

توابع گویا

تعریف تابع گویا تابعی است که ضابطه‌اش را بتوان به صورت $f(x) = \frac{p(x)}{g(x)}$ نوشت به طوری که $p(x)$ و $g(x)$ دو تابع چندجمله‌ای باشند و $g(x) \neq 0$ (یعنی $g(x)$ چندجمله‌ای صفر نباشد).

مثلاً توابع $y = \frac{x-2}{x+1}$ و $y = \frac{\sqrt{3}}{x+5}$ و $y = 5x^2$ نمونه‌هایی از توابع گویا هستند.

دامنه توابع گویا

دامنه تابع گویا با ضابطه $f(x) = \frac{p(x)}{g(x)}$ برابر مجموعه اعداد حقیقی است، به جز ریشه‌های مخرج کسر. به بیان دیگر:

$$D_f = \mathbb{R} - \{x \mid g(x) = 0\}$$

مثال دامنه هر یک از توابع گویای زیر را به دست آورید.

الف $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-3x}$

ب $g(x) = \sqrt{2}x$

ج $h(x) = \frac{\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x-2}}$

پاسخ باید ریشه‌های مخرج را به دست آوریم و از $\mathbb{R}$ حذف کنیم:

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 3$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, 3\} = (-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$$

ب اگر تابع $g(x) = \sqrt{2}x$ را به صورت $g(x) = \frac{\sqrt{2}x}{1}$ بنویسیم، می‌بینیم مخرج کسر هیچ‌وقت صفر نمی‌شود $1 \neq 0$ ، پس دامنه تابع کل مجموعه اعداد حقیقی است، یعنی $D_g = \mathbb{R}$.

ج در این تابع باید $x \neq 2$ باشد (به دلیل وجود $\frac{1}{x-2}$) و نیز $x \neq 0$ باشد (به دلیل وجود $\frac{1}{x}$) هم‌چنین باید $2 - \frac{1}{x-2} \neq 0$ یعنی:

$$2 \neq \frac{1}{x-2} \Rightarrow 2x - 4 \neq 1 \Rightarrow 2x \neq 5 \Rightarrow x \neq \frac{5}{2}$$

پس دامنه این تابع برابر است با:

$$D_h = \mathbb{R} - \{0, 2, \frac{5}{2}\}$$

نکته در توابع گویا صورت و مخرج کسر با هم ساده می‌شوند. ولی قبل از تعیین دامنه تابع مجاز به ساده کردن صورت و مخرج نیستیم، چون ممکن است مقداری که تابع را تعریف نشده می‌کنند از بین بروند.

مثلاً در تابع گویای $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-2x}$ اگر ابتدا تابع را ساده کنیم و سپس دامنه را بیابیم، داریم:

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{x\cancel{(x-2)}} = \frac{x+2}{x} \xrightarrow[\text{ریشه مخرج}]{x=0} D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

دامنه به دست آمده غلط است، چون $x=2$ مخرج تابع $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-2x}$ را صفر می‌کند و تابع به ازای این مقدار تعریف نشده است. وقتی تابع را ساده کردیم، این مقدار از بین رفت. پس دامنه اصلی تابع به صورت زیر است:

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

مثال دامنه توابع گویای زیر را به دست آورید.

الف $f(x) = \frac{(3x+1)}{(3x+1)(x-2)}$

ب $g(x) = \frac{|x-1|}{|x-1|}$

پاسخ الف) باید ریشه‌های مخرج را به دست آوریم و از $\mathbb{R}$ حذف کنیم:

$$(3x+1)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x+1=0 \rightarrow x=-\frac{1}{3} \\ \text{یا} \\ x-2=0 \rightarrow x=2 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{3}, 2\}$$

همانند قسمت (الف) ریشه مخرج را به دست می‌آوریم و از $\mathbb{R}$ حذف می‌کنیم: $|x-1|=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

مثال اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x+3}{x^2+ax+b}$ برابر $\mathbb{R} - \{-2\}$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

پاسخ با توجه به دامنه داده شده، ریشه مخرج کسر فقط باید -2 باشد. چون مخرج یک عبارت درجه ۲ است، در صورتی فقط یک ریشه دارد که آن ریشه مضاعف باشد، پس -2 در واقع ریشه مضاعف مخرج است. یعنی مخرج را می‌توان به صورت $(x+2)^2$ نوشت. پس:

$$x^2+ax+b=(x+2)^2=x^2+4x+4 \Rightarrow a=4, b=4 \Rightarrow a+b=8$$

مثال اگر دامنه تابع $g(x) = f(x+1)$ باشد، در این صورت دامنه تابع $f(x) = \frac{5x^2+3x}{ax^2+bx+c}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، در این صورت دامنه تابع $g(x) = f(x+1)$ کدام است؟

پاسخ چون دامنه تابع گویای $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است، پس مخرج کسر فاقد ریشه است. با تشکیل تابع $f(x+1)$ داریم:

$$g(x) = f(x+1) = \frac{5(x+1)^2+3(x+1)}{a(x+1)^2+b(x+1)+c}$$

می‌توان گفت مخرج این تابع نیز ریشه ندارد، چون اگر مخرج تابع $g(x)$ ریشه‌ای مانند x_1 داشته باشد، آن گاه $a(x_1+1)^2+b(x_1+1)+c=0$ و این بدین معنی است که (x_1+1) ریشه مخرج کسر $f(x)$ است که متناقض با فرض اولیه است. پس مخرج تابع $g(x)$ نیز فاقد ریشه بوده و دامنه این تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

مثال نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2-4}{2x-4}$ را رسم کنید.

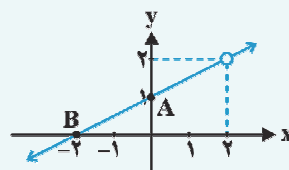
پاسخ ابتدا دامنه تابع را پیدا می‌کنیم و سپس تابع را ساده کرده و نمودار را رسم می‌کنیم به صورت زیر:

$$2x-4=0 \rightarrow x=2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$f(x) = \frac{x^2-4}{2x-4} = \frac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)} = \frac{1}{2}(x+2)$$

در واقع تابع داده شده یک تابع خطی است با دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$ که به راحتی می‌توان با تعیین دو نقطه دلخواه از آن نمودار را رسم کرد.

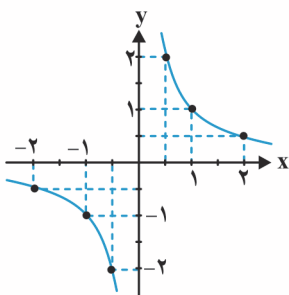
$$f(x) = \frac{1}{2}(x+2) \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y=1 \Rightarrow A \\ x=-2 \rightarrow y=0 \Rightarrow B \end{cases}$$



نمودار تابع گویای $f(x) = \frac{1}{x}$

نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ با دامنه و برد $\mathbb{R} - \{0\}$ به صورت مقابل است:

چند ویژگی نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$

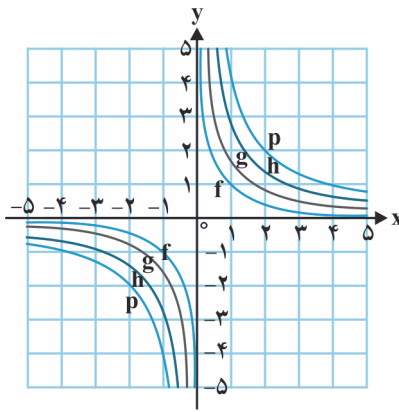


□ دامنه تابع $D = \mathbb{R} - \{0\}$ و برد تابع $R = \mathbb{R} - \{0\}$ است.

□ نمودار تابع محور x ها را قطع نمی‌کند، چون به ازای هیچ مقدار x تابع $y = \frac{1}{x}$ برابر صفر نمی‌شود.

□ نمودار تابع محور y ها را قطع نمی‌کند، چون $x=0$ عضو دامنه نیست تا به ازای آن نمودار با محور y ها برخورد کند.

نمودار تابع گویی $f(x) = \frac{k}{x} \quad (k \in \mathbb{Z})$



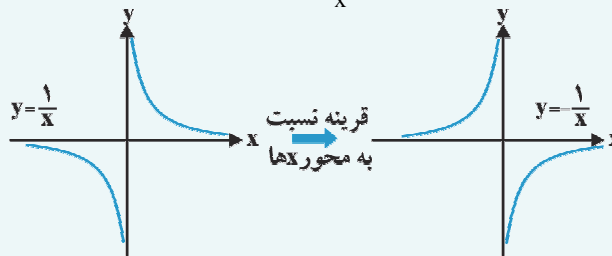
نمودار توابع $g(x) = \frac{2}{x}$ و $h(x) = \frac{3}{x}$ و $p(x) = \frac{4}{x}$ و... همانند تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ است با این تفاوت که هر چه صورت کسر بزرگتر می‌شود، انحنای منحنی کم‌تر می‌شود. مطابق شکل مقابل:

مثال نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف $f(x) = -\frac{1}{x}$

ب $g(x) = \frac{1+2x}{x}$

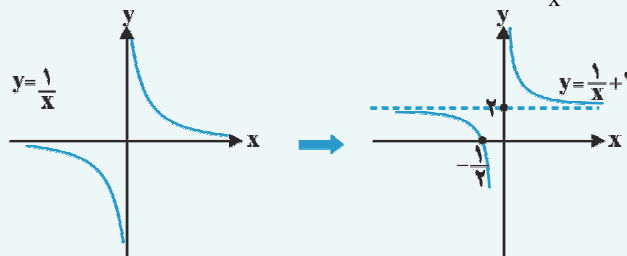
پاسخ **الف** برای رسم نمودار این تابع کافی است نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم، به صورت زیر:



$$g(x) = \frac{1+2x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x} = \frac{1}{x} + 2$$

ب ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

برای رسم این تابع کافی است نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را در امتداد محور y ها دو واحد به طرف بالا ببریم:



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. تابع $f(x) = \frac{2}{x+2}$ با برد $\{-1, 1, 2\}$ دارای چه دامنه‌ای است؟

- (۱) $\{-4, 0, -1\}$ (۲) $\{1, 3, 4\}$ (۳) $\{2, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\}$ (۴) $\{-3, -1, 0\}$

۲. اگر $f(x) = \frac{2x^2+2}{x^2-3}$ باشد، مقدار $f(2-\sqrt{3})$ کدام است؟

- (۱) $1-\sqrt{3}$ (۲) $-2+\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $1+\sqrt{3}$

۳. **مسئله** اگر $f(x) = \frac{x^3-8}{x^2+2x+4}$ ، آن‌گاه حاصل $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)$ کدام است؟

- (۱) -10 (۲) -8 (۳) -6 (۴) -4

۴. تابع $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ مفروض است. اگر $f(a)+f(b)=0$ ، آن‌گاه کدام درست است؟

- (۱) $a=-b$ (۲) $ab=1$ (۳) $ab=-1$ (۴) $a=\sqrt{b}$

۵. در یک رودخانه، هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی با ضابطه $p(x) = \frac{700x}{1000-x}$ محاسبه می‌شود (برحسب میلیون تومان). با ۳۰۰ میلیون تومان، چند درصد از رودخانه پاک‌سازی می‌شود؟

(کتاب درسی)

(۴) ۹۰

(۳) ۷۰

(۲) ۵۰

(۱) ۳۰

۶. میزان رطوبت یک شهر، t ساعت پس از باران برابر با $f(t) = \frac{24t}{t^2 + 2}$ است. در چه زمانی پس از باران، میزان رطوبت بیش از ۰/۰۸ است؟

(کتاب درسی)

(۴) در دو ساعت دوم

(۳) در ساعت دوم

(۲) در دو ساعت اول

(۱) در ساعت اول

۷. دامنه تابع $f(x) = \frac{5-x}{x+1}$ کدام است؟

(۴) $\mathbb{R} - \{\frac{5}{2}\}$

(۳) $\mathbb{R} - \{5\}$

(۲) $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$

(۱) $\mathbb{R}$

۸. **مسئله** تابع $f(x) = \frac{1}{3x^2 - mx + 12}$ به ازای چه مقادیری از m همواره تعریف شده است؟

(۴) $|m| < 16$

(۳) $|m| < 3$

(۲) $|m| < 12$

(۱) $|m| < 6$

۹. **مسئله** اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + a}$ به صورت $\mathbb{R} - \{b\}$ باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟

(۴) $\frac{7}{2}$

(۳) $\frac{5}{2}$

(۲) $\frac{3}{4}$

(۱) $\frac{1}{2}$

۱۰. برد تابع $f(x) = x + \frac{1}{x}$ برابر با کدام است؟

(۴) $[-2, 2]$

(۳) $\mathbb{R} - (-2, 2)$

(۲) $\mathbb{R}$

(۱) $(-2, 2)$

۱۱. **مسئله** برد تابع $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$ کدام است؟

(۴) $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

(۳) $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

(۲) $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

(۱) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

۱۲. **مسئله** اگر نمودار تابع $y = \frac{2}{x}$ را به اندازه ۲ واحد به بالا و ۳ واحد به راست انتقال دهیم، ضابطه تابع حاصل کدام است؟

(۴) $y = \frac{2x+4}{x+3}$

(۳) $y = \frac{x+4}{2x-3}$

(۲) $y = \frac{2x-4}{x-3}$

(۱) $y = \frac{x-4}{2x-3}$

۱۳. **مسئله** نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را ۴ واحد به بالا و ۳ واحد به چپ انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، محورهای را در کدام نقاط قطع می‌کند؟

(۴) $(-\frac{13}{4}, 0), (0, -\frac{13}{3})$

(۳) $(-\frac{13}{4}, 0), (0, \frac{13}{3})$

(۲) $(\frac{13}{4}, 0), (0, -\frac{13}{3})$

(۱) $(\frac{13}{4}, 0), (0, \frac{13}{3})$

۱۴. **مسئله** فرض کنید $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{3x-5}{x-2}$. کدام گزینه در مورد نمودار g درست است؟

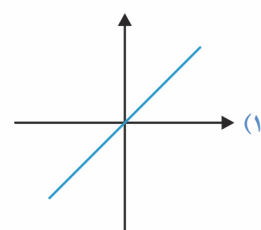
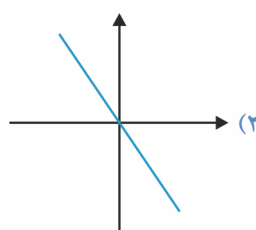
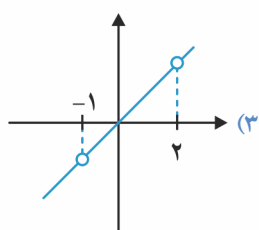
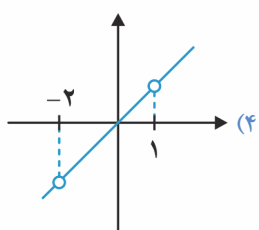
(۱) انتقال یافته نمودار f به اندازه ۲ واحد به راست و ۳ واحد به بالا است.

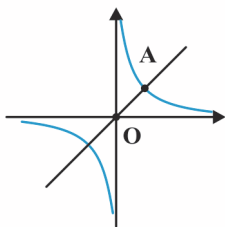
(۲) انتقال یافته نمودار f به اندازه ۲ واحد به چپ و ۳ واحد به بالا است.

(۳) انتقال یافته نمودار f به اندازه ۲ واحد به راست و ۳ واحد به پایین است.

(۴) انتقال یافته نمودار f به اندازه ۲ واحد به چپ و ۳ واحد به پایین است.

۱۵. نمودار تابع $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$ شبیه کدام است؟



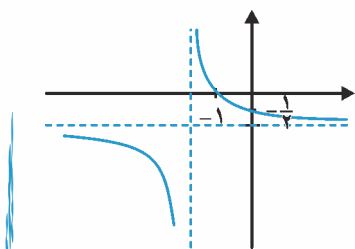


۱۶. نمودارهای $y = \frac{k}{x}$ و $y = x$ همدیگر را در نقطه A قطع کرده‌اند. اگر $OA = 2\sqrt{2}$ ، آن گاه کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۷. **رئوسار** نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را به اندازه a واحد به پائین و b واحد به چپ منتقل کرده‌ایم. حاصل ab کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴)



تساوی دو تابع

شرط این که دو تابع f و g با هم مساوی باشند این است که:

$$(D_f = D_g) \text{ و } f(x) = g(x) \text{ برای هر } x \in D_f = D_g$$

ثانیاً برای هر $x \in D_f = D_g$ داشته باشیم $f(x) = g(x)$. یعنی روی دامنه یکسان، ضابطه دو تابع نیز با هم برابر باشند.

مثلاً دو تابع $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$ با هم مساویند. زیرا:

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_g = \mathbb{R} \rightarrow (\text{مخرج فاقد ریشه است}) \Rightarrow D_f = D_g$$

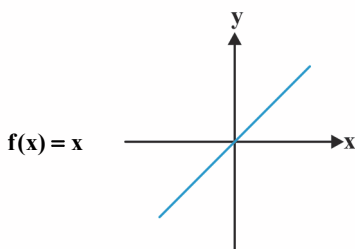
$$f(x) = x^2 - 1$$

$$g(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x^2 - 1 \Rightarrow f(x) = g(x)$$

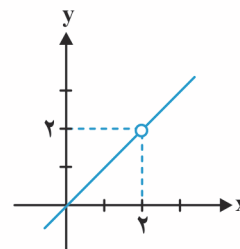
ثانیاً:

مفهوم تساوی دو تابع از روی نمودارشان

اگر دو تابع با هم مساوی باشند باید نمودارشان دقیقاً روی هم قرار گیرند. مثلاً دو تابع $f(x) = x$ و $g(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$ با وجود این که ضابطه‌شان یکسان است ولی همان‌طور که در شکل‌های زیر می‌بینیم نمودارشان دقیقاً روی هم قرار نمی‌گیرد.



$$g(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \frac{x(x - 2)}{x - 2} = x$$



در نمودار تابع g یک نقطه توخالی به ازای $x = 2$ داریم. چون دامنه این تابع $\mathbb{R} - \{2\}$ است. پس در واقع این دو تابع با هم مساوی نیستند.

مثال در هر حالت تعیین کنید آیا توابع f و g مساویند یا خیر؟

الف $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$, $g(x) = \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

ب $f(x) = x^2 - 2x + 4$, $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+8}{x+2} & ; x \neq -2 \\ 12 & ; x = -2 \end{cases}$

پاسخ الف

$$D_f : x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

ابتدا دامنه هر یک از توابع را به دست می‌آوریم:

$$D_g : x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow (x - 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 3, x = 2 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

چون $D_f \neq D_g$ است، پس دو تابع مساوی نیستند. در این جا دیگر نیازی نیست بررسی کنیم که آیا ضابطه دو تابع برابر است یا خیر.

پاسخ ب

دامنه تابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است $D_f = \mathbb{R} \rightarrow$

چون در این تابع دو ضابطه‌ای، در ضابطه اول یک عبارت گویا داریم که ریشه مخرج آن $x = -2$ است ولی می‌بینیم که این ضابطه برای $x \neq -2$ است. یعنی در واقع هیچ‌گاه $x = -2$ نمی‌تواند باشد. چون دامنه دو تابع مساوی است، شرط دوم تساوی دو تابع را بررسی می‌کنیم.

$$\text{اگر } x \neq -2 \Rightarrow g(x) = \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{(x+2)} = x^2 - 2x + 4 = f(x)$$

$$\text{اگر } x = -2 \Rightarrow g(-2) = 12 = f(-2)$$

پس دو تابع f و g با هم مساویند.

مثال

اگر توابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} & ; x \neq 1 \\ a - 1 & ; x = 1 \end{cases}$ و $g(x) = x - 3$ با هم مساوی باشند، آن‌گاه مقدار a را بیابید.

پاسخ

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & x \neq 1 \\ a - 1 & x = 1 \end{cases} \quad \text{با توجه به این که } \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{x - 1} = x - 3 \text{ داریم:}$$

همان‌طور که می‌بینیم برای $x \neq 1$ ضابطه دو تابع f و g با هم برابرند، پس برای این که دو تابع با هم مساوی باشند باید در نقطه $x = 1$ نیز مقدارهایشان یکسان شوند، یعنی باید $f(1) = g(1)$.

$$f(1) = a - 1, g(1) = 1 - 3 = -2 \Rightarrow a - 1 = -2 \Rightarrow a = -1$$

پرسش‌های هفت‌گزینه‌ای

۱۸. دو تابع $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$ و $g(x) = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x + 2}$ با هم مساوی‌اند. حاصل ab کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۹. اگر دو تابع $f = \{(1, 4), (a, 5), (6, 2)\}$ و $g = \{(3, b), (a + 3, c), (d, e)\}$ با هم برابر باشند، حاصل $a + b + c + d + e$ کدام است؟

۲۱ (۴)

۱۸ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

۲۰. به توابع زیر توجه کنید:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}, \quad g(x) = x + 1, \quad p(x) = \frac{x^3 + x^2 + x}{x^2 + x + 1}, \quad q(x) = x$$

کدام درست است؟

$$(۱) f(x) = g(x) \quad (۲) p(x) = q(x) \quad (۳) f(x) = g(x) \text{ و } p(x) = q(x) \quad (۴) \text{ هیچ کدام درست نیست.}$$

۲۱. دو تابع $f(x) = \frac{3}{x - 2}$ و $g(x) = \frac{ax + b}{x^2 + cx + d}$ با هم برابر هستند. حاصل $a + b + c + d$ کدام است؟

-۴ (۴)

-۳ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

۲۲. دو تابع $f(x) = x - 3$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} & x \neq -2 \\ a & x = -2 \end{cases}$ با هم برابر هستند. مقدار a کدام است؟

-۸ (۴)

-۷ (۳)

-۶ (۲)

-۵ (۱)

۲۳. در کدام گزینه تساوی دو تابع برقرار نیست؟

$$(۲) g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}, f(x) = |x - 1|$$

$$(۱) g(x) = \frac{x}{x^2}, f(x) = \frac{1}{x}$$

$$(۴) g(x) = |x| - \left| \frac{1}{x} \right|, f(x) = \left| x - \frac{1}{x} \right|$$

$$(۳) g(x) = \left| x + \frac{1}{x} \right|, f(x) = \left| x \right| + \left| \frac{1}{x} \right|$$

۲۴. تابع $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x-3|}{x-3}$ با کدام تابع برابر است؟

$$g(x) = \begin{cases} -2 & x > 3 \\ 0 & 1 < x < 3 \\ 2 & x < 1 \end{cases} \quad (۴) \quad g(x) = \begin{cases} 1-2x & x > 3 \\ -2 & 1 < x < 3 \\ 2x-1 & x < 1 \end{cases} \quad (۳) \quad g(x) = \begin{cases} 2 & x > 3 \\ 0 & 1 < x < 3 \\ -2 & x < 1 \end{cases} \quad (۲) \quad g(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 3 \\ 2 & 1 < x < 3 \\ 1-2x & x < 1 \end{cases} \quad (۱)$$

۲۵. **رئوسار** اگر دو تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+b}{x+2} & x \neq a \\ c & x = a \end{cases}$ و $g(x) = dx + e$ برابر باشند ($d \neq 0$)، حاصل $a+b+c+d+e$ کدام است؟

-۳ (۴)

۳ (۳)

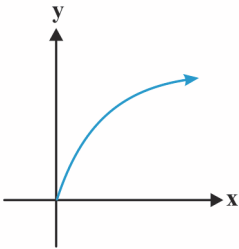
-۱ (۲)

۱ (۱)

توابع رادیکالی

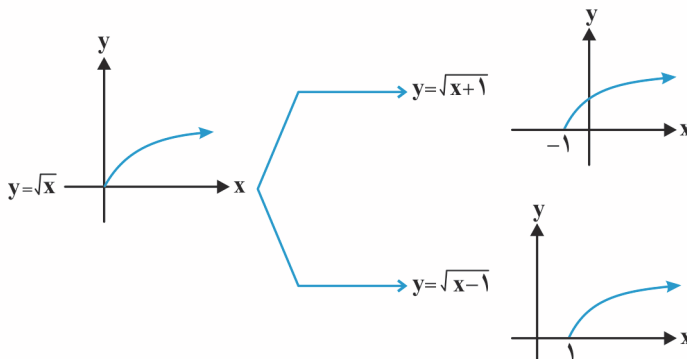
تابع $f(x) = \sqrt{x}$

ساده ترین تابع رادیکالی است که نمودارش به صورت مقابل است. دامنه و برد این تابع اعداد حقیقی نامنفی است.

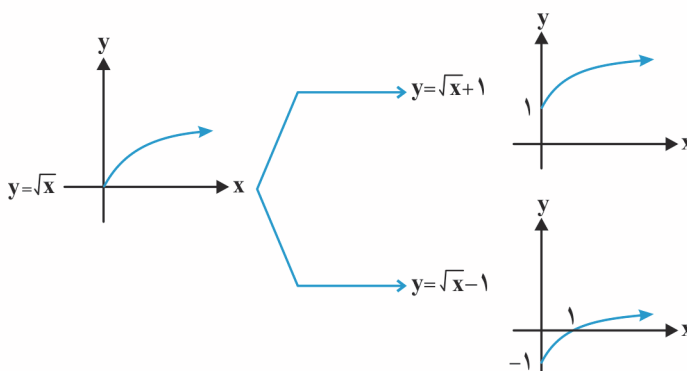


رسم نمودار توابع رادیکالی به کمک انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$

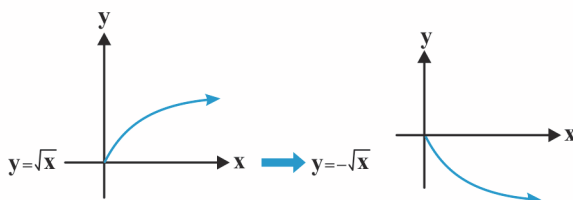
❑ برای رسم نمودار تابع $y = \sqrt{x+a}$ کافی است نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را در امتداد محور x ها به اندازه a واحد به راست و یا چپ انتقال دهیم. اگر $a > 0$ باشد، نمودار را به چپ و اگر $a < 0$ باشد، نمودار را به راست انتقال می دهیم. مانند:



❑ برای رسم نمودار تابع $y = \sqrt{x} + a$ کافی است نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را در امتداد محور y ها به اندازه a واحد به بالا و یا پایین انتقال دهیم. اگر $a > 0$ باشد، نمودار را به بالا و اگر $a < 0$ باشد، نمودار را به پایین انتقال می دهیم. مانند:



❑ برای رسم نمودار تابع $y = -\sqrt{x}$ کافی است نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم. به صورت مقابل:



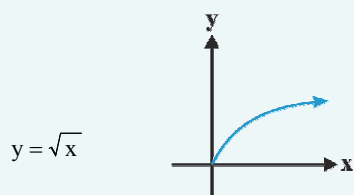
مثال

نمودار هر یک از توابع زیر را به کمک انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ رسم کنید.

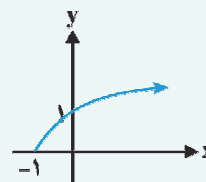
الف $f(x) = 2 - \sqrt{x+1}$

ب $g(x) = -3 + \sqrt{x-1}$

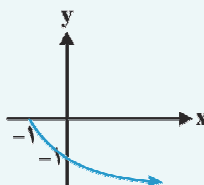
پاسخ



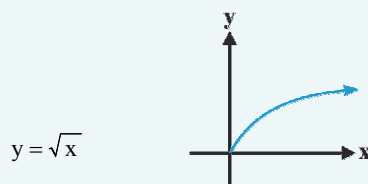
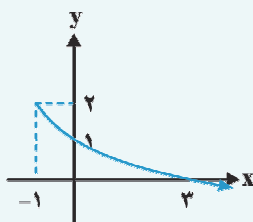
نمودار را ۱ واحد به چپ انتقال می‌دهیم



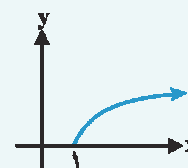
نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم



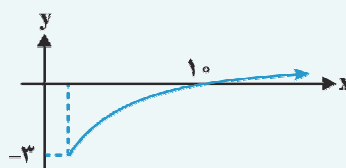
نمودار را ۲ واحد در امتداد محور y ها بالا می‌بریم



نمودار را ۱ واحد به راست انتقال می‌دهیم



نمودار را ۳ واحد در امتداد محور y ها پایین می‌آوریم



دامنه توابع رادیکالی

برای تعیین دامنه توابع رادیکالی دو حالت در نظر می‌گیریم:

- ❑ اگر فرجه رادیکال فرد باشد، بدون در نظر گرفتن رادیکال دامنه تابع زیر رادیکال را به دست می‌آوریم.
- ❑ اگر فرجه رادیکال زوج باشد، باید اولاً دامنه تابع زیر رادیکال را تعیین کنیم و ثانیاً باید تابع زیر رادیکال را بزرگ‌تر و یا مساوی صفر قرار دهیم و سپس بین مقادیر به دست آمده برای x از اولاً و ثانیاً اشتراک بگیریم.

مثال

دامنه هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف $y = \sqrt[3]{\frac{x+4}{x^2-2x}}$

ب $y = \sqrt{\frac{x^2-x}{x-2}}$

ج $y = \sqrt{4-\sqrt{x+1}}$

د $y = \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$

پاسخ الف

چون فرجه رادیکال فرد است پس فقط کافی است دامنه عبارت زیر رادیکال را به دست آوریم:

$$x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \rightarrow x = 0, x = 2 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

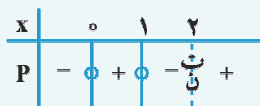
ب

چون فرجه رادیکال زوج است پس باید علاوه بر این که دامنه عبارت زیر رادیکال را می‌یابیم، عبارت $\frac{x^2-x}{x-2} \geq 0$ باشد. یعنی:

$$x-2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$$

۱

$$P = \frac{x^2-x}{x-2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{x-2} \geq 0$$



$$\Rightarrow x \in [0, 1] \cup (2, +\infty)$$

۲

$$D_y = [0, 1] \cup (2, +\infty)$$

از اشتراک ۱ و ۲ دامنه تابع برابر است با:

ج

در این تابع چون دو رادیکال با فرجه زوج داریم، پس:

$$\text{اولاً } x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

۱

$$\text{ثانیاً } 4 - \sqrt{x+1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \leq 4 \Rightarrow x+1 \leq 16 \Rightarrow x \leq 15$$

۲

$$D_y = [-1, 15]$$

از اشتراک ۱ و ۲ دامنه تابع برابر است با:

د

برای تعیین دامنه در این تابع سه شرط به صورت زیر داریم:

$$\text{اولاً } x \geq 0$$

۱

$$\text{ثانیاً } 1 + \sqrt{x} \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \neq -1 \rightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{همواره برقرار است}$$

۲

$$\text{ثالثاً } \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \geq 0 \xrightarrow{1+\sqrt{x} > 0} 1-\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Rightarrow x \leq 1$$

۳

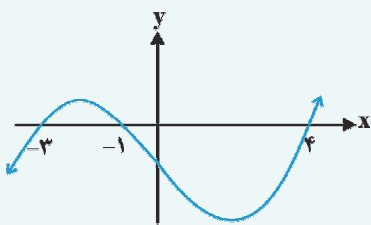
$$D_y = [0, 1]$$

از اشتراک ۱، ۲ و ۳ دامنه تابع برابر است با:

مثال

شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه

تابع با ضابطه $g(x) = \sqrt{xf(x)}$ را بیابید.



پاسخ

با توجه به نمودار داده شده می‌توان گفت دامنه تابع f برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد، پس دامنه تابع $g(x)$ مقادیری از x است که $xf(x) \geq 0$ می‌شود. برای برقراری این نامساوی باید x و $f(x)$ هم علامت باشند، یعنی:

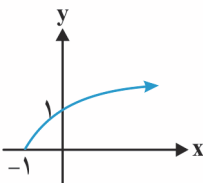
$$\begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow x \in [4, +\infty) \\ \text{یا} \\ x \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [-1, 0] \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} D_g = (-\infty, -3] \cup [-1, 0] \cup [4, +\infty)$$

برد توابع رادیکالی

می‌دانیم برد تابع در واقع تصویر قائم نمودار تابع روی محور y ها است. مثلاً برد تابع

$y = \sqrt{x+1}$ با توجه به نمودارش که به صورت می‌باشد، برابر اعداد حقیقی نامنفی است، یعنی:

$$\text{برد } \mathbb{R} = [0, +\infty)$$



در توابع رادیکالی به راحتی می‌توانیم با توجه به محدوده دامنه تابع، حدودی برای y که همان برد تابع است، بیابیم. مثلاً برابر تعیین

برد تابع $y = 3 + \sqrt{x-2}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} \geq 0 \Rightarrow 3 + \sqrt{x-2} \geq 3 \Rightarrow \text{برد } \mathbb{R} = [3, +\infty)$$

مثال در تابع $f(x) = a - \sqrt{x+b}$ اگر دامنه تابع بازه $[4, +\infty)$ و برد آن بازه $(-\infty, -\frac{1}{4}]$ باشد، $a+b$ کدام است؟

$$x+b \geq 0 \rightarrow x \geq -b \xrightarrow{\text{چون } x \geq 4} -b = 4 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow y = a - \sqrt{x-4}$$

پاسخ چون دامنه $[4, +\infty)$ است، پس: $x \geq 4$ در واقع

با توجه به تابع فوق داریم:

$$x-4 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-4} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x-4} \leq 0 \Rightarrow a - \sqrt{x-4} \leq a \Rightarrow y \leq a$$

$$a+b = -\frac{1}{4} - 4 = -\frac{9}{4}$$

چون برد بازه $(-\infty, -\frac{1}{4}]$ است، یعنی $y \leq -\frac{1}{4}$ پس $a = -\frac{1}{4}$ می‌باشد و داریم:

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۶. دامنه تابع $y = \sqrt{35-x^2}$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۴) ۱۷

(۳) ۱۱

(۲) ۵

(۱) ۴

۲۷. دامنه $f(x) = \sqrt{(4-x^2)(x^2-x+1)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۴) ۹

(۳) ۷

(۲) ۵

(۱) ۳

۲۸. دامنه تابع با ضابطه $y = \sqrt{-x^2(x^2-4)^2}$ چند عضو دارد؟

(۴) بی‌شمار

(۳) ۳

(۲) ۱

(۱) صفر

۲۹. دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt{1-2x}$ کدام است؟

(۴) $R - (-1, 1)$

(۳) $R - [-1, 1]$

(۲) $(-\infty, -1)$

(۱) $(-\infty, \frac{1}{2}]$

(سراسری تهرانی ۹۲)

۳۰. اگر $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$ ، دامنه تابع $f(3-x)$ کدام است؟

(۴) $[1, 3]$

(۳) $[1, 2]$

(۲) $[0, 3]$

(۱) $[0, 2]$

۳۱. دامنه تابع $y = \sqrt{2-\sqrt{x-1}}$ کدام است؟

(۴) $[-5, 5]$

(۳) $[1, 5]$

(۲) $[5, +\infty)$

(۱) $[1, +\infty)$

(سراسری خارج از کشور تهرانی ۹۲)

۳۲. اگر $f(x) = \sqrt{x+|x+2|}$ ، دامنه تابع $f(-x)$ کدام است؟

(۴) $x \geq 1$

(۳) $x \leq 1$

(۲) $x \geq -1$

(۱) $x \leq -1$

۳۳. دامنه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{x^2-|x|}-2$ کدام گزینه است؟

(۴) R

(۳) $-2 < x < 2$

(۲) $-1 < x < 1$

(۱) $x \geq 2, x \leq -2$

۳۴. دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x}}}$ کدام است؟

(۴) $\{0\} \cup [1, +\infty)$

(۳) $[0, \sqrt{2})$

(۲) $[1, +\infty)$

(۱) $[0, +\infty)$

۳۵. تابع $f(x) = a + \sqrt{x+b}$ مفروض است. اگر دامنه آن $[-4, +\infty)$ و برد آن $[-3, +\infty)$ باشد، آن‌گاه این نمودار محور x ها را در کدام نقطه

قطع می‌کند؟

(۴) $(8, 0)$

(۳) $(7, 0)$

(۲) $(6, 0)$

(۱) $(5, 0)$

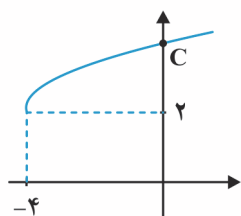
۳۶. نمودار تابع $f(x) = a + \sqrt{x+b}$ به شکل روبه‌رو است. مقدار C کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۶

(۴) ۸



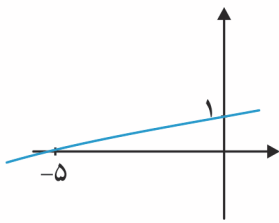
۳۷. نمودار تابع $y = a + \sqrt{x+b}$ به شکل روبه‌رو است. حاصل ab کدام است؟

(۱) ۱۸

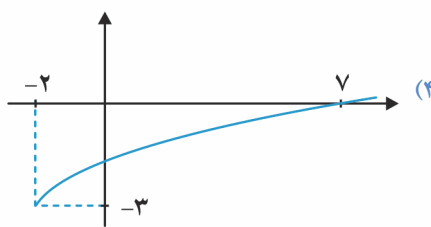
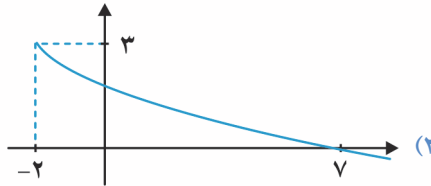
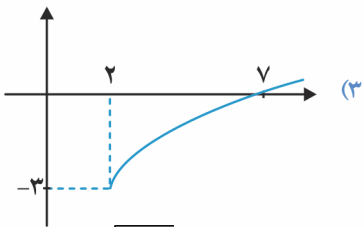
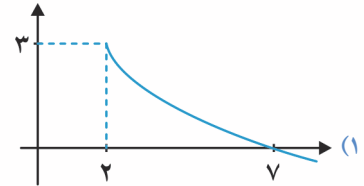
(۲) -۱۸

(۳) ۱۶

(۴) -۱۶



۳۸. نمودار تابع $y = 3 - \sqrt{x+2}$ شبیه کدام گزینه است؟

(۴) $[-1, 1]$ (۳) $[0, 1]$

۳۹. برد تابع f به معادله $y = \sqrt{1-x^2}$ کدام است؟

(۲) $(0, +\infty)$ (۱) $\mathbb{R}$

۴۰. برد تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ کدام است؟

(۲) $[\sqrt{2}, +\infty)$ (۱) $[1, +\infty)$ (۴) $[\sqrt{5}, +\infty)$ (۳) $[\sqrt{3}, +\infty)$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+2}}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$$

$$p(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x^2+1}$$

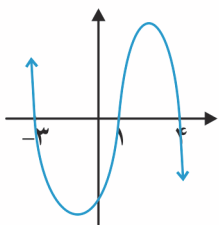
$$q(x) = \sqrt{x^3+x}$$

۴۱. **مسئله** به توابع مقابل توجه کنید:

کدام درست است؟

(۱) $f(x) = g(x)$ (۲) $p(x) = q(x)$ (۳) $f(x) = g(x)$, $p(x) = q(x)$

(۴) هیچ کدام

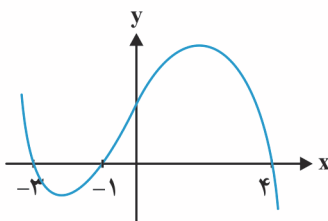


(سراسری خارج از کشور تهرانی ۹۴)

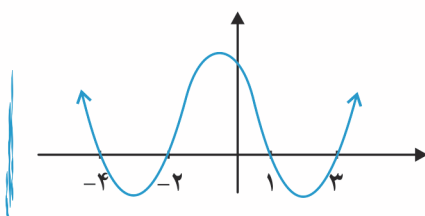
۴۲. شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x)$ را نشان می‌دهد. دامنه $y = \sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

(۱) $(-\infty, -3] \cup [1, 4]$ (۲) $[-3, 1] \cup [4, +\infty)$ (۳) $[-3, 0] \cup [1, 4]$ (۴) $(-\infty, -3] \cup [4, +\infty)$

۴۳. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x-2)$ است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

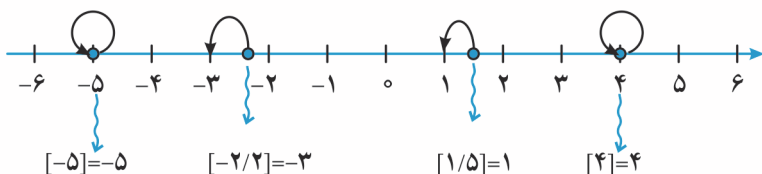
(۱) $[-1, 1] \cup [0, 6]$ (۲) $[-3, 1] \cup [0, 2]$ (۳) $[-5, -3] \cup [-1, 2]$ (۴) $[-5, -3] \cup [0, 2]$ 

۴۴. **مسئله** شکل مقابل نمودار $y = f(x)$ را نشان می‌دهد. دامنه تابع $y = \frac{1}{\sqrt{(x+1)f(x)}}$ کدام است؟

(۱) $(-\infty, -4) \cup [-2, -1] \cup [1, 3]$ (۲) $(-\infty, -4) \cup (-2, -1) \cup (1, 3)$ (۳) $[-4, -2] \cup [-1, 1] \cup [3, +\infty)$ (۴) $(-4, -2) \cup (-1, 1) \cup (3, +\infty)$ 

تعریف جزء صحیح

اگر x عدد حقیقی باشد، جزء صحیح x یا براکت x که با نماد $[x]$ نشان می‌دهیم، بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که کوچک‌تر یا مساوی x است. به عنوان مثال داریم:



تذکره

اگر برای هر عدد حقیقی x ، عدد صحیح n وجود داشته باشد، به طوری که $n \leq x < n+1$ آن گاه می‌توان نتیجه گرفت $[x] = n$.

مثلاً: $3 \leq \sqrt{11} < 4 \Rightarrow [\sqrt{11}] = 3$ $-6 \leq \frac{-35}{6} < -5 \Rightarrow [\frac{-35}{6}] = -6$

مثال حاصل $[-5x]$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

پاسخ

$$[-5(\sqrt{2})] \stackrel{\sqrt{2} \approx 1/41}{=} [-5(1/41)] = [-7/0.5] = -8$$

مثال اگر $x^2 + x < 0$ باشد، حاصل عبارت $[x] + [x^2] + [x^3]$ را بیابید.

پاسخ

ابتدا حدود x را از نامساوی $x^2 + x < 0$ بدست می‌آوریم:

$$x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 \\ \hline x(x+1) & + & - & + \end{array} \Rightarrow -1 < x < 0$$

$$-1 < x < 0 \Rightarrow \begin{cases} [x] = -1 \\ 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0 \\ -1 < x^3 < 0 \Rightarrow [x^3] = -1 \end{cases} \Rightarrow [x] + [x^2] + [x^3] = -1 + 0 - 1 = -2$$

مثال اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل عبارت $P = [\sqrt{n^2}] + [\sqrt{n^2+1}] + \dots + [\sqrt{n^2+n}]$ به‌دست آورید.

پاسخ

با توجه به اینکه $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$[\sqrt{n^2}] = [n] = n$$

$$n^2 < n^2 + 1 < (n+1)^2 \Rightarrow n < \sqrt{n^2+1} < n+1 \Rightarrow [\sqrt{n^2+1}] = n$$

$$n^2 < n^2 + 2 < (n+1)^2 \Rightarrow n < \sqrt{n^2+2} < n+1 \Rightarrow [\sqrt{n^2+2}] = n$$

$\vdots$

$$n^2 < n^2 + n < (n+1)^2 \Rightarrow n < \sqrt{n^2+n} < n+1 \Rightarrow [\sqrt{n^2+n}] = n$$

چون تعداد براکت‌ها در صورت سؤال برابر $(n+1)$ تا می‌باشد و دیدیم که حاصل هر براکت برابر n شد. پس مجموع داده شده برابر است با:

$$P = (n+1)n = n^2 + n$$

ویژگی‌های تابع جزء صحیح

۱ $[x] \leq x \Rightarrow \begin{cases} \text{اگر } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = x \\ \text{اگر } x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x] < x \end{cases}$

۲ $[x] \leq x < [x] + 1 \Rightarrow 0 \leq x - [x] < 1$

توجه

برای هر عدد حقیقی x می‌توان گفت $x = [x] + \alpha$ که α جزء اعشاری x (جزء کسری x) نامیده می‌شود و با توجه به

خاصیت فوق همواره $0 \leq \alpha < 1$.

نکته

با توجه به خاصیت ۲ می‌توان گفت در حالت کلی $0 \leq U - [U] < 1$ است.

۳ $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

مثال $[\frac{2}{4}] + [-\frac{2}{4}] = 2 + (-3) = -1$

مثال $[5] + [-5] = 5 - 5 = 0$

۴ $[x \pm k] = [x] \pm k; k \in \mathbb{Z}$

$[k \pm x] = k + [\pm x]; k \in \mathbb{Z}$

مثال $[x - 3] = [x] - 3$

مثال $[3 - x] = 3 + [-x]$

۵ $[-x] = \begin{cases} -[x] & ; x \in \mathbb{Z} \\ -[x] - 1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

مثال $[-7] = -[7] = -7$

مثال $[-\frac{3}{4}] = -[\frac{3}{4}] - 1 = -3 - 1 = -4$

۶ $[x + y] = \begin{cases} [x] + [y] & ; 0 \leq \alpha + \beta < 1 \\ [x] + [y] + 1 & ; 1 \leq \alpha + \beta < 2 \end{cases}$ (α جزء اعشاری x و β جزء اعشاری y است)

۷ $[2x] = \begin{cases} 2[x] & ; 0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \\ 2[x] + 1 & ; \frac{1}{2} \leq \alpha < 1 \end{cases}$ (α جزء اعشاری x است) **۸** $[2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}]$

مثال اگر $y = x - 3[\frac{x}{3}]$ در این صورت حدود y کدام است؟

$y = x - 3[\frac{x}{3}] = 3(\frac{x}{3} - [\frac{x}{3}])$

$0 \leq \frac{x}{3} - [\frac{x}{3}] < 1 \Rightarrow 0 \leq 3(\frac{x}{3} - [\frac{x}{3}]) < 3 \Rightarrow 0 \leq y < 3$

با توجه به نکته ویژگی (۲) داریم:

پاسخ

معادلات شامل جزء صحیح

در حالت کلی برای معادله $[f(x)] = n$ داریم: معادله جواب ندارد $\Rightarrow n \notin \mathbb{Z}$ اگر و $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \leq f(x) < n+1$ اگر

مثال مجموعه جواب معادلات زیر را بدست آورید.

الف $[3x] = \frac{1}{4}$

ب $[x] + [x + 2] = 8$

ج $x + [2x] + [4x] = 15$

پاسخ **الف** چون $\frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$ پس معادله جواب ندارد $\Rightarrow [3x] = \frac{1}{4}$

$[x] + [x + 2] = 8 \Rightarrow [x] + [x] + 2 = 8 \Rightarrow 2[x] = 6$

$\Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4$

$x + [2x] + [4x] = 15 \Rightarrow x = \underbrace{15}_{\in \mathbb{Z}} - \underbrace{[2x]}_{\in \mathbb{Z}} - \underbrace{[4x]}_{\in \mathbb{Z}} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} \not\ni$ غ ق $x = \frac{15}{7} \Rightarrow 7x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{7}$ با فرض $x \in \mathbb{Z}$

پس این معادله جواب ندارد.

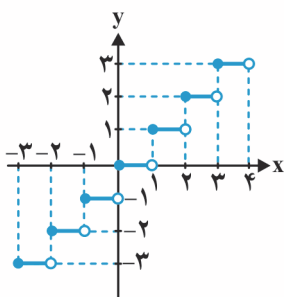
تابع جزء صحیح

تابع جزء صحیح که به صورت $f(x) = [x]$ نشان داده می‌شود، تابعی است که به هر عدد صحیح، خود همان عدد صحیح را نسبت می‌دهد و به هر عدد غیر صحیح، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از آن عدد را نسبت می‌دهد.

دامنه این تابع $\mathbb{R}$ ، و برد آن مجموعه $\mathbb{Z}$ (اعداد صحیح) است.

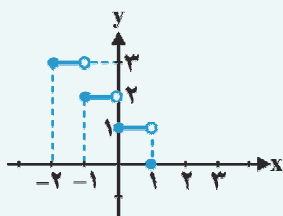
با توجه به تعریف جزء صحیح برای $x \in [n, n+1)$ ؛ $(n \in \mathbb{Z})$ داریم $f(x) = n$ بنابراین نمودار تابع

جزء صحیح در بازه $[-3, 4)$ به صورت مقابل است.



مثال نمودار تابع $y = -|x| + 1$ را در بازه $[-2, 1]$ رسم کنید.

پاسخ می‌توانیم با محدوده بندی نمودار را به صورت زیر رسم کنیم:



$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = -(-2) + 1 = 3$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = -(-1) + 1 = 2$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = 0 + 1 = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = -1 + 1 = 0 \rightarrow (1, 0) \text{ نقطه به مختصات}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

(سنجش ریاضی ۹۰)

۴۵. اگر $f(x) = ||5x| - |3x||$ مقدار $f(-\frac{1}{4})$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

-۱ (۱)

۴۶. حاصل $[(1 - \sqrt{3})^{20}]^{20}$ کدام است؟

۲۰ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

(پیش‌دانشگاهی تجربی ۷۵)

۴۷. دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|} - 1}$ کدام است؟

$(1, +\infty)$ (۴)

$(2, +\infty)$ (۳)

$[2, +\infty)$ (۲)

$[1, +\infty)$ (۱)

۴۸. اگر $\frac{x-1}{4-x} > 0$ باشد، حاصل $[\sqrt{x}]$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۴۹. اگر $[\frac{x}{4}] = 1$ باشد، حاصل $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 8x + 16}$ کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۵۰. **رسم** دامنه توابع $f(x) = \frac{1}{\frac{x^2-4}{5}}$ و $g(x) = \frac{1}{-\frac{x^2}{4}}$ به ترتیب کدام است؟

$$D_f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$D_f = (-2, 2)$$

$$D_g = (-\infty, -3] \cup (-2, 2) \cup [3, +\infty)$$

$$D_g = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

$$D_f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$D_f = (-2, 2)$$

$$D_g = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

$$D_g = (-\infty, -3] \cup (-2, 2) \cup [3, +\infty)$$

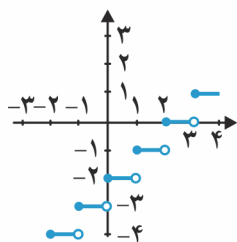
۵۱. **رسم** اگر نمودار $f(x) = [x - 3] + a$ به شکل زیر باشد، مقدار a کدام است؟

۱ (۱)

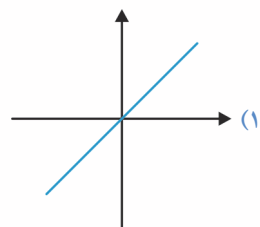
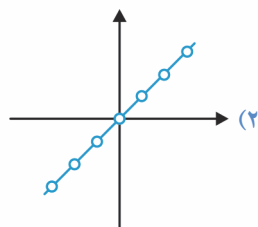
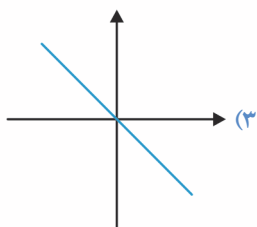
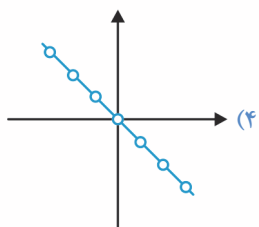
-۱ (۲)

۳ (۳)

-۳ (۴)



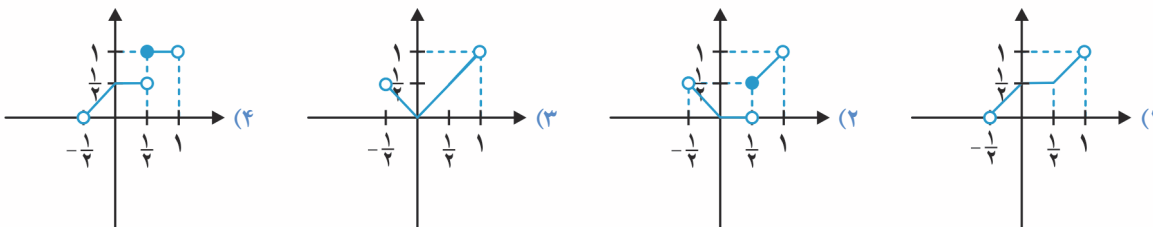
۵۲. نمودار $f(x) = \frac{-x}{[x] + [-x]}$ شبیه کدام گزینه است؟



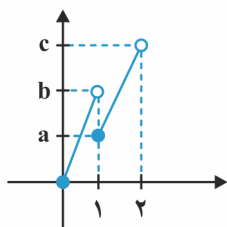
۵۳. نمودار تابع $y = |x^2|$ روی بازه $x \in (-2, 2)$ از چند پاره خط تشکیل شده است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۵۴. نمودار تابع $f(x) = x[2x]$ در بازه $(-\frac{1}{2}, 1)$ کدام است؟

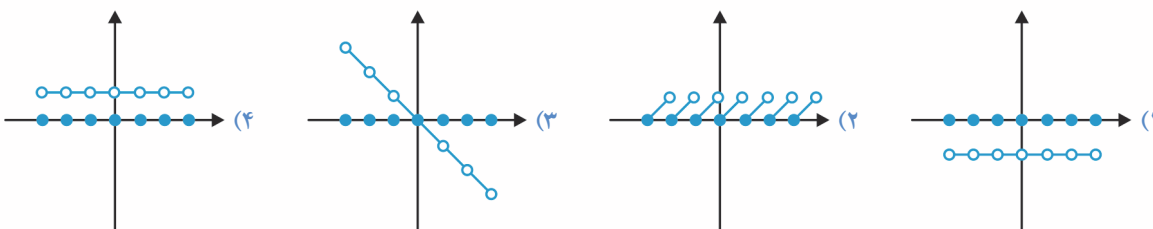


۵۵. نمودار $f(x) = x(3 - [x])$ به شکل روبه‌رو است. حاصل $\frac{a+c}{b}$ کدام است؟



- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۵۶. نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x([x] + [-x])$ کدام است؟



(سنجش تجربی - ۹۳)

- (۱) $[1, 2]$ (۲) $\{1, 2\}$ (۳) $(1, 2]$ (۴) $\{2\}$

(سنجش تجربی ۹۳)

۵۸. جواب‌های معادله $3x - 2 = -4$ کدام است؟ (نماد $[]$ جزء صحیح است.)

- (۱) $[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}]$ (۲) $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ (۳) $(-1, -\frac{2}{3}]$ (۴) $[-1, -\frac{2}{3})$

۵۹. مجموعه جواب معادله $2[x] + [1-x] = 2$ کدام است؟

- (۱) $(2, 3)$ (۲) $(2, 4) - \{3\}$ (۳) $(2, 4)$ (۴) $(2, 3) \cup \{3\}$

۶۰. جواب معادله $2x + [x] = 1$ در کدام گزینه است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

۶۱. جواب معادله $3[x] = [3x]$ کدام است؟

- (۱) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{Z}, K \leq x < K + \frac{1}{3}\}$ (۲) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{Z}, K \leq x \leq K + \frac{1}{3}\}$
(۳) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{Z}, K \leq x < K + \frac{2}{3}\}$ (۴) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{Z}, K \leq x \leq K + \frac{2}{3}\}$

۶۲. اگر $|x| = [x + \frac{1}{2}]$ ، آن‌گاه کدام درست است؟

- (۱) $[x] = [x - \frac{1}{2}]$ (۲) $2[x] = [2x]$ (۳) $[x] = [x - 1]$ (۴) $2[x] = [2x] + 1$

۶۳. تابع $f(x) = x + [x]$ مفروض است. به ازای کدام مقدار a تساوی $f(a) = \frac{7}{3}$ برقرار است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{5}{6}$

پاسخ نامه

درس اول: آشنایی با برخی از انواع تابع

توابع گویا

۱. تمرین ۱

$$\left. \begin{aligned} f(x) = -1 &\Rightarrow \frac{2}{x+2} = -1 \Rightarrow x = -4 \\ f(x) = 1 &\Rightarrow \frac{2}{x+2} = 1 \Rightarrow x = 0 \\ f(x) = 2 &\Rightarrow \frac{2}{x+2} = 2 \Rightarrow x = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_f = \{-4, -1, 0\}$$

۲. تمرین ۲

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^2+2}{x^2-3} \Rightarrow f(2-\sqrt{3}) = \frac{2(2-\sqrt{3})^2+2}{(2-\sqrt{3})^2-3} = \frac{16-8\sqrt{3}}{4-4\sqrt{3}} = \\ &= \frac{4(4-2\sqrt{3})}{4(1-\sqrt{3})} = \frac{4-2\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{(4-2\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \\ &= \frac{-2+2\sqrt{3}}{-2} = 1-\sqrt{3} \end{aligned}$$

۳. تمرین ۳

از اتحاد تفاضل مکعب‌ها (چاق و لاغر) استفاده می‌کنیم:

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x + 4} = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x^2 + 2x + 4} = x - 2$$

با توجه به این که اعداد $-2, -1, 0, 1, 2$ در دامنه تابع هستند، داریم:

$$f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) = -4 + (-3) + (-2) + (-1) + 0 = -10$$

۴. تمرین ۴

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{a-1}{a+1}, f(b) = \frac{b-1}{b+1} \\ f(a) + f(b) &= 0 \Rightarrow \frac{a-1}{a+1} + \frac{b-1}{b+1} = 0 \Rightarrow \\ &= \frac{(a-1)(b+1) + (a+1)(b-1)}{(a+1)(b+1)} = 0 \\ &= \frac{ab - b + a - 1 + ab - a + b - 1}{(a+1)(b+1)} = 0 \Rightarrow \frac{2ab - 2}{(a+1)(b+1)} = 0 \\ &\Rightarrow 2ab - 2 = 0 \Rightarrow ab = 1 \end{aligned}$$

۵. تمرین ۵

$$p(x) = 3000 \Rightarrow \frac{700x}{100-x} = 3000 \Rightarrow 700x = 300000 - 3000x$$

$$\Rightarrow x = 30$$

۶. تمرین ۶

$$\begin{aligned} f(x) &> 0/08 \Rightarrow \frac{0/24t}{t^2+2} > 0/08 \xrightarrow{\div 0/08} \\ \frac{3t}{t^2+2} &> 1 \Rightarrow \frac{3t}{t^2+2} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{-t^2+3t-2}{t^2+2} > 0 \xrightarrow{t^2+2>0} \\ -t^2+3t-2 &> 0 \Rightarrow -(t-1)(t-2) > 0 \end{aligned}$$

t	۱	۲
$-(t-1)(t-2)$	-	+

پس پاسخ $1 < t < 2$ است که همان ساعت دوم است.

۷. تمرین ۷

مخرج نباید ۰ شود:

$$2x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

۸. تمرین ۸

حاصل مخرج نباید ۰ شود، پس عبارت $3x^2 - mx + 12$ باید منفی باشد:

$$\begin{aligned} 3x^2 - mx + 12 &\xrightarrow{\Delta < 0} (-m)^2 - 4 \times 3 \times 12 < 0 \Rightarrow \\ m^2 - 144 < 0 &\Rightarrow (m-12)(m+12) < 0 \end{aligned}$$

m	-۱۲	۱۲
$m^2 - 144$	+	-

$$\Rightarrow -12 < m < 12 \Rightarrow |m| < 12$$

۹. تمرین ۹

حاصل مخرج به ازای فقط یک مقدار ۰ شده است، پس $x^2 - 3x + a$ دقیقاً یک ریشه دارد، پس $\Delta = 0$.

$$x^2 - 3x + a = 0 \xrightarrow{\Delta = 0} (-3)^2 - 4a = 0 \Rightarrow a = \frac{9}{4}$$

پس مخرج $x^2 - 3x + \frac{9}{4}$ است و ریشه‌اش (که همان b است) را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0 &\Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2} \\ a - b &= \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

پس:

۱۰. تمرین ۱۰

می‌دانیم $x \neq 0$ ، پس:

$$\left. \begin{aligned} x > 0 &\Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2 \\ x < 0 &\Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_f = \mathbb{R} - (-2, 2)$$

۱۱. تمرین ۱۱

اگر $t = x - 1$ ، آن‌گاه داریم:

$$\begin{aligned} t > 0 &\Rightarrow t + \frac{1}{t} \geq 2 \Rightarrow x - 1 + \frac{1}{x-1} \geq 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x-1} \geq 3 \\ t < 0 &\Rightarrow t + \frac{1}{t} \leq -2 \Rightarrow x - 1 + \frac{1}{x-1} \leq -2 \Rightarrow x + \frac{1}{x-1} \leq -1 \end{aligned}$$

پس برد تابع $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ است.

۱۲. تمرین ۱۲

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{x} \xrightarrow{\text{۳ واحد به راست}} y = \frac{2}{x-3} \xrightarrow{\text{۲ واحد به بالا}} \\ y &= \frac{2}{x-3} + 2 \Rightarrow y = \frac{2+2x-6}{x-3} \Rightarrow y = \frac{2x-4}{x-3} \end{aligned}$$

۱۳. تمرین ۱۳

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{۴ واحد به بالا}} y = \frac{1}{x} + 4 \\ y &= \frac{1}{x} + 4 \xrightarrow{\text{۳ واحد به چپ}} y = \frac{1}{x+3} + 4 \xrightarrow{x=0} \\ y &= \frac{1}{3} + 4 = \frac{13}{3} \Rightarrow \left(0, \frac{13}{3}\right) \end{aligned}$$

۱۹. گزینه ۲

$$\left. \begin{array}{l} \{1, 6\} \in D_f \\ \{3\} \in D_g \end{array} \right\} \Rightarrow D_f = D_g = \{1, 3, 6\} \xrightarrow{D_f} a = 3$$

$$(a+3, c) \xrightarrow{a=3} (6, c) \in D_f \left. \begin{array}{l} \\ (6, 2) \in D_g \end{array} \right\} \Rightarrow c = 2$$

$$f = \{(1, 4), (3, 5), (6, 2)\} \Rightarrow b = 5, d = 1, e = 4$$

$$g = \{(3, b), (6, 2), (d, e)\} \Rightarrow a + b + c + d + e = 3 + 5 + 2 + 1 + 4 = 15$$

۲۰. گزینه ۲
اگر ضابطه و دامنه دو تابع برابر باشند، دو تابع باهم برابر هستند.

$$\left. \begin{array}{l} D_f = \mathbb{R} - \{-1\} \\ D_g = \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \neq g(x)$$

در تابع p مخرج نباید ۰ شود.

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow D_p = \mathbb{R}, D_q = \mathbb{R}$$

دامنه p و q برابر با $\mathbb{R}$ است.

$$p(x) = \frac{x^3 + x^2 + x}{x^2 + x + 1} = \frac{x(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} = x \Rightarrow p(x) = q(x)$$

۲۱. گزینه ۲

$$f(x) = \frac{3}{x-2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

در تابع $g(x) = \frac{ax+b}{x^2+cx+d}$ ، مخرج باید تنها به ازای $x=2$ ، برابر ۰ با می شود، پس عبارت x^2+cx+d ریشه مضاعف $x=2$ را دارد:

$$(x-2)^2 = x^2 + cx + d \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 + cx + d \Rightarrow c = -4, d = 4$$

حال داریم:

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = \frac{ax+b}{(x-2)^2} \\ f(x) = \frac{3}{x-2} = \frac{3x-6}{(x-2)^2} \end{array} \right\} \Rightarrow ax+b = 3x-6 \Rightarrow a=3, b=-6$$

$$a+b+c+d = 3-6-4+4 = -3$$

پس:

۲۲. گزینه ۱

$$f(x) = x-3 \Rightarrow f(-2) = -5 \Rightarrow g(-2) = -5$$

$$g(-2) = a \Rightarrow a = -5$$

برابری دو تابع را نشان می دهیم:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-6}{x+2} & x \neq -2 \\ -5 & x = -2 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)} & x \neq -2 \\ -5 & x = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} x-3 & x \neq -2 \\ -5 & x = -2 \end{cases} \Rightarrow g(x) = f(x)$$

۲۳. گزینه ۲
در گزینه ۱ برابر هستند:

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \\ f(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right\} \xrightarrow{D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\}} f = g$$

$$y = \frac{1}{x+3} + 4 - y = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x+3} + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{13}{4} \rightarrow (-\frac{13}{4}, 0)$$

۱۴. گزینه ۱

$$g(x) = \frac{3x-5}{x-2} = \frac{3(x-2)+1}{x-2} = 3 + \frac{1}{x-2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x-2) = \frac{1}{x-2} \Rightarrow f(x-2) + 3 = 3 + \frac{1}{x-2}$$

$$\Rightarrow g(x) = f(x-2) + 3$$

۱۵. گزینه ۲

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 - x - 2} = \frac{x(x^2 - x - 2)}{x^2 - x - 2} = \frac{x(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ D_f = \mathbb{R} - \{-1, 2\} \end{cases}$$

بنابراین نمودار گزینه ۳ درست است.

۱۶. گزینه ۲
معادله $x = \frac{K}{x}$ را در نظر می گیریم:

$$x = \frac{K}{x} \Rightarrow x^2 = K \xrightarrow{x > 0} x = \sqrt{K}$$

$$y = x \xrightarrow{x = \sqrt{K}} y = \sqrt{K}$$

$$\left. \begin{array}{l} O(0,0) \\ A(\sqrt{K}, \sqrt{K}) \end{array} \right\} \Rightarrow OA = \sqrt{(\sqrt{K}-0)^2 + (\sqrt{K}-0)^2} = \sqrt{2K}$$

$$OA = 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2K} = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2K = 8 \Rightarrow K = 4$$

۱۷. گزینه ۲

$$y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{a واحد به پایین}} y = \frac{1}{x+b}$$

$$y = \frac{1}{x+b} + a; b > 1, a < 0$$

$$\xrightarrow{(-1,0)} \frac{1}{b-1} + a = 0 \Rightarrow \frac{1+ab-a}{b-1} = 0 \Rightarrow$$

$$ab+1=a \quad (I)$$

$$\xrightarrow{(0, -\frac{1}{2})} \frac{1}{b} + a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{ab+1}{b} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$ab+1 = -\frac{b}{2} \quad (II)$$

$$\xrightarrow{I, II} a = -\frac{b}{2} \xrightarrow{II} -\frac{b^2}{2} + 1 = -\frac{b}{2} \Rightarrow b^2 - b - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$(b-2)(b+1) = 0 \xrightarrow{b > 0} b = 2$$

$$ab+1=a \xrightarrow{b=2} 2a+1=a \Rightarrow a=-1 \Rightarrow ab=-2$$

۱۸. تساوی دوتابع

۱۸. گزینه ۱

$$f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$$

$$g(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2)+b(x-2)}{(x-2)(x+2)} =$$

$$\frac{(a+b)x+2a-2b}{x^2-4} \Rightarrow \frac{2x}{x^2-4} = \frac{(a+b)x+2a-2b}{x^2-4} \Rightarrow$$

$$2x = (a+b)x+2a-2b \Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ 2a-2b=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=1 \Rightarrow ab=1$$

در گزینه ۲ برابر هستند:

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| \\ f(x) &= |x-1| \end{aligned} \right\}$$

در گزینه ۳ برابر هستند:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} x + \frac{1}{x} & x > 0 \\ -x - \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases} \\ g(x) &= \begin{cases} x + \frac{1}{x} & x > 0 \\ -x - \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{Df = Dg = \mathbb{R} - \{0\}} f = g$$

در گزینه ۴ برابر نیستند:

$$\left. \begin{aligned} f(-\frac{1}{2}) &= |-\frac{1}{2} + 2| = \frac{3}{2} \\ g(-\frac{1}{2}) &= |-\frac{1}{2}| - |-\frac{1}{2}| = -\frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \neq g$$

۲۴. گزینه ۲

$$\begin{aligned} x > 3 &\Rightarrow \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x-3|}{x-3} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{x-3}{x-3} = 1+1=2 \\ 1 < x < 3 &\Rightarrow \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x-3|}{x-3} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{3-x}{x-3} = 1-1=0 \\ x < 1 &\Rightarrow \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x-3|}{x-3} = \frac{1-x}{x-1} + \frac{3-x}{x-3} = -1-1=-2 \end{aligned}$$

۲۵. گزینه ۱

g یک تابع خطی است، پس f هم باید خطی باشد، این تنها در حالتی اتفاق می افتد که در عبارت $\frac{x^2 + 3x + b}{x+2}$ صورت بر مخرج بخشپذیر باشد. پس حاصل صورت به ازای $x = -2$ باید ۰ شود.

$$x^2 + 3x + b \xrightarrow{x=-2} 4 - 6 + b = 0 \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x+2} & x \neq -2 \\ c & x = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)(x+2)}{x+2} & x \neq -2 \\ c & x = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -2 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x+1 & x \neq -2 \\ c & x = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+1 = dx + e \Rightarrow d = e = 1 \Rightarrow g(x) = x+1$$

$$f(-2) = g(-2) \Rightarrow c = -2+1 \Rightarrow c = -1$$

$$a + b + c + d + e = -2 + 2 - 1 + 1 + 1 = 1$$

۹. توابع رادیکالی

۲۶. گزینه ۲

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{35 - x^2} \Rightarrow 35 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 35 \leq 0 \Rightarrow \\ (x - \sqrt{35})(x + \sqrt{35}) &\leq 0 \Rightarrow -\sqrt{35} \leq x \leq \sqrt{35} \\ \frac{\sqrt{35}}{9} &\approx 0.59 \Rightarrow -0.59 \leq x \leq 0.59 \\ \frac{x \in \mathbb{Z}}{} &\Rightarrow x \in \{-5, -4, \dots, 4, 5\} \end{aligned}$$

مجموعه بالا شامل ۱۱ عضو است.

۲۷. گزینه ۲ در عبارت $x^2 - x + 1$ ضریب x^2 مثبت است و چون $\Delta < 0$ است، نتیجه می گیریم که حاصل $x^2 - x + 1$ همواره مثبت است. عبارت زیر رادیکال باید مثبت یا صفر شود.

$$(4 - x^2)(x^2 - x + 1) \geq 0 \xrightarrow{x^2 - x + 1 > 0} 4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow$$

$$(x-2)(x+2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

۲۸. گزینه ۲

$$x^2(x^2 - 4)^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2(x^2 - 4) \leq 0$$

پس عبارت زیر رادیکال همواره منفی یا ۰ است و تنها هنگامی که ۰ شود می تواند قابل قبول باشد:

$$x^2(x^2 - 4)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 2, -2 \end{cases}$$

پس دامنه تابع $\{-2, 0, 2\}$ است.

۲۹. گزینه ۲

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \rightarrow \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \geq 1 \Rightarrow (-\infty, -1) \cup [1, +\infty) \text{ I} \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \rightarrow \frac{x+1}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq 1 \Rightarrow (-\infty, -1] \cup (1, +\infty) \text{ II} \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$$\sqrt{1-2x} \rightarrow 1-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow (-\infty, \frac{1}{2}] \text{ III}$$

از اشتراک بازه های I، II و III، بازه $(-\infty, -1)$ به دست می آید.

۳۰. گزینه ۳

$$2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x \leq 0 \Rightarrow x(x-2) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow -2 \leq -x \leq 0 \Rightarrow 1 \leq 3-x \leq 3 \Rightarrow [1, 3]$$

۳۱. گزینه ۳

$$\sqrt{x-1} \Rightarrow x \geq 1 \text{ I}$$

$$\sqrt{2-\sqrt{x-1}} \Rightarrow 2-\sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} \leq 2 \Rightarrow x-1 \leq 4$$

$$\Rightarrow x \leq 5 \text{ II} \xrightarrow{\text{اشتراک I, II}} 1 \leq x \leq 5 \Rightarrow [1, 5]$$

۳۲. گزینه ۲ مسئله را در دو حالت $x \geq -2$ و $x < -2$ در نظر

$$x + |x+2| \geq 0 \xrightarrow{x \geq -2} x + x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

می گیریم:

$$x + |x+2| \geq 0 \xrightarrow{x < -2} x - x - 2 \geq 0 \Rightarrow$$

پس دامنه $f(x)$ برابر با $[-1, +\infty)$ است. پس دامنه $f(-x)$ برابر با $(-\infty, 1]$ است که $x \leq 1$ را می دهد.

۳۳. گزینه ۱ مسئله را در دو حالت $x \geq 0$ و $x < 0$ بررسی

می کنیم:

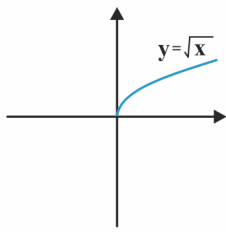
$$x^2 - |x| - 2 \geq 0 \xrightarrow{x \geq 0} x^2 - x - 2 \geq 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) \geq 0 \Rightarrow$$

$$x \geq 2 \text{ یا } x \leq -1 \xrightarrow{x \geq 0} x \geq 2 \text{ I}$$

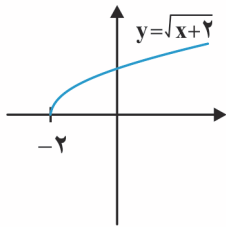
$$x^2 - |x| - 2 \geq 0 \xrightarrow{x < 0} x^2 + x - 2 \geq 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) \geq 0 \Rightarrow$$

$$x \leq -2 \text{ یا } x \geq 1 \xrightarrow{x < 0} x \leq -2 \text{ II}$$

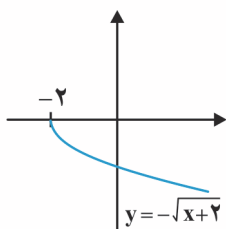
$$\xrightarrow{\text{I, II}} x \geq 2 \text{ یا } x \leq -2$$



۳۸. **قرینه ۲** نمودار $y = \sqrt{x}$ به صورت مقابل است:

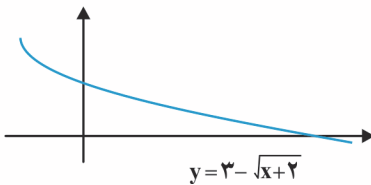


نمودار $y = \sqrt{x}$ را ۲ واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا $y = \sqrt{x+2}$ حاصل شود:



نمودار $y = \sqrt{x+2}$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا $y = -\sqrt{x+2}$ حاصل شود:

نمودار $y = -\sqrt{x+2}$ را ۳ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا $y = 3 - \sqrt{x+2}$ حاصل شود:



۳۹. **قرینه ۲** ابتدا دامنه تابع را در نظر می‌گیریم:

$$\sqrt{1-x^2} \rightarrow 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow (1-x)(1+x) \geq 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

برای برد تابع داریم:

$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x^2 \leq 0$$

$$0 \leq 1-x^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq y \leq 1$$

پس برد تابع $[0, 1]$ است.

۴۰. **قرینه ۲** $(x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 \geq 2$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 3} \geq \sqrt{2} \Rightarrow f(x) \geq \sqrt{2} \Rightarrow R_f = [\sqrt{2}, +\infty)$$

۴۱. **قرینه ۲** دامنه دو تابع برابر باید برابر باشند.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{x}{x+2}} \Rightarrow \frac{x}{x+2} \Rightarrow \frac{x}{x+2} \geq 0 \Rightarrow \\ D_f &= (-\infty, -2) \cup [0, +\infty) \\ g(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} \Rightarrow x \geq 0, x > -2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow D_g = [0, +\infty) \\ &\Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g \end{aligned} \right\}$$

۳۴. **قرینه ۲** به دلیل $\sqrt{x}$ متوجه می‌شویم که $x \geq 0$ ، سپس مسئله را در دو حالت $x = 0$ و $x > 0$ بررسی می‌کنیم. ابتدا حالت $x > 0$ را بررسی می‌کنیم:

$$\sqrt{x} > 0 \rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{x} \rightarrow x - \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \geq 0$$

$$\sqrt{x} - 1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \quad \text{I}$$

$$\text{I} \quad x - \sqrt{x} < x \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{x} < \sqrt{x} \Rightarrow -\sqrt{x} - \sqrt{x} > -\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow x - \sqrt{x} - \sqrt{x} > x - \sqrt{x} \xrightarrow{x - \sqrt{x} \geq 0} x - \sqrt{x} - \sqrt{x} \geq 0$$

پس $\sqrt{x} - \sqrt{x} - \sqrt{x}$ به ازای $x \geq 1$ تعریف می‌شود. سپس حالت $x = 0$ را بررسی می‌کنیم:

$$f(0) = \sqrt{0 - \sqrt{0} - \sqrt{0}} \Rightarrow \text{تعریف می‌شود}$$

با توجه به I نتیجه می‌شود که دامنه تابع $\{0\} \cup [1, +\infty)$ است.

۳۵. **قرینه ۱**

$$f(x) = a + \sqrt{x+b} \Rightarrow x+b \geq 0 \Rightarrow x \geq -b \Rightarrow$$

$$D_f = [-b, +\infty) \Rightarrow b = 4$$

$$\sqrt{x+b} \geq 0 \Rightarrow a + \sqrt{x+b} \geq a \Rightarrow R_f = [a, +\infty) \Rightarrow a = -3$$

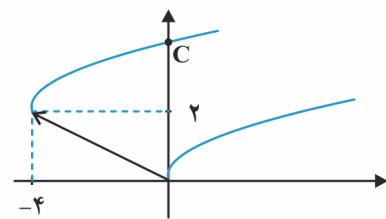
پس با توجه به ضابطه $f(x)$ ، نقطه تلاقی تابع با محور x ها را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = -3 + \sqrt{x+4} \xrightarrow{f(x)=0} -3 + \sqrt{x+4} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+4} = 3 \Rightarrow x = 5$$

۳۶. **قرینه ۲** با توجه به شکل، متوجه می‌شویم که نمودار

$y = a + \sqrt{x+b}$ از انتقال نمودار $y = \sqrt{x}$ به اندازه ۴ واحد به چپ و ۲ واحد به بالا به دست آمده است:



$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{۴ واحد به چپ}} y = \sqrt{x+4} \xrightarrow{\text{۲ واحد به بالا}} y = 2 + \sqrt{x+4}$$

$$y = 2 + \sqrt{x+4} \Rightarrow a = 2, b = 4$$

برای نقطه $(0, C)$ داریم:

$$y = 2 + \sqrt{x+4} \xrightarrow{(0, C)} C = 2 + \sqrt{4} \Rightarrow C = 4$$

۳۷. **قرینه ۲** تابع از نقاط $(0, 1)$ و $(-5, 0)$ گذشته است، پس:

$$y = a + \sqrt{x+b} \xrightarrow{(0, 1)} a + \sqrt{b} = 1 \Rightarrow \sqrt{b} = 1 - a$$

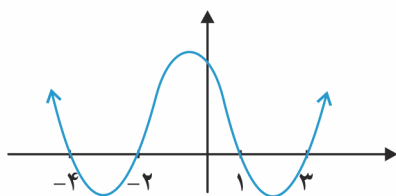
$$\Rightarrow b = 1 - 2a + a^2 \quad \text{I}$$

$$y = a + \sqrt{x+b} \xrightarrow{(-5, 0)} a + \sqrt{b-5} = 0 \Rightarrow \sqrt{b-5} = -a$$

$$\Rightarrow b = 5 + a^2 \quad \text{II}$$

$$\text{I, II} \rightarrow 1 - 2a = 5 \Rightarrow a = -2$$

$$1 = a + \sqrt{b} \xrightarrow{a=-2} -2 + \sqrt{b} = 1 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow ab = -18$$



با توجه به عبارت $\frac{1}{\sqrt{(x+1)f(x)}}$ متوجه می‌شویم که $(x+1)f(x) > 0$ باشد، و با توجه به جدول تعیین علامت داریم:

$$(x+1)f(x) > 0 \Rightarrow (-4, -2) \cup (-1, 1) \cup (3, +\infty)$$

تابع جزء صحیح

قرن ۴۵

$$\begin{aligned} \left[-\frac{5}{2}\right] &= [-2, 5] = -3 \Rightarrow \left[\left[-\frac{5}{2}\right]\right] = 3 \\ \left[\frac{3}{2}\right] &= [1, 5] = 1 \Rightarrow \left[1 - \frac{3}{2}\right] = 1 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \left[\left[-\frac{5}{2}\right]\right] - \left[1 - \frac{3}{2}\right] = 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

قرن ۴۶

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \approx 1,7 \Rightarrow 1 - \sqrt{3} \approx -0,7 \Rightarrow -1 < 1 - \sqrt{3} < 0 \Rightarrow \\ 0 < (1 - \sqrt{3})^2 < 1 \Rightarrow 0 < (1 - \sqrt{3})^2 < 1 \Rightarrow [(1 - \sqrt{3})^2]^0 &= 0 \end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{[x]-1}} \Rightarrow [x]-1 > 0 \Rightarrow [x] > 1 \Rightarrow x \geq 2$$

قرن ۴۸

$$\frac{x-1}{4-x} > 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x-4} < 0 \Rightarrow 1 < x < 4 \Rightarrow 1 < \sqrt{x} < 2 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 1$$

$$\left[\frac{x}{2}\right] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{2} < 2 \Rightarrow 2 \leq x < 4$$

$$A = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| \xrightarrow{x \geq 2} A = x-2$$

$$B = \sqrt{x^2 - 8x + 16} = \sqrt{(x-4)^2} = |x-4| \xrightarrow{x < 4} B = 4-x$$

$$\Rightarrow A+B = x-2+4-x = 2$$

در هر تابع بررسی می‌کنیم مخرج در کجا صفر می‌شود.

$$f(x): \left[\frac{x^2}{4}\right] = 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^2}{4} < 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{4} \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \\ \frac{x^2}{4} < 1 \Rightarrow x \in (-2, 2) \end{cases}$$

$$\cap \rightarrow x \in (-2, 2) \Rightarrow D_f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$g(x): \left[\frac{x^2-4}{5}\right] = 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^2-4}{5} < 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2-4}{5} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \\ \frac{x^2-4}{5} < 1 \Rightarrow x \in (-3, 3) \end{cases}$$

$$\cap \rightarrow x \in (-3, -2] \cup [2, 3) \Rightarrow D_g = (-\infty, -3] \cup (-2, 2) \cup [3, +\infty)$$

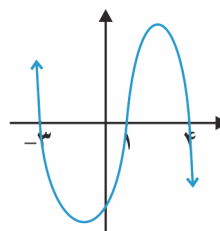
$$\left. \begin{aligned} p(x) &= \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^2+1} \xrightarrow{x^2+1 > 0} x \geq 0 \Rightarrow D_p = [0, +\infty) \\ q(x) &= \sqrt{x^3+x} = \sqrt{x(x^2+1)} \Rightarrow x(x^2+1) \geq 0 \xrightarrow{x^2+1 > 0} x \geq 0 \Rightarrow D_q = [0, +\infty) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow D_p = D_q$$

$$p(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^2+1} = \sqrt{x(x^2+1)} = \sqrt{x^3+x} = q(x) \Rightarrow p=q$$

جدول تعیین علامت عبارت $xf(x)$ را در نظر می‌گیریم:

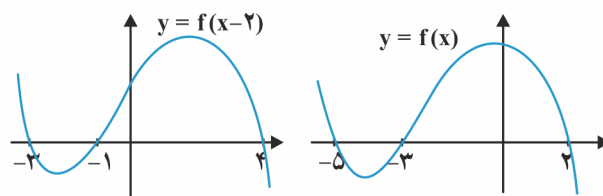
	-3	0	1	4	
x	-	-	0	+	+
f(x)	+	0	-	0	-
xf(x)	-	0	+	0	-



باید $xf(x) \geq 0$ باشد، با توجه به جدول تعیین علامت داریم:

$$xf(x) \geq 0 \Rightarrow [-3, 0] \cup [1, 4]$$

ابتدا نمودار را ۲ واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار $y = f(x)$ به دست آید.



حل جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم:

	-5	-3	0	2	
x	-	-	-	0	+
f(x)	+	0	-	0	+
xf(x)	-	0	+	0	-

$$xf(x) \geq 0 \Rightarrow x \in [-5, -3] \cup [0, 2]$$

جدول تعیین علامت عبارت $(x+1)f(x)$ را در نظر می‌گیریم:

	-4	-2	-1	1	3	
x+1	-	-	-	0	+	+
f(x)	+	0	-	0	+	+
(x+1)f(x)	-	0	+	0	-	+

۵۵. تابع را به صورت چند ضابطه‌ای در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = x(3 - [x]) = \begin{cases} 3x & 0 \leq x < 1 \\ 2x & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} a \rightarrow y = 2x \xrightarrow{x=1} y = 2 \Rightarrow a = 2 \\ c \rightarrow y = 2x \xrightarrow{x=2} y = 4 \Rightarrow c = 4 \\ b \rightarrow y = 3x \xrightarrow{x=1} y = 3 \Rightarrow b = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a+c}{b} = \frac{2+4}{3} = 2$$

$$\left. \begin{aligned} x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = 0 \\ x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به ضابطه بالا، نمودار گزینه ۳ درست است.

$$[x] + [-x] = 0 \text{ یا } -1$$

$$f(x) = [x+2] + [-x] = [x] + 2 + [-x] = \frac{[x] + [-x]}{1} + 2 = 1 \text{ یا } 2$$

یا -۱

$$[3x-2] = -4 \Rightarrow -4 \leq 3x-2 < -3 \Rightarrow -2 \leq 3x < -1 \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq x < -\frac{1}{3}$$

۵۹. در دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = 0$

$$2[x] + [1-x] = 2 \Rightarrow 2[x] + 1 + [-x] = 2 \Rightarrow [x] + [x] + [-x] = 1$$

$$\xrightarrow{I} [x] = 1 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = 1$$

حالت دوم: $x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = -1$

$$2[x] + [1-x] = 2 \Rightarrow 2[x] + 1 + [-x] = 2 \Rightarrow [x] + [x] + [-x] = 1$$

$$[x] - 1 = 1 \Rightarrow [x] = 2 \xrightarrow{x \notin \mathbb{Z}} x \in (2, 3)$$

۶۰. چون $2x$ عددی صحیح است، نتیجه می‌گیریم یا x عددی صحیح است یا به اندازه $\frac{1}{4}$ از عددی صحیح بیش‌تر است. با فرض $K \in \mathbb{Z}$ ،

دو حالت را بررسی می‌کنیم:

$$x = K \rightarrow 2x + [x] = 1 \Rightarrow 2K + K = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{3} \xrightarrow{K \in \mathbb{Z}} \text{ قابل قبول نیست.}$$

$$x = K + \frac{1}{4} \rightarrow 2x + [x] = 1 \Rightarrow 2K + 1 + K = 1 \Rightarrow K = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

۶۱. فرض می‌کنیم K عددی صحیح باشد، مسئله را در سه حالت:

$$K + \frac{2}{3} \leq x < K + 1 \text{ و } K + \frac{1}{3} \leq x < K + \frac{2}{3}, K \leq x < K + \frac{1}{3}$$

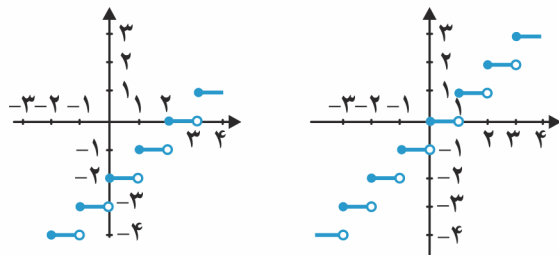
بررسی می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} K \leq x < K + \frac{1}{3} \Rightarrow [x] = K \Rightarrow 3[x] = 3K \\ 3K \leq 3x < K + 1 \Rightarrow [3x] = 3K \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3[x] = [3x]$$

$$K + \frac{1}{3} \leq x < K + \frac{2}{3} \Rightarrow$$

۵۱. $f(x) = [x-3] + a = [x] + a - 3$

اکنون نمودارهای دو تابع $g(x) = [x]$ و $f(x)$ را بررسی می‌کنیم:



با توجه به مقایسه نمودار، متوجه می‌شویم که نمودار $f(x)$ انتقال یافته نمودار $g(x)$ به اندازه ۲ واحد به سمت پایین است:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= [x] + a - 3 \\ f(x) &= g(x) - 2 = [x] - 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a - 3 = -2 \Rightarrow a = 1$$

$$x + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

پس مخرج به ازای $x \in \mathbb{Z}$ برابر با صفر می‌شود، در نتیجه دامنه به صورت $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ است. اگر $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ باشد، داریم:

$$f(x) = \frac{-x}{[x] + [-x]} = \frac{-x}{-1} = x$$

پس ضابطه $f(x) = x$ را داریم، به طوری که نقاط به طول عدد صحیح در دامنه نیستند.

$$x \in (-2, -\sqrt{3}) \rightarrow [x^2] = 3$$

$$x \in (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}) \rightarrow [x^2] = 2$$

$$x \in (-\sqrt{2}, -1) \rightarrow [x^2] = 1$$

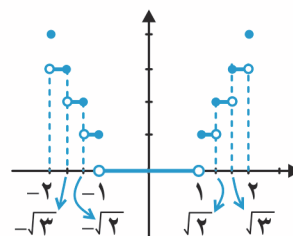
$$x \in (-1, 1) \rightarrow [x^2] = 0$$

$$x \in [1, \sqrt{2}) \rightarrow [x^2] = 1$$

$$x \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}) \rightarrow [x^2] = 2$$

$$x \in [\sqrt{3}, 2) \rightarrow [x^2] = 3$$

پس نمودار به شکل زیر می‌شود:



۵۴. تابع را به صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = x[2x] = \begin{cases} -x & -\frac{1}{4} < x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ x & \frac{1}{4} \leq x < 1 \end{cases}$$

با توجه به ضابطه بالا، گزینه ۲ درست است.

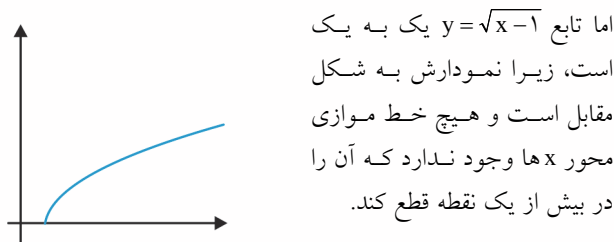
۶۷. گزینه ۲ در یک تابع یک به یک، نباید هیچ خطی موازی محور x ها وجود داشته باشد که تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند. این موضوع تنها در گزینه ۴ مشاهده می شود.

۶۸. گزینه ۲

یک به یک نیست $\Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=1 \\ x=-1 \Rightarrow y=1 \end{cases}$: گزینه (۱)

یک به یک نیست $\Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=1 \\ x=-1 \Rightarrow y=1 \end{cases}$: گزینه (۲)

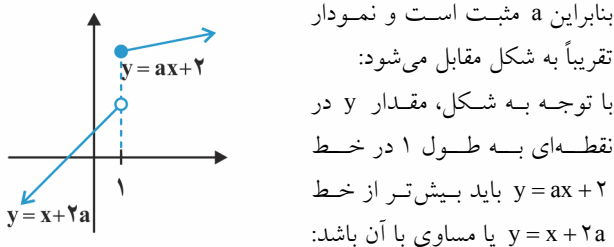
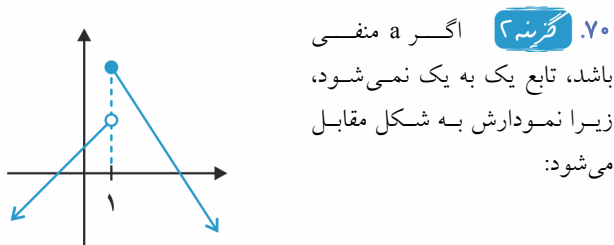
یک به یک نیست $\Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=1 \\ x=-1 \Rightarrow y=1 \end{cases}$: گزینه (۴)



۶۹. گزینه ۲ تابع f را به این صورت در نظر می گیریم:

$$f: \{(1, a), (2, b), (3, c), \dots, (9, i)\}$$

چون تابع یک به یک است، نتیجه می گیریم که مقدار هیچ کدام از حروف $a, b, c, \dots, i$ با هم برابر نیست. پس $(a, b, c, \dots, i)$ جایگشتی از اعداد $(1, 2, 3, \dots, 9)$ است، تعداد جایگشت ها می شود ۹!



$$\begin{cases} y = x + 2a \xrightarrow{x=1} y = 1 + 2a \\ y = ax + 2 \xrightarrow{x=1} y = a + 2 \end{cases} \Rightarrow 1 + 2a \leq a + 2 \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow 0 < a \leq 1$$

۷۱. گزینه ۲

$$f(x) = a^2x - 4ax + 3 = (a^2 - 4a)x + 3$$

پس f یک تابع خطی است. یک تابع خطی یک به یک است. مگر این که تابع ثابت باشد، پس ضریب x باید صفر باشد:

$$a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a(a - 4) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ یا } 4$$

$$\begin{aligned} [x] = K &\Rightarrow 3[x] = 3K \\ 3K + 1 &\leq 3x < 3K + 2 \Rightarrow [3x] = 3K + 1 \\ [x] = K &\Rightarrow 3[x] = 3K \\ 3K + 2 &\leq 3x < 3K + 3 \Rightarrow [3x] = 3K + 2 \\ &\Rightarrow 3[x] \neq [3x] \end{aligned}$$

پس تنها حالت $K \leq x < K + \frac{1}{3}$ پاسخ مسئله است.

۶۲. گزینه ۲ فرض می کنیم K عددی صحیح باشد، مسئله را در دو حالت $K + \frac{1}{3} \leq x < K + 1$ و $K \leq x < K + \frac{1}{3}$ بررسی می کنیم:

$$\begin{aligned} [x] = K &\Rightarrow K + \frac{1}{3} \leq x < K + 1 \Rightarrow [x + \frac{1}{3}] = K \\ \Rightarrow [x] = [x + \frac{1}{3}] \\ [x] = K &\Rightarrow K + 1 \leq x < K + \frac{3}{2} \Rightarrow [x + \frac{1}{2}] = K + 1 \\ \Rightarrow [x] \neq [x + \frac{1}{2}] \end{aligned}$$

پس باید $K \leq x < K + \frac{1}{3}$ باشد، بنابراین:

$$\begin{aligned} 2[x] = 2K \\ 2K \leq 2x < 2K + 1 \Rightarrow [2x] = 2K \\ \Rightarrow [2x] = 2[x] \end{aligned}$$

۶۳. گزینه ۲ فرض می کنیم $a = K + t$ که در آن $[a] = K$ و در نتیجه $0 \leq t < 1$ ، پس:

$$\begin{aligned} f(a) = a + [a] = K + t + K = 2K + t \\ f(a) = \frac{V}{3} \Rightarrow 2K + t = \frac{V}{3} \Rightarrow 2K + t = 2 + \frac{1}{3} \Rightarrow K = 1, t = \frac{1}{3} \\ a = K + t = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

درس دوم: آشنایی با برخی از ویژگی های توابع

۱. تابع یک به یک

$$\begin{aligned} (m, 3) &\Rightarrow m = -1 \\ (-1, 3) &\xrightarrow{m=-1} (-2, a) \\ (-2, 2) &\Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

۶۵. گزینه ۲

$$\begin{aligned} (2, 5) &\Rightarrow m^2 - m = 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2 \text{ یا } -1 \\ (m^2 - m, 5) &\Rightarrow \text{تابع نیست} \\ m = 2 &\Rightarrow (3, 1) \\ m = -1 &\Rightarrow (3, -1) \end{aligned}$$

۶۶. گزینه ۲

$$\begin{aligned} (a^2, 4) &\Rightarrow a^2 = 6 + a \Rightarrow a^2 - a - 6 = 0 \\ (6 + a, 4) &\Rightarrow (a - 3)(a + 2) \Rightarrow a = 3 \text{ یا } -2 \end{aligned}$$

اگر $a = 3$ باشد، داریم: تابع نیست $\Rightarrow (9, 4) \Rightarrow (9, 7)$
ولی اگر $a = -2$ باشد، تابعی یک به یک داریم.