = |2x - 1| + |3 - x|$ در بازه‌ای بر نیمساز ربع دوم و چهارم عمود است. ضابطه وارون آن در این بازه کدام است؟

- (۱) $\frac{4-x}{3}, x \in [\frac{5}{3}, +\infty)$ (۲) $x - 2, x \in [\frac{5}{3}, 5]$ (۳) $\frac{4-x}{3}, x \in (-\infty, \frac{1}{3})$ (۴) $x - 2, x \in [\frac{1}{3}, 3]$

۱۲. اگر $g(x) = 2x - 1$ و $(f \circ g)(x) = \frac{x}{x-3}$ باشند، مقدار $f(3)$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۳. اگر $f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 1 \\ x^2 & ; x < 1 \end{cases}$ باشد، دامنه تابع $f \circ f$ کدام است؟

- (۱) \mathbb{R} (۲) $\mathbb{R} - \{1\}$ (۳) $(-\infty, 1)$ (۴) $(-\infty, 1) - \{-1\}$

۱۴. اگر $f(x) = |x| - x$ و $g(x) = x + |x + 1|$ باشند، ضابطه معکوس تابع $g \circ f$ کدام است؟

- (۱) $\frac{x+1}{3}, |x| > 1$ (۲) $\frac{x-1}{3}, |x| < 1$ (۳) $\frac{x+1}{3}, |x| < 1$ (۴) معکوس ناپذیر

۱۵. اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; x \geq 0 \\ 2-x & ; x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 2x-3 & ; x \geq 1 \\ -x & ; x < 1 \end{cases}$ باشند، ضابطه $g \circ f$ کدام است؟

- (۱) $\begin{cases} 4x-1 & ; x \geq 0 \\ -2x+1 & ; x < 0 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} 4x-1 & ; x \geq 1 \\ -2x+1 & ; x > 1 \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} 4x-1 & ; x \geq 0 \\ x+1 & ; x < 0 \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} -2x-1 & ; x \geq 1 \\ x-2 & ; x < 1 \end{cases}$

برای مشاهده محتوای افزوده این کتاب شامل آزمون‌های آنلاین، پاسخنامه تشریحی و فایل‌های مالتی‌مدیا می‌توانید رمزینته زیر را اسکن نمایید.



Lined writing area for student answers.

پاسخنامه کلیدی

۱	.۲۱۱	۱	.۱۷۶	۱	.۱۴۱	۴	.۱۰۶	۱	.۷۱	۱	.۳۶	۳	.۱
۳	.۲۱۲	۱	.۱۷۷	۲	.۱۴۲	۱	.۱۰۷	۲	.۷۲	۴	.۳۷	۲	.۲
۱	.۲۱۳	۳	.۱۷۸	۱	.۱۴۳	۱	.۱۰۸	۴	.۷۳	۲	.۳۸	۳	.۳
۱	.۲۱۴	۱	.۱۷۹	۱	.۱۴۴	۱	.۱۰۹	۳	.۷۴	۱	.۳۹	۱	.۴
۴	.۲۱۵	۴	.۱۸۰	۱	.۱۴۵	۴	.۱۱۰	۲	.۷۵	۴	.۴۰	۴	.۵
۲	.۲۱۶	۱	.۱۸۱	۲	.۱۴۶	۳	.۱۱۱	۲	.۷۶	۴	.۴۱	۱	.۶
۱	.۲۱۷	۱	.۱۸۲	۲	.۱۴۷	۴	.۱۱۲	۲	.۷۷	۴	.۴۲	۲	.۷
۴	.۲۱۸	۳	.۱۸۳	۲	.۱۴۸	۱	.۱۱۳	۲	.۷۸	۱	.۴۳	۲	.۸
۳	.۲۱۹	۱	.۱۸۴	۴	.۱۴۹	۴	.۱۱۴	۲	.۷۹	۴	.۴۴	۴	.۹
۱	.۲۲۰	۲	.۱۸۵	۴	.۱۵۰	۱	.۱۱۵	۳	.۸۰	۱	.۴۵	۱	.۱۰
۲	.۲۲۱	۱	.۱۸۶	۳	.۱۵۱	۲	.۱۱۶	۲	.۸۱	۴	.۴۶	۱	.۱۱
۲	.۲۲۲	۴	.۱۸۷	۴	.۱۵۲	۳	.۱۱۷	۱	.۸۲	۳	.۴۷	۳	.۱۲
۲	.۲۲۳	۲	.۱۸۸	۱	.۱۵۳	۲	.۱۱۸	۳	.۸۳	۳	.۴۸	۳	.۱۳
۲	.۲۲۴	۳	.۱۸۹	۳	.۱۵۴	۱	.۱۱۹	۴	.۸۴	۱	.۴۹	۲	.۱۴
۲	.۲۲۵	۴	.۱۹۰	۲	.۱۵۵	۲	.۱۲۰	۳	.۸۵	۲	.۵۰	۴	.۱۵
۴	.۲۲۶	۳	.۱۹۱	۲	.۱۵۶	۱	.۱۲۱	۳	.۸۶	۴	.۵۱	۳	.۱۶
۳	.۲۲۷	۱	.۱۹۲	۴	.۱۵۷	۲	.۱۲۲	۱	.۸۷	۲	.۵۲	۴	.۱۷
آزمون پایان فصل		۱	.۱۹۳	۳	.۱۵۸	۲	.۱۲۳	۳	.۸۸	۱	.۵۳	۲	.۱۸
		۳	.۱۹۴	۴	.۱۵۹	۴	.۱۲۴	۱	.۸۹	۳	.۵۴	۲	.۱۹
۳	.۱	۳	.۱۹۵	۳	.۱۶۰	۳	.۱۲۵	۴	.۹۰	۲	.۵۵	۴	.۲۰
۴	.۲	۲	.۱۹۶	۲	.۱۶۱	۲	.۱۲۶	۱	.۹۱	۱	.۵۶	۳	.۲۱
۱	.۳	۳	.۱۹۷	۲	.۱۶۲	۳	.۱۲۷	۳	.۹۲	۲	.۵۷	۲	.۲۲
۴	.۴	۲	.۱۹۸	۲	.۱۶۳	۳	.۱۲۸	۳	.۹۳	۲	.۵۸	۱	.۲۳
۳	.۵	۲	.۱۹۹	۲	.۱۶۴	۱	.۱۲۹	۳	.۹۴	۲	.۵۹	۳	.۲۴
۱	.۶	۲	.۲۰۰	۲	.۱۶۵	۳	.۱۳۰	۳	.۹۵	۳	.۶۰	۲	.۲۵
۲	.۷	۴	.۲۰۱	۱	.۱۶۶	۱	.۱۳۱	۳	.۹۶	۲	.۶۱	۳	.۲۶
۱	.۸	۳	.۲۰۲	۳	.۱۶۷	۲	.۱۳۲	۱	.۹۷	۲	.۶۲	۱	.۲۷
۱	.۹	۳	.۲۰۳	۴	.۱۶۸	۲	.۱۳۳	۲	.۹۸	۳	.۶۳	۴	.۲۸
۲	۱۰	۴	.۲۰۴	۳	.۱۶۹	۴	.۱۳۴	۲	.۹۹	۱	.۶۴	۲	.۲۹
۲	.۱۱	۴	.۲۰۵	۲	.۱۷۰	۴	.۱۳۵	۳	۱۰۰	۲	.۶۵	۲	.۳۰
۲	.۱۲	۱	.۲۰۶	۴	.۱۷۱	۳	.۱۳۶	۲	.۱۰۱	۳	.۶۶	۲	.۳۱
۴	.۱۳	۲	.۲۰۷	۱	.۱۷۲	۳	.۱۳۷	۳	.۱۰۲	۲	.۶۷	۳	.۳۲
۴	.۱۴	۱	.۲۰۸	۴	.۱۷۳	۳	.۱۳۸	۳	.۱۰۳	۲	.۶۸	۳	.۳۳
۱	.۱۵	۳	.۲۰۹	۳	.۱۷۴	۱	.۱۳۹	۳	.۱۰۴	۱	.۶۹	۱	.۳۴
		۴	.۲۱۰	۳	.۱۷۵	۳	.۱۴۰	۲	.۱۰۵	۲	.۷۰	۳	.۳۵

پاسخ‌نامه تشریحی

۱. ۱ ۲ ۳ ۴

گزینه ۱: هر بازه شامل برد تابع، هم‌دامنه تابع به حساب می‌آید. پس نتیجه می‌گیریم هر تابع می‌تواند بی‌شمار هم‌دامنه داشته باشد اما برد تابع منحصر به فرد است. (خروجی تابع به ازای ورودی آن، مشخص و منحصر به فرد است.)

گزینه ۲: با توجه به این که برد تابع، زیرمجموعه هم‌دامنه تابع است، تعداد اعضای آن کوچک‌تر (یا حداکثر مساوی) تعداد اعضای هم‌دامنه است.

گزینه ۳: برای معرفی و مشخص کردن هر تابع باید دامنه، هم‌دامنه و ضابطه آن مشخص باشد.

گزینه ۴: دقیقاً تعریف تابع است.

۲. ۱ ۲ ۳ ۴

دامنه و برد تابع (به کمک نمودار) $R_f = [0, 9]$ و $D_f = [0, 3]$ می‌باشد. پس گزینه ۱ و ۳ به دلیل این که دامنه را درست نشان نمی‌دهند، رد می‌شوند. هم‌دامنه تابع باید شامل برد تابع باشد، پس گزینه ۴ هم رد می‌شود.

۳. ۱ ۲ ۳ ۴

دامنه تابع، طبق آنچه در صورت سؤال قید شده $\{0\} - [-2, 7]$ است که شامل عدد ۷ و صفر نمی‌شود، پس گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ با توجه به دامنه رد می‌شوند.

۴. ۱ ۲ ۳ ۴

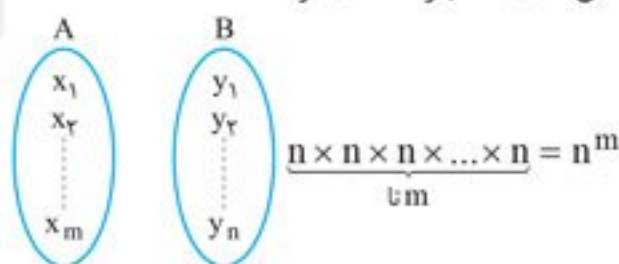
در گزینه ۱ برد تابع $[0, +\infty)$ است اما هم‌دامنه تابع (یعنی \mathbb{R}^+) شامل عدد صفر نمی‌شود، هم‌چنین دامنه تابع $[0, +\infty)$ است که با \mathbb{R}^+ متفاوت می‌باشد.

در سایر گزینه‌ها دامنه و ضابطه تابع درست ارائه شده‌اند و برد تابع نیز زیرمجموعه هم‌دامنه داده شده است.

۵. ۱ ۲ ۳ ۴

نکته: اگر A مجموعه‌ای m عضوی و B مجموعه‌ای n عضوی باشند n^m تابع از A به B می‌توان تعریف کرد.

طبق تعریف، تابع رابطه‌ای است که از هر عضو A ، فقط و فقط یک پیکان به سمت عضوی از B خارج می‌شود. به ازای هر عضو A ، n انتخاب برای خروج پیکان وجود دارد. مجموعه A دارای m عضو است، بنابراین طبق اصل ضرب، کل حالات عبارت است از:



۶. ۱ ۲ ۳ ۴

رابطه R به صورت مقابل می‌باشد:

برای این که رابطه فوق یک تابع باشد، از زوج مرتب‌های شامل مولفه اول برابر ۱ باید حداقل ۴ تا و از زوج مرتب‌های شامل مولفه اول برابر ۲

باید حداقل ۲ تا حذف شوند تا زوج مرتبی با مولفه اول یکسان باقی نماند که در مجموع $4 + 2 = 6$ تا می‌شود.

۷. ۱ ۲ ۳ ۴

ورودی این ماشین (تابع) \sqrt{x} است، بنابراین:

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \\ \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(1) \stackrel{x=1}{=} \sqrt{1} + 1 = 2 \\ f(2) \stackrel{x=4}{=} \sqrt{4} + 4 = 6 \end{cases}$$

$$f(1) + f(2) = 2 + 6 = 8$$

۸. ۱ ۲ ۳ ۴

طبق توضیح مسئله، ضابطه تابع g به صورت مقابل است:

$$g(x) = \frac{1-x^2}{2}$$

$$-4 = \frac{1-a^2}{2} \Rightarrow -8 = 1 - a^2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

خروجی این تابع به ازای ورودی a برابر (-4) شده، در نتیجه:

بنابراین گزینه «۲» پاسخ مسئله است.

ورودی تابع x و خروجی آن $x^3 - 81x$ است که برابر صفر می‌باشد. پس:

$$x^3 - 81x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 81) = 0 \Rightarrow x(x-9)(x+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 9 \\ x = -9 \end{cases}$$

بنابراین ورودی این ماشین (تابع) می‌تواند هریک از مقادیر فوق باشد.

۲۵۶ وارد این ماشین می‌شود و خروجی برابر ۱۶ می‌دهد.

$$\sqrt{2} \rightarrow \text{بار سوم} \rightarrow 2 \rightarrow \text{بار دوم} \rightarrow 4 \rightarrow \text{بار اول} \rightarrow 16$$

دقت کنید که ورود عدد ۱۶ (به عنوان اولین خروجی) به ماشین، مرتبه اول به حساب می‌آید.

(-۶) عددی منفی است، پس از آن قدرمطلق گرفته و ۳ واحد به حاصل اضافه می‌شود:

$$|-6| + 3 = 9$$

حال این عدد (۹) مجدداً وارد این ماشین (تابع) می‌شود و چون عددی نامنفی است، مطابق با دستور داده شده در صورت سؤال داریم:

$$\sqrt{(9-1)^2} = \sqrt{64} = \sqrt{4^2} = 4$$

گزینه ۱: $(\frac{1}{x} = \text{ورودی}) \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \text{خروجی} = \frac{2+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$

گزینه ۲: $(x-1 = \text{ورودی}) \Rightarrow x-1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{خروجی} = 2 \times \frac{3}{2} = 3$

گزینه ۳: $(3x = \text{ورودی}) \Rightarrow 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{6} \Rightarrow \text{خروجی} = 6(\frac{1}{6}) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

گزینه ۴: $(\frac{x}{4} = \text{ورودی}) \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \text{خروجی} = \sqrt{4(2)+1} = \sqrt{9} = 3$

خروجی ماشین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) به ازای ورودی $\frac{1}{2}$ برابر ۳ است اما خروجی ماشین گزینه (۳) به ازای ورودی $\frac{1}{2}$ برابر $\frac{3}{2}$ است.

$x = \frac{\pi}{4}$ را در عبارت داده شده جای گذاری می‌کنیم:

$$\frac{f(\frac{\pi}{4})}{\cos \frac{\pi}{4}} + \frac{f(-\frac{\pi}{4})}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2 \Rightarrow \frac{f(\frac{\pi}{4})}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{f(-\frac{\pi}{4})}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 \xrightarrow{\times(\frac{\sqrt{2}}{2})} f(\frac{\pi}{4}) + f(-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$$

باتوجه به خواسته مسئله، $x = 4$ را در عبارت داده شده جای گذاری می‌کنیم:

$$f(4) = 6f(2) + f(3) = 6(2) + f(3) = 12 + f(3)$$

مشاهده می‌شود که به مقدار $f(3)$ نیاز است، بنابراین $x = 3$ را در عبارت داده شده جای گذاری می‌کنیم:

$$f(3) = 6f(1) + f(2) = 6(1) + 2 = 8$$

$$f(4) = 12 + 8 = 20$$

بنابراین داریم:

$$x^3 - x = 0$$

با مقایسه زوج مرتب اول دو تابع، به این نتیجه می‌رسیم که:

$$x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

بنابراین:

$x = 1$ غیرقابل قبول است چون در این صورت f به خاطر برخورداری از $(1, 7)$ و $(1, -5)$ دیگر تابع نخواهد بود.

$x = 0$ نیز غیرقابل قبول است چون در این صورت تابع f مؤلفه دومی برابر ۶ نخواهد داشت، درحالی‌که تابع g چنین مؤلفه دومی دارد. بنابراین

$$f = \{(2, 0), (1, 7), (-1, -5), (-3, 6), (11, -9)\}$$

فقط $x = -1$ قابل قبول است و به ازای آن تابع f به صورت روبه‌رو خواهد بود:

$$g = \{(2, 0), (y+3, 6), (t, -9), (1, 7), (-1, z)\}$$

حال f را با تابع g مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases} y+3 = -3 \Rightarrow y = -6 \\ t = 11 \\ z = -5 \end{cases}$$

$$x+y+z+t = (-1) + (-6) + (-5) + 11 = -1$$



روش اول:

$$\begin{aligned} (\Delta n + 1)^2 &= 2\Delta n^2 + 1 \cdot n + 1 \\ (\Delta n)^2 &< 2\Delta n^2 + 1 \cdot n < (\Delta n + 1)^2 \\ \Delta n &< \sqrt{2\Delta n^2 + 1 \cdot n} < \Delta n + 1 \\ \lfloor \sqrt{2\Delta n^2 + 1 \cdot n} \rfloor &= \Delta n \\ \lfloor \sqrt{2\Delta n^2 + 1 \cdot n} \rfloor &= \lfloor \sqrt{25} \rfloor \\ 5 < \sqrt{25} < 6 &\Rightarrow \lfloor \sqrt{25} \rfloor = 5 \end{aligned}$$

روش دوم: یک عدد طبیعی دلخواه مثل $n = 1$ را جای گذاری می کنیم:

از طرفی $\sqrt{25} < \sqrt{35} < \sqrt{36}$ قرار دارد، پس:

$n = 1$ را داخل گزینه ها جای گذاری می کنیم، فقط حاصل گزینه ۲ برابر ۵ می شود.

روش اول: می دانیم:

بنابراین:

در نتیجه:

ضمناً می دانیم:

بنابراین:

در نتیجه:

$$\begin{aligned} (n-1)^2 &= n^2 - 2n + 1 \\ (n-2)^2 &< n^2 - 2n < (n-1)^2 \\ n-2 &< \sqrt{n^2 - 2n} < n-1 \Rightarrow \lfloor \sqrt{n^2 - 2n} \rfloor = n-2 \\ (2n-1)^2 &= 4n^2 - 4n + 1 \\ (2n-1)^2 &< 4n^2 - 2n + 1 < (2n)^2 \\ (2n-1) &< \sqrt{4n^2 - 2n + 1} < 2n \Rightarrow \lfloor \sqrt{4n^2 - 2n + 1} \rfloor = 2n-1 \\ \Rightarrow (2n-1) - 2(n-2) &= 2n-1-2n+4=3 \end{aligned}$$

روش دوم: به روش عدد گذاری نیز می توان این مسئله را حل کرد:

یک عدد طبیعی دلخواه (البته بزرگ تر از ۲) مانند $n = 3$ را انتخاب می کنیم:

$$\lfloor \sqrt{4(9) - 2(3) + 1} \rfloor - 2 \lfloor \sqrt{9 - 6} \rfloor = \lfloor \sqrt{28} \rfloor - 2 \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 5 - 2(1) = 3$$

باتوجه به این که $[x] + [-x]$ زیر رادیکال با فرجه زوج قرار دارد:

پس نتیجه می شود $x \in \mathbb{Z}$ ، بنابراین

$$[U] + [-U] = \begin{cases} 0 & ; U \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; U \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad [x] + [-x] \geq 0 \\ D_g = \mathbb{Z}$$

مخرج را مساوی صفر قرار می دهیم:

می دانیم ریشه های معادله فوق، تمام اعداد غیر صحیح هستند، بنابراین:

$$[x] + [-x] + 1 = 0 \Rightarrow [x] + [-x] = -1 \\ D_f = \mathbb{Z}$$

$x - [x]$ زیر رادیکال با فرجه زوج، در مخرج کسر قرار دارد، بنابراین:

$$x - [x] > 0 \Rightarrow x > [x]$$

تمام اعداد صحیح با جزء صحیح شان برابرند و تمام اعداد غیر صحیح (چه منفی و چه مثبت) از جزء صحیح شان بزرگ ترند، بنابراین اعداد غیر صحیح دامنه تابع f هستند.

$$D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

راهبرد ۴

وقتی x داخل براکت، ضریب طبیعی غیر یک داشته باشد، از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{(n \geq 2)}{(n \in \mathbb{N})} \rightarrow [nx] &= [x] + [x + \frac{1}{n}] + [x + \frac{2}{n}] + \dots + [x + \frac{n-1}{n}] \\ [2x] &= [x] + [x + \frac{1}{2}] \quad \text{یا} \quad [3x] = [x] + [x + \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}] \end{aligned}$$

به عنوان مثال داریم:

$$[x] + [x + \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}] = [3x] \Rightarrow f(x) = \sqrt{[3x] - 15}$$

طبق راهبرد فوق تابع را بازنویسی می کنیم:

$$[3x] - 15 \geq 0 \Rightarrow [3x] \geq 15 \Rightarrow 3x \geq 15 \Rightarrow x \geq 5$$

باید زیر رادیکال مقداری نامنفی باشد، یعنی:



مهرماه