

سرشناسه: منصف شکری، علی

عنوان: آمار و مدل سازی

مؤلفان: علی منصف شکری - آرش عمید

مشخصات نشر: تهران: انتشارات بین المللی گاج؛ ۱۳۹۵.

مشخصات ظاهری: ۶۴ ص. مصور (رنگی)، نمودار (رنگی).

فروست: این کتاب از مجموعه کتاب های خط ویژه گاج می باشد.

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۳۵۹-۱۴۲-۴

بها: ۶۰۰۰ تومان

نوبت چاپ: هشتم.

وضعیت فهرست نویسی: فیای مختصر.

یادداشت: این مدرک در آدرس <http://opac.nla.ir> قابل دسترسی است.

شناسه افزوده: عمید، آرش

شماره ی کتابشناسی ملی: ۳۷۲۰۷۵۳



ناشر کتاب های آموزشی با طرحی متفاوت

[ناشر: انتشارات بین المللی گاج]

[مدیر مسئول: مهندس ابوالفضل جوکار]

[واحد پژوهش و برنامه ریزی کتاب های: خط ویژه]

[مدیران تألیف: محمد جوکار - علیرضا مزرعتی - علیرضا شعبانی نصر]

[عنوان کتاب: آمار و مدل سازی]

[مؤلفان: مهندس علی منصف شکری - مهندس آرش عمید]

[برنامه ریزی و نظارت بر تألیف: علیرضا شعبانی نصر]

[بازبینی علمی: لیلا سمیعی عارف]

[سرپرست واحد حروف نگاری: سعیده قاسمی]

[صفحه آرا: ملاحه بهمنی - فرزانه کوششی]

[حروف نگاران: ساناز عاشقی - شبنم بیدی - شهلا تقی نژاد]

[طراح شکل: زینب آجورلو]

[طراح جلد: منصور سمواتی]

[آماده سازی و نظارت بر چاپ و توزیع: گاج] + [لیتوگرافی: امین]

[چاپخانه و صحافی: سپند] + [ناظر چاپ: علی مزرعتی]

[نوبت چاپ: هشتم (۱۳۹۵)] + [شمارگان: ۳۰۰۰ نسخه]

[دفتر مرکزی: تهران، خیابان انقلاب، بین چهار راه ولیعصر (عج) و خیابان فلسطین، شماره ۹۱۹]

[تلفن: ۶۴۲۰ - ۰۲۱]

[سرویس پیام کوتاه (SMS): ۱۰۰۰۴۲۵] + [صندوق پستی: ۳۷۷ - ۱۳۱۴۵]

[پایگاه اینترنتی: [www.gaj.ir](http://www.gaj.ir)]

[قیمت: ۶۰۰۰ تومان]

+++ دوست عزیز جهت آگاهی از آخرین اخبار و اطلاعات کتاب های منتشر شده

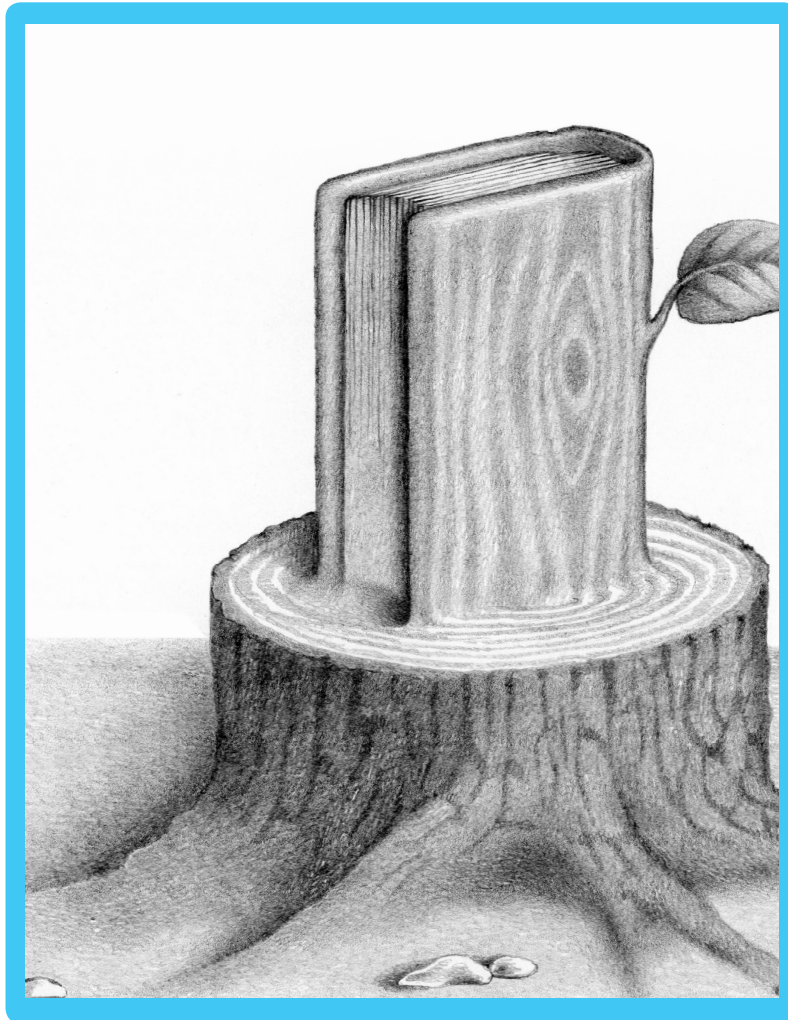
لطفاً پایه و رشته ی تحصیلی خود را به شماره ی ۱۰۰۰۴۲۵ SMS نمایید.

توجه: به موجب ماده ی ۵ قانون حمایت از حقوق مؤلفان، مصنفان و هنرمندان مصوب ۱۳۴۸/۱۰/۱۱

کلیه ی حقوق این کتاب برای انتشارات بین المللی گاج محفوظ می باشد و هیچ شخص حقیقی یا حقوقی

مق استفاده از آن را ندارد و متحملین به موجب این قانون تمت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

## سخن ناشر



بخت محترمی قطع می شود / اگر میز مدیری نشود / اگر پوستر تبلیغاتی نامزدی نشود  
اگر دستمال کاغذی نشود / اگر کارتن چپیس و پفک نشود  
کتابی جوانه خواهد زد / به احترام درخت

## مقدمه مؤلفین

در این کتاب ما هر آن چه در توان داشتیم و محصول سال‌ها تجربه‌مان در تدریس این درس بود در معرض دید شما قرار دادیم. هر آن چه باید می‌گفتیم، گفتیم و هر آن چه دانستن آن شما را از خط کنکور دور می‌کرد، نگفتیم و مثل بندبازی روی لبه‌ی استاندارد حرکت کردیم. کار دشواری بود، اما دشوارترین قسمت کار، «نگفتن‌ها» بود، نه «گفتن‌ها». قسمتی که آن را در این کتاب هرگز نخواهید دید و برای همیشه دور از دیدگان شما خواهد ماند تا مسیر شما را در رسیدن به هدف از خود، پل زده باشیم. پس، از ما عبور کن ...

### و سپاس از همه‌ی کسانی که دست ما را فشردند و پایه‌پای ما دویزند.

۱. مدیریت محترم انتشارات بین‌المللی گاج، جناب آقای مهندس ابوالفضل جوکار
۲. مدیران واحد تألیف، جناب آقایان محمد جوکار، علیرضا مزرعتی، علیرضا شعبانی نصر
۳. سرپرست واحد فنی انتشارات، سرکار خانم صغری قربانی.
۴. خانم لیلا سمیعی عارف، آقای محمدحسن دین‌دارلو که در ویراستاری و بازبینی این کتاب ما را یاری فراوان کردند.
۵. مشاوران محترم آقایان مهندس امید نقوی، مهندس علی ثبات، مهندس حمیدرضا مهدویانی، مهندس علی یگانه، سید محسن جلال‌زاده و خانم‌ها زهره یکتا، مریم احمدی، مهندس لیلا ثابت که ما را یاری کردند.
۶. آقایان مهندس بابک نهرینی و مهندس محمد عسکری و مهندس نوید اورازانی شجاعی که در نظارت علمی این کتاب گام به گام با ما همراه بودند...

## مخاطبان این کتاب چه کسانی هستند

این کتاب نه سیاه است، نه سفید و نه خاکستری و مخاطبان آن نه ممتازند، نه ضعیف و نه متوسط. این کتاب، رنگی است و طیفی از رنگ‌ها را در خود دارد و ویژه‌ی همه‌ی دانش‌آموزان طراحی شده است و برای هر دسته از آن‌ها ناگفته‌هایی دارد.

### داوطلبان رشته‌ی ریاضی

از این درس در کنکور سراسری رشته‌ی ریاضی همواره ۲ تست مطرح می‌شود، با توجه به این که میانگین درس ریاضی در رشته‌ی ریاضی در چند سال اخیر ۲ درصد بوده است، لذا حل همین ۲ تست نیز در این درس کافی است تا درصد شما را بالا ببرد، از آنجایی که دانش‌آموزان منبع مناسب و فشرده‌ای برای این درس ندارند، این کتاب می‌تواند حل ۲ تست را در کنکور برای شما تضمین کند، ضمن این‌که در یک زمان کوتاه می‌توانید تمامی سؤالات مطرح شده در کنکور را با ترتیب آموزشی در این کتاب دیده و با سلیقه‌ی طراحان آشنا شوید.

### داوطلبان رشته‌ی تجربی

از آنجا که تعداد تست‌های درس ریاضی در رشته‌ی تجربی ۳۰ تست می‌باشد، لذا پاسخ دادن به ۲ تست آمار، حدوداً ۷ درصد نمره‌ی درس ریاضی شما را نسبت به اکثر داوطلبانی که به این درس پاسخ نمی‌دهند بالاتر می‌برد، پس زدن این ۲ تست می‌تواند تأثیر به‌سزایی در قبولی رشته‌ی مورد علاقه‌ی شما داشته باشد. ضمن این‌که حتماً می‌دانید میانگین درس ریاضی در رشته‌ی تجربی زیر ۵ درصد است، پس غافل نشوید.

### داوطلبان رشته‌ی انسانی

از آنجا که تعداد تست‌های ریاضی مطرح شده در کنکور سراسری رشته‌ی انسانی ۲۰ تست می‌باشد، پس از ۳ سؤالی که از درس آمار و مدل‌سازی در کنکور مطرح می‌شود، نمی‌توان گذشت. چرا که این ۳ سؤال می‌تواند ۱۵ درصد نمره‌ی شما را نسبت به سایر داوطلبانی که به این درس در کنکور سراسری اهمیت نمی‌دهند افزایش دهد، پس با تمام سعی و تلاش و تمرین و ممارست این ۳ سؤال را جدی بگیرید و از آن غافل نشوید.

## ویژگی‌های خط ویژه

هدف اصلی این کتاب، دور کردن ذهنیت دانش‌آموزان از مطالب حاشیه‌ای و متمرکز کردن آن‌ها در خط اصلی کنکور است تا به این باور برسند که تست‌های آمار و مدل‌سازی در کنکور واقعاً قالبی تکرارپذیر دارند و فقط نیازمند تمرین و ممارست می‌باشند.

## و اما برخی از ویژگی‌های کتاب هندسه (۲) خط ویژه

### ۱. کادر نکات کاربردی و پرتکرار

در این کتاب ما برای شما درسنامه‌های کوتاه، جمع و جور، مهندسی‌شده، کم‌فرمول و کار راه‌انداز طراحی کردیم که در عین کوتاهی تمام مطالب کتاب درسی را پوشش می‌دهد و فقط به درد کنکور سراسری می‌خورد و از حاشیه‌سازی‌های کنکورهای آزمایشی غیر استاندارد بسیار فاصله دارد و شما را از پرداختن به روابط غیرضروری در کتاب‌ها و جزوه‌های گردن‌کلفت واقعاً بی‌نیاز می‌کند.

### ۲. پاسخ‌های تشریحی

پاسخ‌های تست‌ها در این کتاب به شیوه‌ی منحصر به فرد گام به گام، ارایه شده است که جواب را مانند یک پازل رفته رفته کامل می‌کند تا دانش‌آموزان ضعیف و متوسط نیز بتوانند به راحتی مسیر حل مسأله را پی‌گیری کنند.

### ۳. بررسی و تحلیل تمام سؤالات سراسری داخل و خارج کشور

تمامی تست‌های سراسری داخل و خارج از سال ۸۵ به بعد که درس آمار به‌طور مستمر در کنکور سراسری جای خود را باز کرد را با ترتیبی منطقی که کار یادگیری و تسلط را در یک روال خطی، آسان می‌کند، مرتب کردیم و مورد تحلیل و بررسی قرار دادیم و در ضمن از کنکورهای قبل از سال ۸۵ که به ندرت در آن‌ها تست‌های آمار دیده می‌شود هم غافل نشدیم، چون بعضی از آن‌ها هنوز می‌توانند تکرار شوند. این تست‌های هرچند قدیمی ولی امروزی را نیز به کتاب خودمان دعوت کردیم.

### ۴. کادرهای جمع‌بندی تحت عنوان حرف آخر

در حرف آخر ما آن‌چه را که به عنوان توصیه در سر کلاس به دانش‌آموزان خود می‌گوییم، با شما در میان گذاشته‌ایم، تا مواردی که کنکور خیلی به آن علاقه دارد را با دقت و وسواس بیشتری مطالعه نمایید. این توصیه‌ها را با دقت بیشتری بخوانید.

### ۵. آزمون‌های جامع به سبک کنکور سراسری

در انتهای کتاب ۳ آزمون جامع به سبک کنکور سراسری داخل و خارج چند سال اخیر تمامی رشته‌ها (ریاضی، تجربی و انسانی) شبیه‌سازی کرده‌ایم که حل آن‌ها را شدیداً به شما توصیه می‌کنیم

**فصل ۱**

اندازه‌گیری و مدل‌سازی ..... ۷

**فصل ۲**

جامعه و نمونه ..... ۹

**فصل ۳**

متغیرهای تصادفی ..... ۱۱

**فصل ۴**

دسته‌بندی داده‌ها و جدول فراوانی ..... ۱۳

**فصل ۵**

نمودارها و تحلیل داده‌ها ..... ۲۰

**فصل ۶**

شاخص‌های مرکزی ..... ۲۸

**فصل ۷**

شاخص‌های پراکندگی ..... ۴۴

**آزمون‌ها**

دوره آزمون جامع (شبه‌سازی شده با کنکورهای اخیر) ..... ۵۸

پاسخ آزمون جامع ..... ۶۲

## فصل اول: اندازه‌گیری و مدل‌سازی



**خط ویژه** به فصل اول کتاب آمار و مدل‌سازی تحت عنوان اندازه‌گیری و مدل‌سازی خوش آمدید. این فصل بسیار کوتاه، تاکنون فقط مورد توجه طراحان رشته‌ی انسانی بوده است اما دلیلی وجود ندارد که طراحان رشته‌های ریاضی و تجربی در آینده از این فصل سوالی طرح نکنند. در هر صورت از ما گفتن بود ...

### اندازه‌گیری و مدل‌سازی

۱

- ۱ **مدل‌سازی:** بیان مسأله به زبان ریاضی یعنی به زبان اعداد و ارقام را مدل‌سازی ریاضی گویند. هرچه زبان ریاضی به کار گرفته شده ساده‌تر، ابتدایی‌تر و نتیجه‌ی کار به پدیده‌ی موردنظر نزدیک‌تر باشد، مدل‌سازی با ارزش‌تر است.
  - ۲ **اندازه‌گیری:** تخصیص معیار عددی به یک صفت را اندازه‌گیری می‌گویند که اولین قدم برای رسیدن به اطلاعات عددی مورد نیاز در مدل‌سازی ریاضی است.
  - ۳ **خطای اندازه‌گیری (E):** در اندازه‌گیری همواره خطایی وجود دارد که همان تفاضل مقدار واقعی و مقدار اندازه‌گیری شده می‌باشد و مقدارش همیشه کم‌تر از واحد اندازه‌گیری است.
- تذکر:** در جاهایی که درجه‌ی خطا حداقل ۲ است، می‌توان از آن به دلیل کوچکی زیاد، صرف‌نظر کرد. مثلاً می‌توان از خطاهایی نظیر  $E^2$ ،  $E^3$  و  $E_1E_2$  و ... صرف‌نظر کرد.

### ۱ مدل‌سازی ریاضی چیست؟

- ۱ بیان مسأله به زبان ریاضی
  - ۲ تقسیم‌بندی متغیرها
  - ۳ روش محاسبه
  - ۴ نمونه‌ای از سرشماری
- با توجه به مطالب ارائه شده در درسنامه، گزینه‌ی (۱) صحیح است.

داخل امتحانی ۸۶ پاسخ: ۱

### ۲ کدام نوع مدل‌سازی ریاضی با ارزش‌تر است؟

- ۱ خطای اندازه‌گیری برابر صفر
  - ۲ نتیجه‌ی حاصل همان پدیده‌ی موردنظر
  - ۳ فقط مفاهیم ریاضی ساده‌تر
  - ۴ مفاهیم ریاضی ساده‌تر - نتیجه به پدیده‌ی موردنظر نزدیک‌تر
- هر چه مفاهیم ریاضی به کار برده شده ساده‌تر و هم‌چنین نتیجه به پدیده‌ی مورد نظر نزدیک‌تر باشد، مدل‌سازی ریاضی با ارزش‌تر است.

داخل امتحانی ۸۷ پاسخ: ۴

### ۳ در مدل‌سازی ریاضی، خطای اندازه‌گیری چگونه است؟

- ۱ کم‌تر از واحد اندازه‌گیری
  - ۲ نزدیک به واحد اندازه‌گیری
  - ۳ کم‌تر از یک درصد مقدار اندازه‌گیری
  - ۴ صفر
- خطای اندازه‌گیری همواره از واحد اندازه‌گیری کم‌تر است. در ضمن، هیچ‌گاه خطای اندازه‌گیری صفر نمی‌شود.

خارج امتحانی ۸۷ پاسخ: ۱

### ۴ طول ضلع مربعی را برحسب سانتی‌متر اندازه‌گیری کرده‌ایم، مدل آن به صورت $L = 6 + E$ است. اگر این طول را برحسب میلی‌متر بیان کنیم، مدل آن چگونه است؟

- ۱  $L = 60 + \frac{1}{10}E$
- ۲  $L = 60 + 10E$
- ۳  $L = 60 + E$
- ۴ اندازه‌گیری مجدد انجام شود.

داخل امتحانی ۸۶ پاسخ: ۴

خطای  $E$  مربوط به زمانی است که اندازه‌گیری برحسب سانتی‌متر انجام شده بود. حالا که می‌خواهیم طول ضلع مربع را برحسب میلی‌متر بیان کنیم، حتماً خطای اندازه‌گیری،  $E'$  خواهد بود و هیچ ارتباطی بین  $E'$  و  $E$  وجود ندارد، یعنی نمی‌توان  $E'$  را برحسب  $E$  بیان کرد، پس باید اندازه‌گیری مجدد انجام شود.

در مدل سازی ریاضی برای مساحت دایره به قطر تقریبی ۱۰ واحد طول، اگر خطای اندازه گیری قطر کم تر از  $\frac{1}{6\pi}$  واحد طول باشد، خطای مساحت تقریباً کم تر از چند واحد مربع است؟

- (۱)  $\frac{5}{18}$  (۲)  $\frac{5}{12}$  (۳)  $\frac{5}{9}$  (۴)  $\frac{5}{6}$

گام ۱: می دانیم مساحت دایره به قطر  $d$  برابر  $S = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$  می باشد؛ ابتدا مدل مساحت را پیدا می کنیم. اگر  $d = 10 + E$  باشد، داریم:

$$S = \pi \left(\frac{10+E}{2}\right)^2 \Rightarrow S = \frac{\pi}{4} (10+E)^2 \Rightarrow S = \frac{\pi}{4} (100 + 20E + E^2) \Rightarrow S = 25\pi + \underline{5\pi E}$$

*فقطای مساحت*

گام ۲: با توجه به این که خطای اندازه گیری قطر یعنی  $E$ ، کم تر از  $\frac{1}{6\pi}$  است، داریم:

$$\text{خطای مساحت} = 5\pi E < 5\pi \times \frac{1}{6\pi} = \frac{5}{6}$$

مدل ریاضی اندازه گیری ضلع یک مربع به صورت  $a = 8 + E$  است، اگر مطمئن باشیم خطای اندازه گیری این طول کم تر از  $0.25$  واحد است، آن گاه خطای حاصل در مساحت مربع کم تر از کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

گام ۱: ابتدا به کمک مدل ضلع یعنی  $a = 8 + E$ ، مدل مساحت را به دست می آوریم:

$$S = (8 + E)^2 = 64 + \underline{16E} + E^2$$

*فقطای مساحت*

گام ۲: با توجه به این که خطای اندازه گیری طول، یعنی  $E$  از  $0.25$  واحد کم تر است، داریم:

$$\text{خطای مساحت} = 16E < 16 \times 0.25 = 4$$

در مدل سازی ریاضی برای حجم یک مکعب به ضلع تقریبی ۲ سانتی متر، اگر خطای حجم کم تر از یک سانتی متر مکعب باشد، حداکثر خطای اندازه گیری ضلع مکعب، چند میلی متر است؟

- (۱)  $0.6$  (۲)  $0.7$  (۳)  $0.8$  (۴)  $0.9$

گام ۱: فرض می کنیم مدل طول ضلع  $2 + E$  است، حال مدل حجم را به دست می آوریم:

$$\text{حجم مکعب} = (2 + E)^3 = 8 + \underline{12E} + \underline{6E^2} + E^3$$

*فقطای مهم*

گام ۲: می دانیم خطای اندازه گیری حجم از یک واحد آن، یعنی یک سانتی متر مکعب کم تر است، پس:

$$\text{خطای اندازه گیری ضلع از } 0.8 \text{ سانتی متر کم تر است.} \Rightarrow E < \frac{1}{12} = 0.08 < 1 \Rightarrow 12E < 1$$

گام ۳: در صورت سؤال این خطا را برحسب میلی متر می خواهد. می دانیم تبدیل خطایی که برحسب سانتی متر اندازه گیری شده به میلی متر امکان پذیر نیست و باید اندازه گیری مجدد انجام شود، اما با چشم پوشی از اشتباه طراح داریم:

$$\text{خطای ضلع برحسب میلی متر} = 0.8 \times 10 = 0.8$$

**صرف آخر:** تماماً با ما موافقت کنید که برای پاسخ گویی به تست های این فصل باید مفید، مساحت و حجم اشکال هندسی معروف نظیر مکعب، مکعب مستطیل، مستطیل، مربع، دایره و ... را بلد باشید. در ضمن توجه داشته باشید که اتفادهای  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  و  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$  نیز در این فصل کاربرد زیادی دارند.




---

---

---

---

---

---

---

---



## فصل دوم: جامعه و نمونه

**خط ویژه:** فصل دوم کتاب با عنوان جامعه و نمونه را در زیر می‌بینید. از این فصل، در رشته‌ی ریاضی سوالی زیره نشده است. اما می‌توان گفت که طراحان رشته‌های تجربی و انسانی سوالات این فصل را تمام کرده‌اند. پس اگر سوالی از این فصل، در کنکور ببینید، هتماً تکرار سوال‌های قبلی است. مطمئن باشید ...

### جامعه و نمونه

۱

**جامعه آماری:** مجموعه‌ای از افراد یا اشیاء است که می‌خواهیم موضوع یا موضوعاتی را درباره‌ی آن‌ها مطالعه کنیم. تعداد اعضای جامعه را اندازه‌ی جامعه می‌گوییم.

به دو روش می‌توان موضوع یا موضوعاتی را در جامعه‌ی آماری مورد مطالعه قرار داد که عبارتند از:

- ۱ **سرشماری:** اگر اندازه‌ی جامعه‌ی مورد مطالعه کوچک باشد، معمولاً مطالعه به صورت سرشماری انجام می‌شود. سرشماری یعنی تک تک افراد جامعه را مورد مطالعه قرار دهیم که در این راه معمولاً با مشکلاتی مواجه می‌شویم که مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از:
  - در دسترس نبودن تمام اعضای جامعه
  - وقت گیر بودن دسترسی به تمام اعضای جامعه
  - گران تمام شدن بررسی تمام اعضای جامعه
  - از بین رفتن جامعه در برخی از مطالعات

۲ **نمونه‌گیری:** اگر اندازه‌ی جامعه بزرگ باشد، مطالعات از طریق نمونه‌گیری انجام می‌شود. نمونه، زیر مجموعه‌ای از جامعه‌ی آماری است که بیان‌کننده‌ی ویژگی‌های اصلی جامعه می‌باشد. تعداد اعضای نمونه را اندازه‌ی نمونه می‌گوییم. در ضمن یادتان باشد که اندازه‌ی نمونه باید متناسب با اندازه‌ی جامعه باشد.

### ۱ در کدام بررسی، اندازه‌ی نمونه برابر اندازه‌ی جامعه است؟

- |                   |               |
|-------------------|---------------|
| ۱) نمونه‌ی تصادفی | ۲) دسته‌بندی  |
| ۳) سرشماری        | ۴) متغیر کیفی |

با توجه به توضیحات ارائه شده در درسنامه، گزینه‌ی (۳) صحیح است.

### ۲ در کدام مورد، عمل سرشماری انجام نشده است؟

- |  |                                     |
|--|-------------------------------------|
| ۱) تمام افراد جامعه مورد مطالعه قرار گیرد. | ۲) نمونه، برابر جامعه‌ی آماری       |
| ۳) اندازه‌ی نمونه برابر اندازه‌ی جامعه     | ۴) نمونه، زیرمجموعه‌ی جامعه‌ی آماری |

واضح است که گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) مصداق سرشماری می‌باشند.

### ۲ نمونه‌گیری به کمک ماشین حساب

در این روش به کمک ماشین حساب یک عدد تصادفی تولید می‌کنیم. عدد تصادفی، عددی بین صفر و یک است. سپس عدد به دست آمده را در اندازه‌ی جامعه‌ی مورد نظر ضرب کرده، قسمت اعشاری عدد حاصل را حذف و یک واحد به آن اضافه می‌کنیم. عددی که حاصل می‌شود، شماره‌ی فردی از جامعه است که به عنوان نمونه انتخاب می‌شود.

### ۳ برای انتخاب نمونه‌ی تصادفی بین ۱۵۰ نفر، عدد تصادفی به وسیله‌ی ماشین حساب ۰/۲۵۶ ظاهر شده است. شماره‌ی نمونه کدام است؟

- |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|
| ۳۷ (۱) | ۳۸ (۲) | ۳۹ (۳) | ۴۰ (۴) |
|--------|--------|--------|--------|

**گام ۱:** ابتدا عدد تصادفی را در اندازه‌ی جامعه ضرب می‌کنیم:

$$۰/۲۵۶ \times ۱۵۰ = ۳۸/۴$$

**گام ۲:** از قسمت اعشاری عدد به دست آمده صرف نظر کرده، سپس یک واحد به آن اضافه می‌کنیم. عدد حاصل شماره‌ی نمونه است.

$$۳۹ = \text{شماره‌ی نمونه} \Rightarrow ۳۸ + ۱ = ۳۹ \rightarrow \text{یک واحد اضافه می‌کنیم} \rightarrow ۳۸ \xrightarrow{\text{حذف قسمت اعشاری}} ۳۸/۴$$



۴ اندازه‌ی یک جامعه ۱۵۰ می‌باشد. برای انتخاب نمونه به اندازه‌ی ۲۴، به کمک ماشین حساب برنامه‌ریزی، عدد تصادفی ۰/۳۶۲ ظاهر می‌شود. شماره‌ی انتخاب شده، کدام است؟

- ۵۲ (۱)                      ۵۳ (۲)                      ۵۴ (۳)                      ۵۵ (۴)

گام ۱: ابتدا عدد تصادفی را در اندازه‌ی جامعه ضرب می‌کنیم:  
 $0.362 \times 150 = 54.3$   
 گام ۲: از قسمت اعشاری عدد به دست آمده صرف‌نظر کرده، سپس یک واحد به آن اضافه می‌کنیم. عدد حاصل شماره‌ی نمونه است:

$55 = \text{شماره‌ی نمونه} \Rightarrow 54 + 1 = 55$  *یک واحد اضافه می‌کنیم*  $\rightarrow$  ۵۴ *هزف قسمت اعشاری*  $\rightarrow$  ۵۴/۳

**توجه:** عبارت «برای انتخاب نمونه به اندازه‌ی ۲۴» تأثیری در حل تست ندارد. در واقع یک نمونه‌ی ۲۴ تایی می‌خواهیم که یکی از اعضای نمونه عضوی با شماره‌ی ۵۵ خواهد بود.

**صرف آخر:** تنها قسمت مناسباتی این فصل، همین نمونه‌گیری به کمک ماشین حساب است.

۳ داده و روش‌های جمع‌آوری آن

**داره:** نتایج حاصل از سرشماری یا نمونه‌گیری را داده گویند و به روش‌های زیر می‌توان آن را جمع‌آوری کرد:

- ۱ از طریق پرسش  $\left\{ \begin{array}{l} \text{پرسش شفاهی (مصاحبه)} \\ \text{پرسش‌نامه‌ی کتبی} \end{array} \right.$
- ۲ از طریق مشاهده و ثبت وقایع
- ۳ از طریق انجام آزمایش
- ۴ استفاده از داده‌های از پیش تهیه شده

۵ جمع‌آوری داده‌ها به کدام طریق مورد قبول نیست؟

- ۱) مصاحبه                      ۲) مشاهده  
 ۳) انجام آزمایش                      ۴) پرسش هدایت‌کننده

در جمع‌آوری داده‌ها نباید از پرسش‌های هدایت‌کننده استفاده کنیم.

۶ کدام طریق برای جمع‌آوری داده‌ها مناسب نیست؟

- ۱) مصاحبه                      ۲) الگوی خاص  
 ۳) مشاهده                      ۴) آزمایش

استفاده از الگوی خاص برای جمع‌آوری داده‌ها مناسب نیست.



یادداشت

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



## فصل سوم: متغیرهای تصادف

**خط ویژه** فصل سوم کتاب درسی با عنوان متغیرهای تصادفی فصلی بسیار کوتاه و پرسؤال در کنگور است. همه رشته‌ها در کنگور، سوالی از این فصل را تجربه کرده‌اند و احتمالاً باز هم تجربه خواهند کرد. پس هواستان باشد ...

### ۱ متغیر تصادفی و انواع آن

**متغیر تصادفی:** ویژگی خاصی از افراد جامعه یا نمونه است که می‌خواهیم آن را مورد بررسی قرار دهیم.

متغیرهای تصادفی به دو دسته‌ی متغیرهای تصادفی کمی و کیفی تقسیم می‌شوند:

**۱ متغیر تصادفی کمی:** متغیری است که قابل اندازه‌گیری می‌باشد، یعنی می‌توان به آن عددی نسبت داد. مانند تعداد غایبین کلاس یا وزن افراد. متغیرهای کمی خود به دو دسته‌ی زیر تقسیم می‌شوند:

**A متغیر کمی پیوسته:** متغیر کمی‌ای است که اگر بتواند دو مقدار  $a$  و  $b$  را بپذیرد هر مقداری بین  $a$  و  $b$  را نیز بتواند اختیار کند. مانند وزن افراد که هر عددی می‌تواند باشد.

**B متغیر کمی گسسته:** واضح است این متغیر، حتماً پیوسته نیست، یعنی نمی‌تواند هر عددی را بپذیرد. مانند تعداد غایبین کلاس که فقط می‌تواند مقادیری چون صفر، یک، دو و ... را بپذیرد. در یک کلام می‌توان گفت عددی که به یک متغیر کمی گسسته نسبت می‌دهیم از راه شمارش به دست می‌آید.

**۲ متغیر تصادفی کیفی:** متغیری است که قابل اندازه‌گیری نمی‌باشد و فقط نوع آن معلوم است، مانند مراحل تحصیلی یا گروه خونی افراد. متغیرهای کیفی خود به دو دسته‌ی زیر تقسیم می‌شوند:

**A متغیر کیفی ترتیبی:** این متغیرها نوعی ترتیب طبیعی دارند و شما می‌توانید آن‌ها را با هم مقایسه کنید، مانند میزان تحصیلات افراد.

**B متغیر کیفی اسمی:** در این متغیرها هیچ ترتیبی ملاحظه نمی‌شود و حالت‌ها قراردادی هستند، مانند گروه خونی افراد، رنگ چشم افراد و ...

### ۱ مراحل تحصیلی، متغیر تصادفی است. نوع آن کدام است؟

- ۱) کمی گسسته      ۲) کمی پیوسته      ۳) کیفی اسمی      ۴) کیفی ترتیبی

مراحل تحصیلی قابل اندازه‌گیری نیست و فقط نوع آن معلوم است پس متغیر کیفی است و هم‌چنین چون مراحل تحصیلی، ترتیب مشخصی دارد (دبستان، راهنمایی، دبیرستان و ...)، پس ترتیبی می‌باشد.

### ۲ قطر تنه‌ی درختان یک باغ، کدام نوع متغیر است؟

- ۱) کمی پیوسته      ۲) کمی گسسته      ۳) کیفی ترتیبی      ۴) کیفی اسمی

قطر تنه‌ی درخت، قابل اندازه‌گیری است و می‌تواند هر عددی باشد، پس متغیر کمی پیوسته است.

### ۳ نوع آلودگی هوا چگونه متغیری است؟

- ۱) کمی گسسته      ۲) کمی پیوسته      ۳) کیفی اسمی      ۴) کیفی ترتیبی

نوع آلودگی هوا قابل اندازه‌گیری نیست و هیچ ترتیب طبیعی ندارد، پس متغیر کیفی اسمی است. دقت کنید متغیرهایی که فقط نوع آن‌ها معلوم است متغیرهای کیفی هستند.

### ۴ میزان آلودگی هوا، کدام نوع متغیر است؟

- ۱) کمی - گسسته      ۲) کمی - پیوسته      ۳) کیفی - ترتیبی      ۴) کیفی - اسمی

میزان آلودگی هوا قابل اندازه‌گیری است و هر عددی می‌تواند باشد، پس متغیر کمی پیوسته است. دقت کنید میزان آلودگی هوا در تمرین ۲ صفحه‌ی ۳۹ کتاب درسی در کنار مواردی چون میزان پرداخت مالیات سالیانه و میزان بارندگی در یک شهر مطرح شده و این‌گونه تداعی می‌کند که کلمه‌ی میزان در کنار آلودگی، بیان آلودگی به زبان عدد و رقم است، نه این که مثلاً بگوییم آلودگی کم است یا زیاد است. پس به هیچ وجه نمی‌توان این متغیر را یک متغیر کیفی در نظر گرفت.

۵ گروه خونی افراد کدام نوع متغیر است؟

- (۱) کیفی - اسمی
- (۲) کیفی - ترتیبی
- (۳) کمی - پیوسته
- (۴) کمی - گسسته

گروه خونی نه قابل اندازه‌گیری است و نه هیچ ترتیب طبیعی در آن وجود دارد، پس متغیر کیفی اسمی است.

۶ تعدادی از دانش‌آموزان یک مدرسه، در هر روز یک ساعت جهت انجام کارهای فوق برنامه آمادگی دارند. نوع متغیر کدام است؟

- (۱) کمی گسسته
- (۲) کمی پیوسته
- (۳) کیفی ترتیبی
- (۴) کیفی اسمی

تعداد دانش‌آموزان مدرسه، متغیر کمی گسسته است.

۷ خطای اندازه‌گیری در کدام نوع متغیرها وجود دارد؟

- (۱) کمی گسسته
- (۲) کمی پیوسته
- (۳) کیفی ترتیبی
- (۴) کیفی اسمی

در صورت سؤال صحبت از اندازه‌گیری شده است، پس متغیر حتماً کمی است و خطای اندازه‌گیری مطمئناً در متغیر کمی پیوسته رخ می‌دهد که آن را به کمک ابزاری خاص اندازه‌گیری می‌کنیم. همان‌طور که گفتیم متغیر کمی گسسته معمولاً از طریق شمارش مشخص می‌شود.

**حرف آفر:** تست‌هایی که در مورد نوع متغیر داده می‌شود را نباید از دست بدهید. بسیار آسان است ...



Blank lined area for writing notes.

داخل تجربی ۹۰ | پاسخ: ۱ | خارج آسانی ۸۸ | پاسخ: ۱ | خارج آسانی ۸۶ | پاسخ: ۲

## فصل چهارم: دسته‌بندی داده‌ها و جدول فراوانی



**خط ویژه:** فیلی سریع به فصل چهارم کتاب با عنوان دسته‌بندی داده‌ها و جدول فراوانی رسیدیم. این فصل قابلیت ترکیب با فصل‌های بعدی را نیز دارد. این فصل را با صبر و حوصله مطالعه کنید.

### دسته‌بندی داده‌ها - قسمت اول

اگر بزرگ‌ترین داده و کوچک‌ترین داده در بین داده‌های آماری، اختلاف زیادی با هم نداشته باشند، برای سروسامان دادن به داده‌ها، یک جدول دو سطری می‌کشیم. در سطر اول مقادیری را که متغیر ( $X_i$ ) می‌پذیرد نوشته و در سطر دوم تعداد تکرار هر متغیر را که به آن فراوانی آن متغیر ( $f_i$ ) می‌گوییم می‌نویسیم. جدول به دست آمده را جدول توزیع فراوانی می‌گوییم.

**مثلاً:** تعداد فرزندان ۱۰ خانواده که در یک آپارتمان زندگی می‌کنند ۰، ۲، ۱، ۱، ۲، ۴، ۳، ۴، ۲ می‌باشد. جدول توزیع فراوانی آن به صورت زیر است:

متغیر، تعداد فرزندان است.

$X_i$	۰	۱	۲	۳	۴
$f_i$	۲	۲	۳	۱	۲

فراوانی، تعداد خانواده‌هایی است که  $X_i$  فرزند دارند.

در حقیقت جدول بالا به ما می‌گوید که دو خانواده وجود دارند، که هیچ فرزندی ندارند و یا این که یک خانواده وجود دارد که دارای ۳ فرزند می‌باشد و ...

**۱** دانش‌آموزان یک مدرسه را با سال تولد یکسان وزن‌کشی کرده و عدد صحیح وزن آنان را یادداشت کرده‌ایم. چند درصد آنان کم‌تر از

۵۰ وزن دارند؟

وزن	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱
تعداد	۸	۹	۱۲	۱۵	۶	۵

۸۰ (۴)

۷۸ (۳)

۷۵ (۲)

۷۲ (۱)

**گام ۱:** ابتدا تعداد کل دانش‌آموزانی که وزن‌کشی شده‌اند را پیدا می‌کنیم:

$$\text{تعداد کل دانش‌آموزان} = ۸ + ۹ + ۱۲ + ۱۵ + ۶ + ۵ = ۵۵$$

**گام ۲:** حالا تعداد دانش‌آموزانی که وزن آن‌ها کم‌تر از ۵۰ است را به دست می‌آوریم:

$$۴۴ = ۸ + ۹ + ۱۲ + ۱۵ = \text{تعداد دانش‌آموزان کم‌تر از ۵۰}$$

**گام ۳:** سؤال از ما می‌خواهد که بگوییم این ۴۴ نفر چند درصد کل دانش‌آموزان را تشکیل می‌دهند، پس:

$$\frac{۴۴}{۵۵} \times ۱۰۰ = ۸۰\%$$

**۲** در یک نمونه‌گیری از حرکت اتومبیل‌ها،  $F$  تعداد اتومبیل‌هایی با  $x$  سرنشین است. چند درصد اتومبیل‌ها با سرنشین ۳ یا ۴ نفر هستند؟

$x$	۱	۲	۳	۴	۵
$F$	۹۰	۱۸۰	۲۲۰	۲۶۰	۵۰

۶۰ (۴)

۵۸ (۳)

۵۴ (۲)

۴۵ (۱)

**گام ۱:** ابتدا تعداد کل اتومبیل‌ها را به دست می‌آوریم:

$$۸۰۰ = ۹۰ + ۱۸۰ + ۲۲۰ + ۲۶۰ + ۵۰ = \text{تعداد کل اتومبیل‌ها}$$

**گام ۲:** اکنون باید تعداد اتومبیل‌ها با ۳ یا ۴ سرنشین را معلوم کنیم:

$$۴۸۰ = ۲۲۰ + ۲۶۰ = \text{تعداد اتومبیل‌ها با ۳ یا ۴ سرنشین}$$

**گام ۳:** حال می‌گوییم ۴۸۰ اتومبیل با ۳ یا ۴ سرنشین، چند درصد اتومبیل‌های در حرکت می‌باشند:

$$\frac{۴۸۰}{۸۰۰} \times ۱۰۰ = ۶۰\%$$

دسته بندی داده ها - قسمت دوم

۲

اگر بزرگترین داده و کوچکترین داده در بین داده های آماری، اختلاف زیادی با هم داشته باشند، برای سروسامان دادن به داده ها، آن ها را دسته بندی می کنیم. در این جا برخلاف حالت قبلی به جای آن که بگوییم از متغیر مثلاً  $x_i = 4$  چند تا داریم، می گوییم متغیرهایی که در بازه ی (۰،۱۰] قرار دارند به چه تعداد هستند. برای این منظور باید با مفاهیم زیر آشنا شویم:

۱ دامنه ی تغییرات: اختلاف بین بزرگترین داده و کوچکترین داده را دامنه ی تغییرات می گویند و با  $R$  نشان می دهند.

$$R = \text{Max} - \text{Min}$$

۲ تعداد دسته ها: تعداد دسته ها را با  $K$  نشان داده و بستگی به دامنه ی تغییرات دارد. هر چه دامنه ی تغییرات بزرگ تر باشد، تعداد دسته ها را بیشتر در نظر می گیریم.

۳ طول دسته: در هر دسته به فرم  $[a_i, b_i)$  به  $C = b_i - a_i$  طول دسته می گوییم.  $a_i$  کران پایین دسته و  $b_i$  کران بالای دسته است.

تذکر: رابطه ی زیر بین دامنه ی تغییرات ( $R$ )، تعداد دسته ها ( $K$ ) و طول دسته ( $C$ ) برقرار است:

$$R = CK$$

۴ مرکز دسته: در دسته ی  $[a_i, b_i)$  به  $x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$  مرکز یا نشان دسته گویند و عددی است که می توان تمام داده های موجود در این دسته را برابر با آن در نظر گرفت.

تذکر: کران های پایین دسته ها، کران های بالای دسته ها و هم چنین مرکز دسته ها،  $C$  تا  $C$  تا با هم فاصله دارند. به زبان ریاضی می توان گفت مرکز دسته ها، کران پایین دسته ها و کران بالای دسته ها، تشکیل دنباله ی حسابی با قدرنسبت  $C$  می دهند.

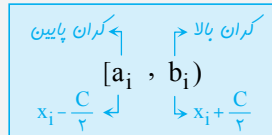
مثلاً:

$$x_1 \xrightarrow{+C} x_2 \xrightarrow{+C} x_3 \quad \text{یا} \quad x_3 = x_1 + 2C$$

مثلاً:

$$a_4 \xrightarrow{+C} a_5 \xrightarrow{+C} a_6 \xrightarrow{+C} a_7 \xrightarrow{+C} a_8 \xrightarrow{+C} a_9 \quad \text{یا} \quad a_9 = a_4 + 5C$$

تذکر ۲: اگر به مرکز هر دسته،  $\frac{C}{2}$  اضافه یا کم کنیم، کران بالا یا پایین آن دسته به دست می آید:



۳ در جدول توزیع فراوانی داده ها، نماینده ی طبقات اول، دوم و آخر به ترتیب ۴۴، ۴۹ و ۸۴ می باشند. تعداد طبقات کدام است؟

- ۷ (۱)      ۸ (۲)      ۹ (۳)      ۱۰ (۴)

گام ۱: ابتدا به کمک نماینده ی طبقات اول و دوم، طول دسته ها را به دست می آوریم:

$$C = x_2 - x_1 \Rightarrow C = 49 - 44 = 5$$

گام ۲: حال برای پیدا کردن تعداد طبقات باید دامنه ی تغییرات را پیدا کنیم. کران پایین دسته ی اول همان  $\text{Min}$  و کران بالای دسته ی آخر

نیز  $\text{Max}$  است. پس:

$$\begin{cases} \text{Min} = x_1 - \frac{C}{2} \Rightarrow \text{Min} = 44 - \frac{5}{2} = 41.5 \\ \text{Max} = x_k + \frac{C}{2} \Rightarrow \text{Max} = 84 + \frac{5}{2} = 86.5 \end{cases} \Rightarrow R = \text{Max} - \text{Min} = 86.5 - 41.5 = 45$$

گام ۳: با توجه به رابطه ی  $R = CK$  به راحتی  $K$  یعنی تعداد دسته ها پیدا می شود، پس:

$$R = CK \Rightarrow 45 = 5 \times K \Rightarrow K = 9$$

۴ در ۹۶ داده ی آماری، کوچکترین و بزرگترین داده ها به ترتیب ۳۹ و ۷۵ هستند. اگر این داده ها در ۹ طبقه دسته بندی شوند، کران

بالا در دسته ی ششم، کدام است؟

- ۵۹ (۱)      ۶۱ (۲)      ۶۲ (۳)      ۶۳ (۴)

گام ۱: ابتدا دامنه ی تغییرات را به دست می آوریم:

$$R = \text{Max} - \text{Min} = 75 - 39 = 36$$

گام ۲: به کمک دامنه ی تغییرات و تعداد طبقات، طول هر طبقه را به دست آوریم:

$$R = CK \Rightarrow 36 = C \times 9 \Rightarrow C = 4$$

گام ۳: کران بالای طبقه ی اول را به دست می آوریم:

$$39 + 4 = 43$$

**گام ۴:** حالا از ۴۳ یعنی کران بالای طبقه اول، تا ۴ تا بالا می‌رویم تا به کران بالای دسته ششم برسیم:

$$\begin{array}{cccccccc}
 43 & \xrightarrow{+4} & 47 & \xrightarrow{+4} & 51 & \xrightarrow{+4} & 55 & \xrightarrow{+4} & 59 & \xrightarrow{+4} & 63 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \dots & & \dots & & \downarrow \\
 \text{کران بالای} & & \text{کران بالای} & & \text{کران بالای} & & & & & & \text{کران بالای} \\
 \text{طبقه اول} & & \text{طبقه دوم} & & \text{طبقه سوم} & & & & & & \text{طبقه ششم}
 \end{array}$$

یا  $b_6 = b_1 + \Delta C \Rightarrow b_6 = 43 + 5 \times 4 = 63$

طول طبقات کران بالای طبقه اول

**۵** داده‌های آماری در ۱۲ طبقه دسته‌بندی شده‌اند، حدود دسته‌ی اول به صورت (۲۳، ۲۶) می‌باشد. اگر این داده‌ها در ۹ طبقه

دسته‌بندی شوند، مرکز دسته‌ی وسط کدام است؟

۴۰/۵ (۱)      ۴۱ (۲)      ۴۱/۵ (۳)      ۴۲ (۴)

**گام ۱:** با توجه به حدود دسته‌ی اول یعنی (۲۳، ۲۶)، طول دسته‌ها برابر  $C = 26 - 23 = 3$  و کوچک‌ترین داده، ۲۳ می‌باشند.

$$R = CK \Rightarrow R = 3 \times 12 = 36$$

**گام ۲:** چون ۱۲ طبقه داریم، پس دامنه‌ی تغییرات می‌شود:

$$R = CK \Rightarrow 36 = C \times 9 \Rightarrow C = 4$$

**گام ۳:** حال با توجه به صورت سؤال، این داده‌ها باید در ۹ طبقه دسته‌بندی شوند، پس طول هر دسته برابر است با:

**گام ۴:** در این حالت دسته‌ی وسط دسته‌ی پنجم است. ابتدا کران پایین آن را به دست می‌آوریم. برای این کار از ۲۳ یعنی کوچک‌ترین داده، تا ۴ تا بالا می‌رویم:

$$\begin{array}{cccccccc}
 23 & \xrightarrow{+4} & 27 & \xrightarrow{+4} & 31 & \xrightarrow{+4} & 35 & \xrightarrow{+4} & 39 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{دسته اول} & & \text{دسته دوم} & & \text{دسته سوم} & & \text{دسته چهارم} & & \text{دسته پنجم}
 \end{array}$$

یا  $a_5 = a_1 + 4C \Rightarrow a_5 = 23 + 4 \times 4 = 39$

کران پایین طبقه اول

طول طبقات کران پایین طبقه پنجم

**گام ۵:** اگر از کران پایین دسته‌ی پنجم،  $\frac{C}{4}$  بالا برویم به مرکز دسته‌ی آن می‌رسیم:

$$x_{\Delta} = 39 + \frac{4}{4} = 41$$

**۶** داده‌های آماری در ۸ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. بازه‌ی دسته‌ی چهارم به صورت (۲۶، ۲۹) می‌باشد. اگر این داده‌ها در ۶ طبقه

دسته‌بندی شوند، مرکز دسته‌ی پنجم کدام است؟

۳۴ (۱)      ۳۴/۵ (۲)      ۳۵ (۳)      ۳۵/۵ (۴)

$$C = 29 - 26 = 3$$

**گام ۱:** با توجه به دسته‌ی چهارم یعنی (۲۶، ۲۹)، طول دسته‌ها برابر است با:

$$R = CK \Rightarrow R = 3 \times 8 = 24$$

**گام ۲:** با توجه به این که  $C = 3$  و تعداد دسته‌ها ۸ می‌باشد، دامنه‌ی تغییرات برابر است با:

**گام ۳:** به کمک کران بالای دسته‌ی چهارم، بزرگ‌ترین داده را پیدا می‌کنیم. کافی است از کران بالای دسته‌ی چهارم یعنی ۲۹ تا ۳ تا بالا برویم:

$$\begin{array}{cccccccc}
 29 & \xrightarrow{+3} & 32 & \xrightarrow{+3} & 35 & \xrightarrow{+3} & 38 & \xrightarrow{+3} & 41 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{دسته چهارم} & & \text{دسته پنجم} & & \text{دسته ششم} & & \text{دسته هفتم} & & \text{دسته هشتم}
 \end{array}$$

یا  $b_5 = b_4 + 4C \Rightarrow b_5 = 29 + 4 \times 3 = 41$

$$R = CK \Rightarrow 24 = C \times 6 \Rightarrow C = 4$$

**گام ۴:** حال تعداد دسته‌ها برابر ۶ است، پس طول هر دسته را در این حالت پیدا می‌کنیم:

$$x_{\Delta} = 41 - 4 = 37$$

**گام ۵:** حال از بزرگ‌ترین داده، ۴ تا کم می‌کنیم تا کران بالای دسته‌ی پنجم به دست آید:

$$x_{\Delta} = 37 - \frac{C}{2} = 37 - 2 = 35$$

**گام ۶:** و در نهایت مرکز دسته‌ی پنجم برابر است با:

**۷** در دسته‌بندی ۱۳۵ داده‌ی آماری در ۱۵ طبقه، حدود دسته‌ی چهارم به صورت (۷۴، ۷۷) است. اگر این داده‌ها در ۹ طبقه دسته‌بندی

شوند، کران پایین دسته‌ی آخر کدام است؟

۹۵ (۱)      ۹۸ (۲)      ۱۰۲ (۳)      ۱۰۵ (۴)

$$C = 77 - 74 = 3$$

**گام ۱:** ابتدا به کمک حدود دسته‌ی چهارم، طول دسته‌ها را به دست می‌آوریم:

$$R = CK \Rightarrow R = 3 \times 15 = 45$$

**گام ۲:** حال دامنه‌ی تغییرات را به دست می‌آوریم:

**گام ۳:** از کران بالای دسته‌ی چهارم، ۳ تا بالا می‌رویم تا به کران بالای دسته‌ی آخر که همان بزرگ‌ترین داده است برسیم:

$$\begin{array}{cccccccc}
 77 & \xrightarrow{+3} & 80 & \xrightarrow{+3} & 83 & \xrightarrow{+3} & 86 & \xrightarrow{+3} & 89 & \xrightarrow{+3} & 92 & \xrightarrow{+3} & \dots & \xrightarrow{+3} & 107 & \xrightarrow{+3} & 110 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \dots & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{کران بالای} & & \text{کران بالای} & & & & & & & & & & & & \text{کران بالای} & & \text{کران بالای} \\
 \text{دسته چهارم} & & \text{دسته پنجم} & & & & & & & & & & & & \text{دسته پانزدهم} & & \text{دسته چهاردهم}
 \end{array}$$

$$b_{15} = b_4 + 11C \Rightarrow b_{15} = 77 + 11 \times 3 = 110$$

**گام ۴:** با تغییر تعداد طبقات، طول دسته‌ها تغییر می‌کند:

**گام ۵:** برای به دست آوردن کران پایین دسته‌ی آخر، کافی است از بزرگ‌ترین داده (کران بالای دسته‌ی آخر) ۵ تا کم کنیم:

$$R = CK \Rightarrow 45 = C \times 9 \Rightarrow C = 5$$

داده‌های آماری در ۱۲ طبقه، دسته‌بندی شده‌اند. بازه‌ی دسته‌ی چهارم (۴۰، ۴۳] می‌باشد. اگر این داده‌ها در ۹ طبقه، دسته‌بندی شوند،

آن‌گاه مرکز دسته‌ی وسط، کدام است؟

- ۴۷ (۱)
- ۴۹ (۲)
- ۵۰ (۳)
- ۵۱ (۴)

**گام ۱:** ابتدا به کمک حدود دسته‌ی چهارم، طول دسته‌ها را به دست می‌آوریم:

**گام ۲:** حال دامنه‌ی تغییرات را به دست می‌آوریم:

**گام ۳:** از کران بالای دسته‌ی چهارم، ۳ تا ۳ تا بالا می‌رویم تا به کران بالای دسته‌ی آخر که همان بزرگ‌ترین داده است برسیم:

$$b_{12} = b_4 + 8c \Rightarrow b_{12} = 43 + 8 \times 3 = 67$$

**گام ۴:** با تغییر مقدار طبقات، طول دسته‌ها تغییر می‌کند:

$$R = ck \Rightarrow 36 = c \times 9 \Rightarrow c = 4$$

**گام ۵:** وقتی تعداد طبقات ۹ می‌باشد، دسته‌ی وسط دسته‌ی پنجم است. پس اگر از کران بالای دسته‌ی نهم ۴ کم کنیم به کران بالای دسته‌ی پنجم و یک  $\frac{c}{3}$  هم کم کنیم به مرکز آن دسته می‌رسیم:

$$x_5 = 67 - 4c - \frac{c}{3} = 67 - 16 - 2 = 49$$

داده‌های آماری اعداد صحیح‌اند که در ۷ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. اگر دامنه‌ی تغییرات آن‌ها ۲۱ و نشان دسته وسط ۳۶ باشد، حد

بالای دسته آخر کدام است؟

- ۴۵ (۱)
- ۴۶ (۲)
- ۴۷ (۳)
- ۴۸ (۴)

**گام ۱:** با توجه به این که تعداد طبقات برابر ۷ و دامنه‌ی تغییرات ۲۱ است، طول هر طبقه را پیدا می‌کنیم:  $R = CK \Rightarrow 21 = C \times 7 \Rightarrow C = 3$

**گام ۲:** هفت طبقه داریم پس طبقه‌ی وسط، طبقه‌ی چهارم است. در ضمن می‌دانیم نشان دسته‌ی چهارم ۳۶ می‌باشد. بنابراین ۳ تا ۳ تا به ۳۶ اضافه می‌کنیم تا نشان دسته‌ی آخر یعنی هفتم به دست آید:

$$x_7 = x_4 + 3C \Rightarrow x_7 = 36 + 3 \times 3 = 45 \quad \text{یا} \quad x_7 = x_4 + 3 \Rightarrow x_7 = 42 \xrightarrow{+3} x_6 = 42 \xrightarrow{+3} x_5 = 39 \xrightarrow{+3} x_4 = 36$$

**گام ۳:** حال که نشان دسته‌ی هفتم را داریم، با اضافه کردن  $\frac{3}{3} = 1$  به آن، حد بالای دسته‌ی هفتم را به دست می‌آوریم:

$$\text{حد بالای دسته‌ی هفتم} = 45 + \frac{3}{3} = 46/5$$

اما چون داده‌ها اعداد صحیح هستند، حتماً در دسته‌ی آخر عددی بزرگ‌تر از ۴۶ وجود ندارد، پس می‌توان حد بالای آن را به جای ۴۶/۵، عدد صحیح ۴۶ نیز در نظر گرفت.

در یک آزمون تحصیلی کم‌ترین نمره ۲۲ و بیش‌ترین نمره ۹۷ و تمام نمرات اعداد صحیح‌اند. اگر آن‌ها را در ۱۵ طبقه دسته‌بندی

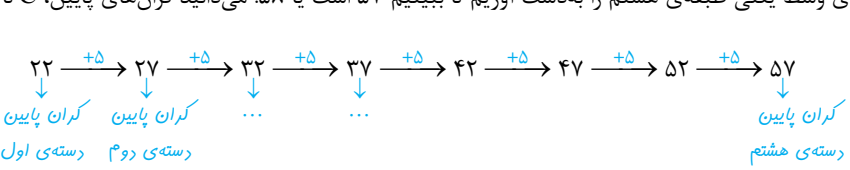
کنیم، حدود طبقه‌ی وسط کدام است؟

- ۵۸ - ۶۲ (۱)
- ۵۸ - ۶۳ (۲)
- ۵۷ - ۶۱ (۳)
- ۵۷ - ۶۲ (۴)

**گام ۱:** ابتدا به کمک بیش‌ترین و کم‌ترین داده، دامنه‌ی تغییرات را پیدا می‌کنیم:

**گام ۲:** حال طول دسته‌ها را معلوم می‌کنیم:

**گام ۳:** در نهایت کافی است کران پایین طبقه‌ی وسط یعنی طبقه‌ی هشتم را به دست آوریم تا ببینیم ۵۷ است یا ۵۸. می‌دانید کران‌های پایین، C تا C تغییر می‌کنند. پس:



$$\text{یا} \quad a_8 = a_1 + 7C \Rightarrow a_8 = 22 + 7 \times 5 = 57$$

در دسته‌بندی داده‌های آماری، مناسب‌ترین مقداری که می‌توانیم به هر یک از افراد یک دسته نسبت دهیم، کدام است؟

- (۱) مرکز دسته
- (۲) کران پایین
- (۳) میانگین مقادیر دسته
- (۴) کران بالا

مناسب‌ترین مقدار که می‌توانیم به هر یک از افراد یک دسته نسبت دهیم، مرکز دسته می‌باشد.

۱۲ در ۵۶ داده‌ی آماری، بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین آن‌ها به ترتیب ۸۶ و ۶۵ است. این داده‌ها به ۷ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. اگر داده‌هایی که در یک دسته قرار دارند یکسان در نظر گرفته شوند، مقدار مشترک آن‌ها در دسته‌ی پنجم کدام است؟

(۱) ۷۷ (۲) ۷۷/۵ (۳) ۷۸ (۴) ۷۸/۵

گام ۱: ابتدا به کمک کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده، دامنه‌ی تغییرات را پیدا می‌کنیم:

$$R = \text{Max} - \text{Min} = 86 - 65 = 21$$

گام ۲: حال به راحتی طول دسته‌ها پیدا می‌شود:

$$R = CK \Rightarrow 21 = C \times 7 \Rightarrow C = 3$$

گام ۳: مقدار مشترک دسته‌ی پنجم، همان نشان دسته‌ی اول و نشان آن را پیدا می‌کنیم:

$$\text{دسته‌ی اول: } (65, 68] \Rightarrow x_1 = \frac{65 + 68}{2} = 66/5$$

گام ۴: حالا کافی است از نشان دسته‌ی اول، ۳ تا ۳ تا بالا برویم تا به نشان دسته‌ی پنجم برسیم. چون نشان دسته‌ی پنجم، مقدار مشترک داده‌ها در دسته‌ی پنجم است:

$$66/5 \xrightarrow{+3} 69/5 \xrightarrow{+3} 72/5 \xrightarrow{+3} 75/5 \xrightarrow{+3} 78/5 \quad \text{یا} \quad x_{\Delta} = x_1 + 4C \Rightarrow x_{\Delta} = 66/5 + 4 \times 3 = 78/5$$

طول طبقات    نشان دسته‌ی پنجم  
↑                                  ↑  
نشان دسته‌ی اول                                  ↓

۱۳ کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده‌های آماری ۱۷/۲ و ۲۲/۶ هستند. اگر کران پایین دسته‌ی دوم ۱۷/۸ باشد، مرکز دسته‌ی آخر کدام است؟

(۱) ۲۱/۷ (۲) ۲۱/۸ (۳) ۲۲/۳ (۴) ۲۲/۴

گام ۱: ابتدا به کمک کوچک‌ترین داده و کران پایین دسته‌ی دوم (که حتماً کران بالای دسته‌ی اول هم هست) طول دسته‌ها را به دست می‌آوریم:

$$C = 17/8 - 17/2 = 0/6$$

گام ۲: حالا به کمک طول دسته و بزرگ‌ترین داده، دسته‌ی آخر و سپس مرکز آن را معلوم می‌کنیم:

$$\text{دسته‌ی آخر: } (22, 22/6] \Rightarrow \text{مرکز دسته} = \frac{22 + 22/6}{2} = 22/3$$

### انواع فراوانی

۳

۱ فراوانی مطلق: تعداد داده‌های موجود در هر طبقه را فراوانی مطلق آن طبقه گفته و با  $f_i$  نشان می‌دهند.

تذکر: هر جا واژه‌ی «فراوانی» را دیدید منظور همان فراوانی مطلق است.

۲ فراوانی نسبی: اگر فراوانی مطلق هر دسته را بر کل فراوانی‌ها (تعداد کل داده‌ها) تقسیم کنید، فراوانی نسبی آن دسته به دست می‌آید.

فراوانی نسبی هر دسته را با  $F_i$  نشان می‌دهند.

$$F_i = \frac{f_i}{n}$$

۳ فراوانی جمع: مجموع فراوانی مطلق هر طبقه به علاوه‌ی فراوانی‌های مطلق طبقات قبل از آن را، فراوانی جمع آن طبقه می‌گویند و با  $f_{ci}$  نشان می‌دهند.

$$f_{ci} = f_1 + f_2 + \dots + f_i$$

تذکر: گاهی در بعضی تست‌ها، درصد فراوانی نسبی را از شما می‌خواهند، که فقط کافی است فراوانی نسبی را در ۱۰۰ ضرب کنید، یا می‌گویند فراوانی نسبی؛ کافی است فراوانی جمع را بر کل داده‌ها تقسیم کنید و یا می‌گویند فراوانی کل که منظور تعداد کل داده‌ها می‌باشد.

۱۴ جدول زیر ارقام تصادفی حاصل از ۸۰ بار پرتاب یک تاس است. درصد فراوانی نسبی اعداد ظاهر شده که مضرب ۳ هستند کدام است؟

رقم تاس	۱	۲	۳	۴	۵	۶
فراوانی	۱۵	۱۷	۱۴	۱۱	۱۱	۱۲

(۱) ۳۱/۵ (۲) ۳۲ (۳) ۳۲/۵ (۴) ۳۳

گام ۱: اعداد مضرب ۳ در تاس، ۳ و ۶ می‌باشند که در این ۸۰ بار پرتاب، عدد ۳، چهارده بار و عدد ۶، دوازده بار ظاهر شده‌اند. پس کل فراوانی این

دو عدد برابر است با:  $12 + 14 = 26$ .

گام ۲: حال درصد فراوانی نسبی آن را پیدا می‌کنیم:

$$\text{درصد فراوانی نسبی} = \frac{\text{فراوانی}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} \times 100 = \frac{26}{80} \times 100 = 32/5$$



۱۵ هشتاد داده‌ی آماری در ۷ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. اگر ۲۰ داده‌ی جدید به این داده‌ها افزوده شود، فراوانی نسبی دسته‌ی وسط

تغییر نمی‌کند. نسبت افزایش داده‌های دسته‌ی مذکور به فراوانی مطلق قبلی آن کدام است؟

$$(۱) \frac{۳}{۸} \quad (۲) \frac{۱}{۵} \quad (۳) \frac{۱}{۴} \quad (۴) \frac{۱}{۸}$$

گام ۱: فرض می‌کنیم فراوانی مطلق دسته‌ی وسط یعنی دسته‌ی چهارم،  $f_4$  باشد. در این صورت فراوانی نسبی آن  $\frac{f_4}{۸۰}$  است.

گام ۲: هم‌چنین فرض می‌کنیم با اضافه شدن ۲۰ داده‌ی جدید، فراوانی مطلق دسته‌ی چهارم  $f_4 + X$  می‌شود، پس فراوانی نسبی  $\frac{f_4 + X}{۱۰۰}$  خواهد شد.

گام ۳: در صورت سؤال گفته شده فراوانی نسبی دسته‌ی چهارم بعد از افزوده شدن داده‌های جدید تغییر نکرده است، پس:

$$\frac{f_4}{۸۰} = \frac{f_4 + X}{۱۰۰}$$

گام ۴: نسبت افزایش داده‌های دسته‌ی چهارم، یعنی  $X$  به فراوانی مطلق قبلی آن، یعنی  $f_4$  را می‌خواهیم، پس باید ببینیم  $\frac{X}{f_4}$

برابر چیست؟

$$\frac{f_4}{۸۰} = \frac{f_4 + X}{۱۰۰} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۱۰۰f_4 = ۸۰(f_4 + X) \Rightarrow ۲۰f_4 = ۸۰X \Rightarrow \frac{X}{f_4} = \frac{۲۰}{۸۰} = \frac{۱}{۴}$$

۴ در جریان باشید ...

۱ فراوانی تجمعی دسته‌ی اول همان فراوانی مطلق دسته‌ی اول است و فراوانی تجمعی دسته‌ی آخر برابر با تعداد کل داده‌ها می‌باشد.

۲ اگر  $f_{C_i}$  فراوانی تجمعی دسته‌ی  $i$ ام و  $f_{C_{(i+1)}}$  فراوانی تجمعی دسته‌ی  $(i+1)$ ام باشند، فراوانی مطلق دسته‌ی  $(i+1)$ ام از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$f_{i+1} = f_{C_{(i+1)}} - f_{C_i}$$

۱۶ داده‌های جدول زیر، داده‌های آماری پیوسته است. چند درصد داده‌ها در فاصله‌ی  $[۲۱/۵ - ۱۸/۵]$  قرار دارند؟

مرکز دسته	۱۴	۱۷	۲۰	۲۳	۲۶
فراوانی تجمعی	۵	۱۳	۲۵	۳۴	۴۰

$$(۱) ۲۰ \quad (۲) ۲۵ \quad (۳) ۳۰ \quad (۴) ۴۰$$

گام ۱: فراوانی تجمعی دسته‌ی آخر همان تعداد کل داده‌ها می‌باشد، پس  $n = ۴۰$ .

گام ۲: مرکز دسته‌ی  $[۱۸/۵ - ۲۱/۵]$  برابر  $\frac{۱۸/۵ + ۲۱/۵}{۲} = ۲۰$  می‌باشد، پس فراوانی مطلق آن را به دست می‌آوریم که می‌شود:  $f_3 = ۲۵ - ۱۳ = ۱۲$

گام ۳: حال باید بگوییم که ۱۲ داده، چند درصد کل داده‌ها می‌باشد، پس:

$$\frac{۱۲}{۴۰} \times ۱۰۰ = ۳۰$$

۱۷ در جدول فراوانی تجمعی داده‌های دسته‌بندی شده‌ی زیر، اگر درصد فراوانی نسبی دسته‌ی وسط ۲۴ باشد، فراوانی مطلق دسته‌ی

چهارم کدام است؟

مرکز دسته	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱
فراوانی تجمعی	۵	۱۴	a	۴۱	۵۰

$$(۱) ۱۴ \quad (۲) ۱۵ \quad (۳) ۱۶ \quad (۴) ۱۷$$

گام ۱: فراوانی تجمعی دسته‌ی آخر برابر تعداد کل داده‌ها می‌باشد، پس  $n = ۵۰$ .

گام ۲: فراوانی مطلق دسته‌ی سوم از تفاضل فراوانی‌های تجمعی این دسته و دسته‌ی قبل از آن به دست می‌آید، پس:

$$f_3 = a - ۱۴$$

گام ۳: درصد فراوانی نسبی دسته‌ی وسط برابر با ۲۴ می‌باشد، پس:

$$\text{درصد فراوانی نسبی دسته‌ی سوم} = \frac{\text{فراوانی مطلق دسته‌ی سوم}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۲۴ = \frac{a - ۱۴}{۵۰} \times ۱۰۰ \Rightarrow a = ۲۶$$

گام ۴: حال می‌توانیم فراوانی مطلق دسته‌ی چهارم را به دست آوریم:

$$۱۵ = ۴۱ - a = ۴۱ - ۲۶ = ۱۵$$

**۱۸** داده‌های آماری در ۶ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. ۲۲/۵ درصد این داده‌ها در یک دسته با فاصله‌ی (۵۲,۵۶) قرار دارند. اگر داده‌هایی

که در یک دسته قرار دارند یکسان در نظر گرفته شوند، ۳۶ بار مقدار ۵۴ منظور می‌شود. فراوانی کل کدام است؟

$$135 \quad (1) \quad 160 \quad (2) \quad 175 \quad (3) \quad 180 \quad (4)$$

**گام ۱:** ۵۴ نشان دسته‌ی (۵۲,۵۶) است و چون ۳۶ بار منظور می‌شود، پس فراوانی مطلق این دسته ۳۶ می‌باشد.

**گام ۲:** این ۳۶ داده، ۲۲/۵ درصد کل داده‌هاست، پس تعداد کل داده‌ها که همان فراوانی کل می‌باشد، با یک تناسب ساده به دست می‌آید:

$$22/5 = \frac{36}{n} \times 100 \Rightarrow n = \frac{36 \times 100}{22/5} = 160$$

**۱۹** در دسته‌بندی ۱۲۰ داده‌ی آماری در ۹ طبقه، دسته‌ی اول به صورت ۲۲-۲۵ می‌باشد. می‌دانیم ۴۵ درصد داده‌ها کم‌تر از ۳۴ و فراوانی

نسبی دسته‌ی وسط ۲/۰ است. تعداد داده‌های کم‌تر از ۳۷ کدام است؟

$$67 \quad (1) \quad 76 \quad (2) \quad 78 \quad (3) \quad 87 \quad (4)$$

**گام ۱:** دسته‌ی وسط، دسته‌ی پنجم است و با توجه به این که دسته‌ی اول ۲۲-۲۵ می‌باشد، داریم:

**گام ۲:** حال حدود دسته‌ی پنجم را به دست می‌آوریم. برای این کار از کران پایین دسته‌ی اول تا ۳ تا بالا می‌رویم تا کران پایین دسته‌ی پنجم به دست آید:

$$22 \xrightarrow{+3} 25 \xrightarrow{+3} 28 \xrightarrow{+3} 31 \xrightarrow{+3} 34 \quad \text{یا} \quad a_5 = a_1 + 4C \Rightarrow a_5 = 22 + 4 \times 3 = 34 \Rightarrow \text{دسته‌ی پنجم } [34, 37)$$

**گام ۳:** ۴۵ درصد داده‌ها کم‌تر از ۳۴ هستند. یعنی در دسته‌های اول، دوم، سوم و چهارم قرار دارند و ۲/۰ (۲۰ درصد) داده‌ها نیز در دسته‌ی پنجم هستند، پس در مجموع ۶۵ درصد داده‌ها در پنج دسته‌ی اول قرار دارند، یعنی کم‌تر از ۳۷ هستند.

**گام ۴:** تعداد کل داده‌ها برابر ۱۲۰ است. حال باید ببینیم ۶۵ درصد آن‌ها چه تعدادی می‌شود:  $78 = 120 \times \frac{65}{100}$  = تعداد داده‌های کم‌تر از ۳۷

**۲۰** کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده‌های آماری ۳۱ و ۵۲ می‌باشد. این داده‌ها در ۷ دسته، دسته‌بندی شده‌اند. ۳۷ درصد داده‌ها کم‌تر از ۴۰

و ۴۸ درصد آن‌ها مساوی یا بیشتر از ۴۳ می‌باشد. اگر فراوانی کل ۸۰ باشد، فراوانی دسته‌ی وسط کدام است؟

$$9 \quad (1) \quad 12 \quad (2) \quad 15 \quad (3) \quad 16 \quad (4)$$

**گام ۱:** ابتدا به کمک کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده، دامنه‌ی تغییرات را به دست می‌آوریم:

**گام ۲:** با توجه به این که تعداد دسته‌ها برابر ۷ است، طول دسته‌ها را به دست می‌آوریم:

**گام ۳:** حال حدود دسته‌ها را معلوم می‌کنیم:

$$[31, 34), [34, 37), [37, 40), [40, 43), \dots$$

**گام ۴:** در صورت سؤال گفته شده ۳۷ درصد داده‌ها کم‌تر از ۴۰ و ۴۸ درصد داده‌ها بیش‌تر از ۴۳ می‌باشند، یعنی:

$$[31, 34), [34, 37), [37, 40), [40, 43), \dots$$

**گام ۵:** با توجه به گام بالا معلوم می‌شود ۱۵٪ داده‌ها در دسته‌ی چهارم، یعنی [۴۰, ۴۳) قرار دارند، زیرا:

$$100\% - (37\% + 48\%) = 15\%$$

**گام ۶:** ۱۵٪ داده‌ها در دسته‌ی وسط یعنی دسته‌ی چهارم قرار دارند. با توجه به این که تعداد کل داده‌ها ۸۰ است، تعداد داده‌هایی که در دسته‌ی

وسط قرار دارند، یعنی فراوانی مطلق دسته‌ی وسط برابر است با:

$$\frac{15}{100} \times 80 = 12$$

**۲۱** مقادیر ۱۲۰ داده‌ی آماری، در بازه‌ی [۲۳, ۵۹] می‌باشند. این داده‌ها در ۹ طبقه، دسته‌بندی شده‌اند. اگر مجموع فراوانی‌های دو

دسته‌ی آخر ۱۵ باشد، چند درصد داده‌ها کمتر از ۵۱ هستند؟

$$82/5 \quad (1) \quad 87/5 \quad (2) \quad 90 \quad (3) \quad 92/5 \quad (4)$$

**گام ۱:** ابتدا به کمک دامنه‌ی تغییرات و تعداد دسته‌ها، طول هر دسته را پیدا می‌کنیم:

$$R = 59 - 23 = 36 \xrightarrow{k=9} c = \frac{R}{k} = \frac{36}{9} = 4$$

**گام ۲:** دسته‌ها به صورت زیر می‌باشند، چون تعداد داده‌ها ۱۲۰ می‌باشد و ۱۵ داده در دو دسته‌ی آخر قرار دارند پس ۱۰۵ داده در هفت دسته‌ی

اول قرار دارند.

$$[23, 27), [27, 31), \dots, [43, 47), [47, 51), [51, 55), [55, 59)$$

**گام ۳:** حال به کمک یک تناسب ساده درصد داده‌های کم‌تر از ۵۱ را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{120}{100} = \frac{105}{x} \Rightarrow x = \frac{100 \times 105}{120} = 87/5\%$$



## فصل پنجم: نمودارها و تحلیل داده‌ها

**خط ویژه:** از قریم گفته‌اند که یک تصویر فوب ارزش هزاران کلمه را دارد. هدف فصل پنجم با عنوان نمودارها و تحلیل داده‌ها هم همین است. در بین نمودارهایی که در این فصل آشنا می‌شوید نمودار دایره‌ای بیش‌ترین تکرار را در کنگور داشته است ...

### نمودار دایره‌ای ۱

برای رسم نمودار دایره‌ای، سطح دایره را به قطاع‌هایی تقسیم می‌کنیم که سطح هر قطاع متناسب با فراوانی متغیر موردنظر است. برای تعیین سطح متناسب، کافی است زاویه‌ی هر قطاع را متناسب با فراوانی آن متغیر در نظر بگیریم، یعنی کافی است به کمک تناسب زیر عمل کنیم:

**تذکر ۱:** نمودار دایره‌ای برحسب فراوانی نسبی یعنی  $\frac{f_i}{n}$  رسم می‌شود.

$$\frac{n}{360^\circ} \quad \frac{f_i}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{f_i}{n} \times 360^\circ$$

**تذکر ۲:** مجموع زوایای مرکزی در نمودار دایره‌ای  $360^\circ$  است.

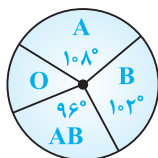
**تذکر ۳:** نمودار دایره‌ای برای نمایش متغیرهای کیفی بسیار مناسب است.

**۱** نمودار دایره‌ای برای کدام متغیر مناسب است و اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی هر قسمت متناسب با کدام است؟

- (۱) کیفی - فراوانی نسبی  
(۲) کیفی - فراوانی تجمعی  
(۳) گسسته - فراوانی مطلق  
(۴) گسسته - فراوانی تجمعی

نمودار دایره‌ای برای متغیرهای کیفی مناسب است و اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی هر قسمت متناسب با فراوانی نسبی یعنی  $\frac{f_i}{n}$  می‌باشد.

**۲** نمودار دایره‌ای مربوط به اهدای خون افراد مراجعه‌کننده به یک ایستگاه انتقال خون، به شکل زیر است. چند درصد این افراد در گروه خونی O قرار دارند؟



- ۱۵ (۱)  
۱۶ (۲)  
۲۰ (۴)  
۱۸ (۳)

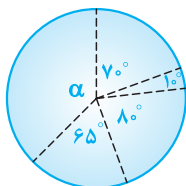
**گام ۱:** مجموع زوایا در نمودار دایره‌ای  $360^\circ$  است، پس:

$$108^\circ + 102^\circ + 96^\circ + \hat{O} = 360^\circ \Rightarrow 306^\circ + \hat{O} = 360^\circ \Rightarrow \hat{O} = 54^\circ$$

**گام ۲:** حال با یک تناسب معلوم می‌کنیم که چند درصد افراد در گروه خونی O قرار دارند:

$$\frac{360^\circ}{100} \quad \frac{54^\circ}{x} \Rightarrow x = \frac{100 \times 54^\circ}{360^\circ} = 15$$

**۳** افراد یک جامعه، به ۵ گروه سنی تقسیم شده‌اند که نمودار دایره‌ای آن‌ها با زاویه‌ی مرکزی برحسب درجه رسم شده است. گروه سنی با زاویه‌ی مرکزی  $\alpha$ ، شامل چند درصد این جامعه است؟



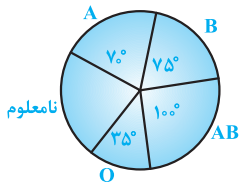
- ۲۳ (۱)  
۳۲/۵ (۲)  
۳۷/۵ (۴)  
۳۶ (۳)

**گام ۱:** مجموع زوایای مرکزی در نمودار دایره‌ای برابر  $360^\circ$  است، بنابراین:

$$\alpha + 7^\circ + 1^\circ + 8^\circ + 65^\circ = 360^\circ \Rightarrow \alpha = 135^\circ$$

**گام ۲:** حال با یک تناسب ساده درصد گروه سنی با زاویه‌ی مرکزی  $\alpha$  را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{360^\circ}{100} \quad \frac{135^\circ}{x} \Rightarrow x = \frac{100 \times 135^\circ}{360^\circ} = 37/5$$



نمودار دایره‌ای روبه‌رو، متناسب با تعداد کارکنان سازمانی با گروه خونی متمایز است. گروه خونی ۳۲

نفر از آنان تعیین نشده است. چند نفر از آن‌ها، دارای نوع خون B هستند؟

۲۵ (۱) ۳۰ (۲) ۳۶ (۳) ۴۰ (۴)

گام ۱: مجموع زوایا در نمودار دایره‌ای ۳۶۰° است، پس:

$$70^\circ + 75^\circ + 100^\circ + 35^\circ + \text{نامعلوم} = 360^\circ \Rightarrow \text{نامعلوم} = 80^\circ$$

گام ۲: حال با یک تناسب ساده تعداد افراد دارای گروه خون B را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{80^\circ}{32} = \frac{75^\circ}{x} \Rightarrow x = \frac{75^\circ \times 32}{80^\circ} = 30^\circ$$

در یک شرکت دارویی جدول توزیع کارکنان را با نمودار دایره‌ای نشان می‌دهیم. زاویه‌ی مربوط به کارکنان ارشد، چند درجه است؟

نوع مدرک	دیپلم	کاردانی	کارشناسی	ارشد	دکترا
تعداد	۳۰	۹۰	۱۸۰	۱۲۰	۳۰

۸۴° (۱) ۹۲° (۲) ۹۶° (۳) ۱۰۵° (۴)

$$\text{تعداد کل کارکنان} = 30 + 90 + 180 + 120 + 30 = 450$$

گام ۱: ابتدا تعداد کل کارکنان را به دست می‌آوریم:

گام ۲: حالا با یک تناسب ساده، زاویه‌ی مربوط به کارکنان ارشد معلوم می‌شود:

$$\frac{450}{360^\circ} = \frac{120}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{120 \times 360^\circ}{450} = 96^\circ$$

شرکتی ۱۶۰ کارمند دارد که مدارک تحصیلی آنان با ۶ کد متمایز مشخص شده‌اند. در نمودار دایره‌ای، زاویه‌ی مرکزی هر گروه با واحد درجه مطابق جدول زیر است. تعداد کارکنان با کد ۴ کدام است؟

کد	۱	۲	۳	۴	۵	۶
زاویه‌ی مرکزی	۲۷	۴۵	۹۹	$\alpha$	۵۴	۱۸

۵۸ (۴) ۵۶ (۳) ۵۴ (۲) ۵۲ (۱)

گام ۱: در نمودار دایره‌ای، مجموع همه‌ی زاویه‌ی مرکزی برابر ۳۶۰° است، پس:

$$27^\circ + 45^\circ + 99^\circ + \alpha + 54^\circ + 18^\circ = 360^\circ \Rightarrow 243^\circ + \alpha = 360^\circ \Rightarrow \alpha = 117^\circ$$

گام ۲: با یک تناسب ساده، فراوانی مطلق گروه چهارم را به دست می‌آوریم:

$$\frac{360^\circ}{160} = \frac{117^\circ}{x} \Rightarrow x = \frac{160 \times 117^\circ}{360^\circ} = 52$$

## ۲ در جریان باشید ...

۱ مجموع فراوانی‌های نسبی در یک جدول فراوانی، همواره برابر یک است، زیرا:

$$\frac{f_1}{n} + \frac{f_2}{n} + \dots + \frac{f_i}{n} = \frac{f_1 + f_2 + \dots + f_i}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

۲ مجموع درصد فراوانی‌های نسبی در یک جدول فراوانی همواره برابر ۱۰۰ است، زیرا:

$$\frac{f_1}{n} \times 100 + \frac{f_2}{n} \times 100 + \dots + \frac{f_i}{n} \times 100 = \left( \frac{f_1}{n} + \frac{f_2}{n} + \dots + \frac{f_i}{n} \right) \times 100 = \frac{f_1 + f_2 + \dots + f_i}{n} \times 100 = \frac{n}{n} \times 100 = 100$$

۷ جدول زیر درصد فراوانی نسبی گروه خونی افراد یک جامعه است. در نمودار دایره‌ای، زاویه سطح مربوط به گروه خونی O چند درجه است؟

گروه خونی	A	B	AB	O
درصد فراوانی نسبی	۲۴	۲۲/۵	۳۶	$\alpha$

۴۵ (۱) ۵۴ (۲) ۶۳ (۳) ۷۲ (۴)

$$24 + 22/5 + 36 + \alpha = 100 \Rightarrow 82/5 + \alpha = 100 \Rightarrow \alpha = 17/5$$

گام ۱: می‌دانیم مجموع درصد فراوانی نسبی برابر ۱۰۰ است، پس:

گام ۲: حال به کمک تناسب، زاویه‌ی مربوطه را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{100}{360^\circ} = \frac{17/5}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{360^\circ \times 17/5}{100} = 63^\circ$$

۸ در جدول زیر مرکز دسته با درصد فراوانی نسبی داده شده است، در نمودار دایره‌ای زاویه‌ی مربوط به بازه‌ی  $[۲۵۰۲۸]$  چند درجه است؟

مرکز دسته	۱۷/۵	۲۰/۵	۲۳/۵	۲۶/۵	۲۹/۵
درصد فراوانی نسبی	۱۷	۲۰/۵	۲۲	x	۱۸

۹۰ (۴)    ۸۴ (۳)    ۸۱ (۲)    ۷۲ (۱)

$$۱۷ + ۲۰/۵ + ۲۲ + x + ۱۸ = ۱۰۰ \Rightarrow x = ۲۲/۵$$

گام ۱: مجموع درصد فراوانی‌های نسبی برابر ۱۰۰ است، پس:

بنابراین درصد فراوانی نسبی دسته‌ی  $(۲۵۰۲۸)$  با مرکز  $۲۶/۵$  برابر  $۲۲/۵$  می‌باشد.

$$۱۰۰ \quad ۲۲/۵ \Rightarrow \alpha = \frac{۳۶^\circ \times ۲۲/۵}{۱۰۰} = ۸۱^\circ$$

گام ۲: حالا می‌توانیم زاویه‌ی مربوطه را پیدا کنیم:

۹ داده‌های آماری در ۹ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. فراوانی تجمعی نسبی در دسته‌ی چهارم و پنجم به ترتیب  $۰/۲۸$  و  $۰/۴۰$  است. در نمودار دایره‌ای، زاویه‌ی مربوط به دسته‌ی پنجم چند درجه است؟

۴۰/۵ (۱)    ۴۲/۶ (۳)    ۴۱/۴ (۲)

گام ۱: اگر فراوانی تجمعی نسبی دسته‌ی چهارم را از فراوانی تجمعی نسبی دسته‌ی پنجم کم کنیم، فراوانی نسبی پنجم به دست می‌آید:

$$\text{فراوانی نسبی پنجم} = \frac{f_{\Delta}}{n} = F_{C_{\Delta}} - F_{C_{\Gamma}} = ۰/۴۰ - ۰/۲۸ = ۰/۱۲$$

گام ۲: چون فراوانی نسبی پنجم یعنی  $\frac{f_{\Delta}}{n}$  را داریم، می‌توانیم زاویه‌ی مربوط به دسته‌ی پنجم را به راحتی به دست آوریم:

$$\alpha = \frac{f_{\Delta}}{n} \times ۳۶^\circ = ۰/۱۲ \times ۳۶^\circ = ۴۳/۲^\circ$$

فراوانی نسبی

۱۰ جدول زیر، درصد فراوانی تجمعی در گروه‌های سنی مختلف در یک جامعه را نشان می‌دهد. در نمودار دایره‌ای، زاویه‌ی مربوط به سطح گروه سنی بین ۲۰ و ۳۰ سال چند درجه است؟

کران بالای سن	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۱۲۰
درصد فراوانی تجمعی	۱۷	۳۶	۵۱	۷۰	۱۰۰

۶۰ (۴)    ۵۶ (۳)    ۵۴ (۲)    ۴۸ (۱)

گام ۱: در جدول فوق، کران بالای دسته‌ها معلوم شده، پس گروه سنی بین ۲۰ و ۳۰ سال همان دسته‌ی سوم می‌باشد.

گام ۲: درصد فراوانی دسته‌ی سوم از تفاضل درصد فراوانی تجمعی آن و دسته‌ی ماقبل یعنی دسته‌ی دوم به دست می‌آید، پس:

$$۱۵ = ۵۱ - ۳۶ = \text{درصد فراوانی دسته‌ی سوم}$$

گام ۳: فراوانی نسبی دسته‌ی سوم برابر است با:  $\frac{۱۵}{۱۰۰}$ .

$$\alpha_{\Gamma} = \frac{۱۵}{۱۰۰} \times ۳۶^\circ = ۵۴^\circ$$

گام ۴: زاویه‌ی مربوط به دسته‌ی سوم در نمودار دایره‌ای برابر است با:

۱۱ کارکنان یک کارخانه از نظر سطح مهارت به ۶ طبقه دسته‌بندی شده‌اند که درصد فراوانی تجمعی آن‌ها در جدول زیر داده شده است. در نمودار دایره‌ای، زاویه‌ی مربوط به بیشترین فراوانی مطلق چند درجه است؟

سطح مهارت	۱	۲	۳	۴	۵	۶
درصد فراوانی تجمعی	۱۰	۲۵	۵۵	۸۰	۹۲	۱۰۰

۱۲۰ (۴)    ۱۱۵ (۳)    ۱۰۸ (۲)    ۹۶ (۱)

گام ۱: ابتدا درصد فراوانی نسبی دسته‌ها را به دست می‌آوریم:

سطح مهارت	۱	۲	۳	۴	۵	۶
درصد فراوانی تجمعی	۱۰	۲۵	۵۵	۸۰	۹۲	۱۰۰
درصد فراوانی نسبی	۱۰	$۲۵ - ۱۰ = ۱۵$	$۵۵ - ۲۵ = ۳۰$	$۸۰ - ۵۵ = ۲۵$	$۹۲ - ۸۰ = ۱۲$	$۱۰۰ - ۹۲ = ۸$

گام ۲: دسته‌ی سوم با درصد فراوانی نسبی ۳۰، دارای بیشترین فراوانی است، پس زاویه‌ی مرکزی متناظر با این دسته در نمودار دایره‌ای برابر است با:

$$\alpha_{\Gamma} = \frac{۳۰}{۱۰۰} \times ۳۶^\circ = ۱۰۸^\circ$$

## آزمون‌های جامع



- ۳ آزمون جامع مطابق با استانداردهای کنکورهای چند سال اخیر طراحی کرده‌ایم تا در دوران جمع‌بندی با خط فکری طراحان آشنا شوید. حتماً این ۳ آزمون را بررسی کنید.